Российский государственный университет
нефти и газа им.И.М.Губкина

Учебно-научный центр
довузовской подготовки

Центр дистанционного обучения

Кафедра физики

А.Черноуцан

профессор кафедры физики
заместитель главного редактора журнала « КВАНТ»

ФИЗИКА

Учебно-справочное пособие

для старшеклассников и абитуриентов

Оглавление

Глава 1. **Механика**

§ 1. Кинематика

Механическим движением называется изменение положения тела по отношению к другим телам. Из определения видно, что механическое движение не абсолютно, а относительно.

▶ **Системы отсчета.** *Система отсчета* — это тело или совокупность тел, по отношению к которым рассматривается движение других тел. Система отсчета состоит из *тела* (*или тел*) *отсчета*, жестко связанной с ним (с ними) системы координат и системы измерения времени — часов. Одно и то же тело в различных системах отсчета движется по-разному. Например, в системе отсчета, связанной с самим телом, оно покоится, в других системах отсчета — движется.

▶ **Материальная точка.** *Материальная точка* — это тело, размерами которого в процессе движения можно пренебречь. Возможность рассматривать тело как материальную точку зависит не от самого тела, а от характера его движения. Например, при движении Земли вокруг Солнца Землю можно считать материальной точкой, если же нас интересует суточное вращение Земли, — то нельзя.

▶ **Траектория. Путь. Перемещение.** Положение материальной точки в момент времени t можно задать тремя координатами x, y, z или *радиус-вектором* $\vec{r}$, соединяющим с ней начало координат (рис. 1). В процессе движения материальная точка описывает пространственную кривую — *траекторию*. Движение точки полностью определяется заданием *закона движения* — трех функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ или, что то же самое, одной векторной функции $\vec{r}(t)$.

Путь — это длина участка траектории, пройденного точкой за определенный интервал времени. Путь — величина скалярная, т.е. не зависящая от выбора системы координат. Отметим также, что путь не может быть отрицательным и не может убывать со временем.

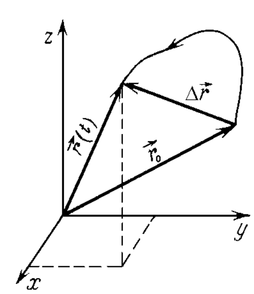

Рис. 1

Перемещением материальной точки на интервале времени от момента t_1 до момента t_2 называется вектор $\vec{s}$, соединяющий начальное положение точки с конечным. Очевидно, что $\vec{s} = \Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$, т.е. перемещение равно разности радиусов-векторов точки в конечный и начальный моменты времени. Если начальный момент не указан, то перемещение отсчитывается от начала движения: $\vec{s}(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_0$, где $\vec{r}_0$ — радиус-вектор в начальный момент времени (при $t = 0$).

▶ **Скорость.** *Средней скоростью* материальной точки на интервале времени от t_1 до t_2 называется отношение ее перемещения к интервалу времени: $\vec{v}_{\text{ср}} = \Delta\vec{r}/\Delta t$, где $\Delta t = t_2 - t_1$.

Мгновенная скорость (или просто *скорость*) *точки* в момент времени t — это предел, к которому стремится средняя скорость при неограниченном уменьшении интервала времени:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Видно, что скорость $\vec{v}(t)$ представляет собой производную радиуса-вектора или перемещения, рассматриваемых как функции времени t: $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \vec{s}\,'(t)$. Если тело движется по криволинейной траектории, то его скорость направлена по касательной к траектории. В СИ * координаты и перемещение тела выражаются в *метрах*, а время — в *секундах*. Поэтому скорость выражается в метрах в секунду (м/с).

Замечание. Иногда вводят *среднюю скорость пути*, определяемую как отношение пути к интервалу времени. Средняя скорость пути — величина скалярная. Во многих задачах рассматривается движение по прямой в одном направлении, в этом случае средняя скорость пути дает такой же ответ, как просто средняя скорость (которую иногда называют средней скоростью перемещения).

Пример 1. Вычислим среднюю скорость для движения по двум последовательным участкам, которые точка проходит с постоянными скоростями v_1 и v_2. Рассмотрим два случая. В первом случае пусть точка половину всего времени движется с одной скоростью, а половину — с другой. Тогда

$$v_{\text{ср}1} = \frac{s_1+s_2}{t} = \frac{v_1(t/2)+v_2(t/2)}{t} = \frac{v_1+v_2}{2}.$$

Во втором случае пусть точка изменяет свою скорость с v_1 до v_2 ровно в середине пути. Тогда

$$v_{\text{ср}2} = \frac{s}{t_1+t_2} = \frac{s}{s/(2v_1)+s/(2v_2)} = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}.$$

Легко убедиться, что $v_{\text{ср}1} \geqslant v_{\text{ср}2}$. Второй из случаев призван продемонстрировать, сколь опасным является часто встречающееся заблуждение, что для вычисления средней скорости можно всегда применять формулу среднего арифметического.

▶ **Ускорение.** *Ускорением* материальной точки в момент времени t называется величина

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \vec{v}\,'(t),$$

т.е. производная мгновенной скорости $\vec{v}(t)$, рассматриваемой как функция времени t. Ускорение характеризует быстроту изменения

* СИ (система интернациональная) — сокращенное название Международной системы единиц, принятой в 1960 г. Генеральной конференцией по мерам и весам.

скорости тела. Из определения видно, что ускорение выражается в м/с^2.

При *прямолинейном движении* материальной точки систему координат можно выбрать таким образом, чтобы движение происходило вдоль оси x. Движение при этом определяется координатой точки x и проекциями скорости $v_x = x'(t)$ и ускорения $a_x = v_x'(t)$ на эту ось. Перемещение точки за время t имеет вид: $s_x = x - x_0$, где x_0 — координата в начальный момент времени $t = 0$ (начальная координата).

Замечание. Изучение прямолинейного движения полезно не только потому, что это важный частный случай. *Криволинейное* движение точки по плоскости или в пространстве можно свести к двум или трем *прямолинейным* движениям — движениям проекций точки на координатные оси.

▶ **Равномерное движение.** При *равномерном* прямолинейном движении скорость точки постоянна: $v_x = \mathrm{const}$. Координата точки x является первообразной v_x, т.е. линейной функцией времени t:

$$x = x_0 + v_x t, \qquad \text{или} \qquad s_x = v_x t.$$

При равномерном движении точка проходит равные отрезки пути за одинаковые промежутки времени.

График зависимости координаты точки от времени при равномерном прямолинейном движении изображается прямой. Наклон этой прямой зависит от величины и знака скорости.

▶ **Равноускоренное движение.** *Равноускоренное* (равнопеременное) прямолинейное движение — это движение, при котором ускорение точки постоянно: $a_x = \mathrm{const}$. Скорость v_x является первообразной a_x и поэтому имеет вид:

$$v_x = v_{0x} + a_x t, \tag{1}$$

где v_{0x} — начальная скорость (в момент времени $t = 0$). Координата точки x является первообразной скорости и поэтому вычисляется по формуле

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2},$$

или, учитывая, что $s_x = x - x_0$, получаем формулу для перемещения за время t:

$$s_x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}. \tag{2}$$

На рис. 2 показаны графики зависимостей скорости и координаты точки от времени t при равноускоренном прямолинейном движении.

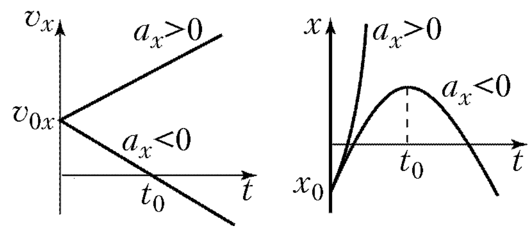

Рис. 2

Видно, что график $x(t)$ представляет собой параболу, характер выпуклости и положение вершины которой зависят от a_x и v_{0x}.

Формулы (1) и (2), описывающие зависимость скорости и перемещения от времени, позволяют в принципе решить любую задачу на равноускоренное движение. Однако часто решение существенно упрощается, если использовать одну из двух дополнительных формул, которые легко выводятся из двух основных. Так, вынося в уравнении (2) время t за скобки $s_x = (v_{0x} + a_x t/2)t$ и упрощая выражение в скобках (подставляя $a_x t = v_x - v_{0x}$ из уравнения (1)), получим

$$s_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} t, \tag{3}$$

т.е. средняя скорость равноускоренного движения равна полусумме начальной и конечной скоростей. Эта формула имеет простой графический смысл: перемещение есть интеграл (первообразная) скорости, т.е. равняется площади под графиком $v_x(t)$ (площади трапеции).

Выражая время из формулы (1): $t = (v_x - v_{0x})/a_x$ и подставляя в (3), получаем еще одно полезное соотношение, выполняющееся при равноускоренном движении:

$$2a_x s_x = v_x^2 - v_{0x}^2. \tag{4}$$

Пример 2. При экстренном торможении автомобиля его колеса оставляют на асфальте след, по длине которого можно рассчитать скорость автомобиля в начале торможения. Для этого удобно использовать уравнение (4), в котором надо положить $v_x = 0$ (торможение до остановки): $2a_x s_x = 0 - v_{0x}^2$. Если, например, известно, что модуль ускорения на сухом асфальте равен $a = 5$ м/с^2, а длина следа оказалась равной $s = 20$ м, то получаем $v_0 = \sqrt{-2a_x s_x} = \sqrt{2as} \approx 14$ м/с ≈ 51 км/ч.

Замечание. Модуль любого вектора мы будем обозначать той же буквой, но без знака вектора: $v = |\vec{v}|$. (В случае одномерного движения буква без знака проекции обозначает модуль проекции: $v = |v_x|$.)

Пример 3. Посмотрим, как надо решать задачи на встречу двух тел. Провожающий хочет передать знакомому в поезде посылку; опаздывая к отходу поезда, он бежит вдоль перрона со скоростью v. В тот момент, когда ему осталось пробежать расстояние L, поезд трогается и начинает набирать скорость с постоянным ускорением a. Чтобы узнать, успеет ли провожающий передать посылку, запишем условие встречи. Для этого удобно выбрать общую для двух тел систему координат, тогда в момент встречи координаты тел будут совпадать. Выберем начало координат в том месте, где находился провожающий в тот момент, когда тронулся поезд. Тогда зависимость координат провожающего и его знакомого от времени имеет вид: $x_1 = vt$, $x_2 = L + at^2/2$. Условие встречи $x_1 = x_2$ имеет вид квадратного уравнения, и провожающий догонит знакомого в том случае, если дискриминант этого уравнения неотрицателен: $v^2 - 2aL \geqslant 0$. (Правда, надо еще проверить, не добежит ли он до края платформы раньше желанной встречи.)

▶ **Свободное падение.** *Свободное падение* — это движение тела под действием силы земного притяжения в пренебрежении сопротивлением воздуха. Если расстояние, которое проходит тело в процессе движения, пренебрежимо мало по сравнению с радиусом Земли, то ускорение тела $\vec{a}$ можно считать постоянным по величине и направлению: $\vec{a} = \vec{g}$, где $\vec{g}$ — *ускорение свободного падения.* У поверхности Земли $g \approx 9{,}8\,\text{м/с}^2$; на экваторе g немного меньше, чем на полюсе.

Если выбрать систему координат, в которой ось y направлена вертикально вверх, а ось x — горизонтально (в плоскости движения), то движение проекции материальной точки на ось y будет равноускоренным, а движение ее проекции на ось x — равномерным. Таким образом, в этой системе отсчета движение точки описывается четырьмя уравнениями ($a_y = -g$):

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} = \text{const}, \\ x = v_x t, \end{cases} \qquad \begin{cases} v_y = v_{0y} - gt, \\ y = y_0 + v_{0y}t - \dfrac{gt^2}{2}, \end{cases}$$

где x, y — координаты точки; v_x, v_y — соответствующие проекции скорости $\vec{v}$; y_0 —координата y точки при $t = 0$ (x_0 считаем равным нулю); v_{0x}, v_{0y} — проекции начальной скорости $\vec{v}_0$.

Поскольку время t выражается через x линейно: $t(x) = x/v_x$, а y зависит от t квадратично, то, подставляя в зависимость $y(t)$ выражение $t(x)$, получаем, что зависимость $y(x)$ имеет вид квадратного трехчлена. Из этого следует, что траектория свободно падающего тела представляет собой параболу. (Ясно, что при $v_x = 0$ тело движется по вертикальной прямой.)

Рассмотрим несколько частных случаев.

С л у ч а й 1. Тело падает с высоты h без начальной скорости. Тогда $y_0 = h$, $v_{0y} = 0$. В этом случае

$$v_y = -gt, \qquad y = h - \frac{gt^2}{2}.$$

Время t, через которое тело достигнет поверхности Земли (y=0), можно найти из уравнения: $y = h - gt^2/2 = 0$. Отсюда получаем: $t = \sqrt{2h/g}$. Скорость тела в момент падения $v_y = -gt = -\sqrt{2gh}$.

С л у ч а й 2. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $v_{0y} = v_0$. В этом случае

$$v_y = v_0 - gt, \qquad y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

При $t_1 = v_0/g$ тело остановится ($v_y = 0$) и, следовательно, достигнет в этот момент наивысшей точки полета. Подставляя в выражение $y = v_0 t - gt^2/2$ значение t_1, получаем максимальную высоту $h = y(t_1) = v_0^2/2g$ (проще получить этот ответ из формулы (4)). Полное время полета t_2 в два раза больше, чем t_1: $t_2 = 2v_0/g$.

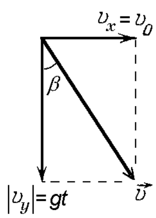

Рис. 3

С л у ч а й 3. Тело брошено горизонтально со скоростью v_0 с высоты h. В этом случае

$$\begin{cases} v_x = v_0, \\ x = v_0 t, \end{cases} \qquad \begin{cases} v_y = -gt, \\ y = h - \dfrac{gt^2}{2}, \end{cases}$$

т.е. движение тела складывается из равномерного перемещения вдоль оси x и падения с высоты h, рассмотренного в случае 1. Скорость тела в любой момент времени равна

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}$$

и образует с ускорением $\vec{g}$ угол, тангенс которого равен (рис. 3)

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{v_x}{|v_y|} = \frac{v_0}{gt}.$$

В момент падения $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$.

С л у ч а й 4. Тело брошено с поверхности земли под углом α к горизонту со скоростью v_0. Тогда

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha, \\ x = (v_0 \cos\alpha)t, \end{cases} \qquad \begin{cases} v_y = (v_0 \sin\alpha) - gt, \\ y = (v_0 \sin\alpha)t - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases} \tag{5}$$

В момент времени $t_1 = (v_0 \sin\alpha)/g$ вертикальная проекция скорости обращается в ноль, следовательно, высота подъема над горизонтом в этот момент максимальна и равна

$$h = y(t_1) = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}.$$

В момент времени $t_2 = 2(v_0 \sin\alpha)/g$ тело упадет на землю, пройдя вдоль оси x расстояние

$$L = x(t_2) = (v_0 \cos\alpha)t_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

(дальность полета тела). Заметим, что формулы для $y(t)$, t_1, t_2 и h получаются такими же, как в случае 2, если в нем положить $v_0 = v_0 \sin\alpha$. При заданной начальной скорости v_0 максимальная дальность полета достигается при $\sin 2\alpha = 1$, т.е. при $\alpha = 45°$.

Пример 4. Посмотрим, как надо определять дальность полета, если бросок произведен не на горизонтальной, а на наклонной поверхности. Предположим, что камень бросили со скоростью v_0 перпендикулярно поверхности горы, наклоненной под углом α к горизонту. Так как начальная скорость составляет угол $(90° - \alpha)$ с горизонтом, то формулы (5) приобретут вид:

$$x = (v_0 \sin\alpha)t, \qquad y = (v_0 \cos\alpha)t - \frac{gt^2}{2}.$$

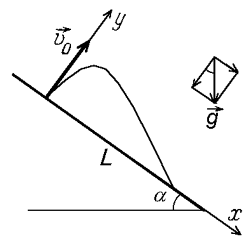

Рис. 4

Но главное состоит в том, что изменилось условие приземления камня. Вместо простого условия $y = 0$ теперь надо записать соотношение между координатами камня в момент падения на склон: $y = -x\,\mathrm{tg}\alpha$ (в момент падения $y < 0$). Подставив в это условие $x(t)$ и $y(t)$, вычислим время полета камня $(t = 2v_0/(g\cos\alpha))$, после чего найдем дальность полета:

$$L = \frac{x}{\cos\alpha} = \frac{2v_0^2 \sin\alpha}{g\cos^2\alpha}.$$

Можно подойти к задаче по-другому. Вместо стандартных, горизонтальной и вертикальной, осей направим ось x вниз вдоль склона горы, а ось y — перпендикулярно склону (рис. 4). Тогда условие падения снова приобретет вид $y = 0$, но оба движения, по x и по y, будут происходить с ускорением: $a_x = g\sin\alpha$, $v_{0x} = 0$, $a_y = -g\cos\alpha$, $v_{0y} = v_0$. Время полета найти теперь просто: $t = 2v_{0y}/|a_y| = 2v_0/(g\cos\alpha)$, а дальность полета равна координате x в момент падения: $L = a_x t^2/2$.

► **Относительность движения.** Одно и то же движение будет по-разному выглядеть при наблюдении из разных систем отсчета. Рассмотрим связь между скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ материальной точки в двух разных системах отсчета K_1 и K_2, оси которых в процессе движения остаются параллельными. Пусть за время Δt точка переместилась на $\vec{s}_2$ в системе отсчета K_2, а сама система K_2 переместилась относительно системы K_1 на $\vec{s}$. Тогда перемещение $\vec{s}_1$ точки в системе K_1 равно сумме перемещений: $\vec{s}_1 = \vec{s}_2 + \vec{s}$. Деля это равенство на Δt и переходя к пределу $\Delta t \to 0$, получаем *закон сложения скоростей*:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}, \tag{6}$$

где $\vec{v}_1$ — скорость точки в системе K_1, $\vec{v}_2$ — ее скорость в системе K_2, а $\vec{v}$ — скорость движения системы K_2 относительно системы K_1. Такое же соотношение выполняется и для ускорений: $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 + \vec{a}$.

Пример 5. В безветренную погоду капли дождя падают вертикально вниз с некоторой неизвестной скоростью $\vec{v}_1$ (зависящей от размера капель). Если наблюдать за дождем из системы отсчета, движущейся с некоторой горизонтальной скоростью $\vec{v}$, то капли будут падать под углом α к вертикали. Измерив α и v, можно найти v_1. Для этого

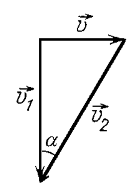

Рис. 5

изобразим векторное равенство (6) на рис. 5, учитывая, что $\vec{v}_1$ направлена вертикально вниз, а $\vec{v}$ — горизонтально. Из получившегося прямоугольного треугольника находим: $v_1 = v\mathrm{ctg}\alpha$. Если, например, в безветренную погоду следы капель на окне поезда наклонены под углом 30°, а скорость поезда 36 км/ч (10 м/с), то скорость падения капель равна $10\sqrt{3} \approx 17{,}2$ м/с.

Замечание. При одновременном свободном падении двух тел каждое из них движется относительно земли с ускорением $\vec{g}$. Поэтому в системе отсчета, связанной с одним из этих тел, второе движется без ускорения. Это означает, что движение второго тела в этой системе отсчета равномерное и прямолинейное. Переход в систему отсчета, связанную со свободно падающим телом, иногда называют методом барона Мюнхгаузена. (Этот барон, как известно, любил кататься на пушечном ядре.)

Пример 6. Стрелок хочет попасть в брошенный вверх мячик. Он собирается нажать на курок в тот момент, когда мячик оказывается в верхней точке (т.е. когда скорость мячика равна нулю). Так как стрелок находится далеко от того места, где подбрасывают мячик, он хочет решить, куда ему целиться. Надо ли ему вводить "поправку" на падение мячика, т.е. целиться ниже верхней точки его подъема? Оказывается, надо целиться точно в мячик, так как сама пуля сместится за время полета на такое же расстояние $gt^2/2$, как и мячик. С точки зрения воображаемого "барона Мюнхгаузена", сидящего на мячике, пуля будет приближаться к нему прямолинейно и равномерно (мы пренебрегаем сопротивлением воздуха).

▶ **Равномерное движение материальной точки по окружности.** Движение по окружности (по произвольной кривой) называют равномерным, если оно происходит с постоянной по модулю скоростью. Вектор мгновенной скорости $\vec{v}$ направлен по касательной к окружности, а его модуль называют *линейной скоростью*. *Угловой скоростью* ω называется скорость изменения центрального угла φ, т.е. $\omega = \Delta\varphi/\Delta t$, где $\Delta\varphi$ — изменение φ за

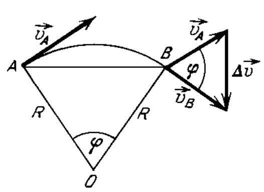

Рис. 6

время Δt. Если угол выражен в радианах, то длина дуги AB (рис. 6) $l = R\Delta\varphi$ (R — радиус окружности) и, следовательно,

$$v = \omega R,$$

т.е. линейная скорость точки равна произведению угловой скорости на радиус окружности. Угловая скорость выражается в радианах в секунду (рад/с).

Для описания равномерного вращательного движения используют также *период вращения* T (время одного оборота) и *частоту вращения* ν (число оборотов в единицу времени):

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Частота вращения выражается в c^{-1}.

Даже при равномерном движении точки по окружности вектор скорости точки $\vec{v}$ изменяется. Следовательно, точка движется с ускорением

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t},$$

где $\Delta \vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ — изменение скорости за время Δt (рис. 6). Из рисунка видно, что при уменьшении интервала времени Δt направление вектора $\Delta \vec{v}$ приближается к радиусу, соединяющему центр окружности с точкой. Значит, ускорение $\vec{a}$ направлено к центру окружности, и его называют *центростремительным ускорением.* Найдем это ускорение. Из подобия треугольника AOB и треугольника, образованного векторами $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ и $\Delta \vec{v}$, следует, что

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v}{R} \frac{AB}{\Delta t}.$$

Поскольку $\lim\limits_{\Delta t \to 0} (AB/\Delta t) = v$, центростремительное ускорение оказывается равным

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R. \tag{7}$$

▶ **Неравномерное движение по окружности.** В общем случае угловая скорость $\omega = \varphi'(t)$ зависит от времени, и для описания движения вводят *угловое ускорение* $\varepsilon = \omega'(t)$ (выражается в рад/с^2). Ускорение $\vec{a}$ направлено внутрь окружности под некоторым (не обязательно прямым) углом к скорости (рис. 7). Иначе говоря, в общем случае $\vec{a}$ имеет две компоненты: *нормальное ускорение* a_n и *тангенциальное ускорение* a_τ.

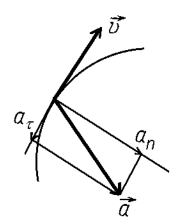

Рис. 7

Нормальное ускорение направлено к центру окружности (перпендикулярно к $\vec{v}$) и вычисляется по тем же формулам (7), что и центростремительное ускорение. Оно обеспечивает изменение $\vec{v}$ по направлению. Тангенциальное ускорение характеризует изменение величины скорости и равно $a_\tau = v'(t) = = (\omega R)' = \varepsilon R$. (Направление вдоль скорости обычно считается положительным. На рисунке 7 a_τ направлено против скорости, это значит, что $a_\tau < 0$ и скорость уменьшается.)

При равноускоренном движении по окружности $\varepsilon = \mathrm{const}$, и зависимости ω и $\Delta\varphi$ от времени имеют такой же вид, как v_x и s_x для равноускоренного движения точки по прямой (формулы (1) и (2)):

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \qquad \Delta\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

где ω_0 — начальная угловая скорость.

▶ **Движение вдоль произвольной криволинейной траектории.** В общем случае для a_τ и a_n верны такие же соотношения, как при движении по окружности: $a_\tau = v'(t)$ и $a_n = v^2/R$, где R — *радиус кривизны* траектории, т.е. радиус окружности, наиболее близко примыкающей к траектории в данной точке. Если a_τ все время равно нулю, то движение вдоль траектории является равномерным. Если тождественно равно нулю a_n, то движение происходит по прямой.

Вопрос. Опишите качественно, как меняются a_τ, a_n и R при движении тела, брошенного под углом к горизонту.

Ответ. От начала движения до верхней точки $a_\tau < 0$ и $|a_\tau|$ уменьшается, a_n возрастает (полное ускорение все время равно $\vec{g}$), R уменьшается ($R = v^2/a_n$, а v уменьшается). Затем — наоборот.

▶ **Движение твердого тела.** *Твердым телом* называют идеальное тело, расстояние между любыми двумя точками которого не меняется (т.е. отсутствуют деформации). Выделяют два вида движения твердого тела — поступательное и вращательное. При *поступательном движении* отрезок, соединяющий любые две точки тела, перемещается параллельно самому себе. Значит, все точки тела совершают одинаковые движения по одинаковым траекториям, и достаточно описать движение одной точки. При *вращательном движении* твердого тела вокруг неподвижной оси все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на этой оси. Угловая скорость ω всех точек тела одинакова, а линейные скорости пропорциональны расстоянию до оси вращения: $v = \omega R$. Произвольное движение твердого тела сводится к суперпозиции (наложению) поступательного и вращательного движений (вращательному движению относительно поступательно движущейся системы отсчета).

Пример 7. *Качение колеса* с постоянной скоростью $\vec{v}$ относительно земли (рис. 8) можно представить в виде наложения поступательного движения со скоростью v (вправо) и вращательного движения относительно оси колеса с угловой скоростью ω (по часовой стрелке). В соответствии с законом сложения скоростей, скорость любой точки колеса равна векторной сумме скорости вращательного движения $\vec{v}_{вр}$, величина которой для точек на ободе равна $v_{вр} = \omega R$, и скорости поступательного движения $\vec{v}$. Скорость нижней точки колеса O' относительно земли должна быть равна нулю, значит в этой точке противоположно направленные $\vec{v}$ и $\vec{v}_{вр}$ должны компенсироваться. Получаем, что из условия отсутствия проскальзывания следует связь между v и ω: $v = \omega R$.

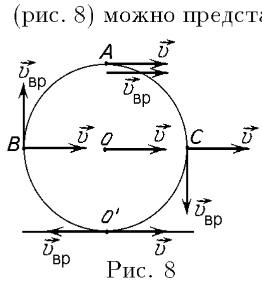

Рис. 8

В верхней точке A колеса $\vec{v}$ и $\vec{v}_{вр}$ направлены в одну сторону, т.е. скорость точки A равна $v_A = 2v$. В точках B и C, находящихся на уровне центра, $\vec{v}$ и $\vec{v}_{вр}$ взаимно перпендикулярны, и скорости этих точек равны $v_B = v_C = v\sqrt{2}$.

Ускорение любой точки на ободе колеса, в соответствии с законом сложения ускорений (аналогичным (6)), равно ускорению вращательного движения $\omega^2 R$ и направлено к центру окружности (ускорение равномерно движущейся системы отсчета равно нулю).

Замечание. Скорость любой точки колеса в данный момент можно найти как скорость чистого вращения с угловой скоростью ω относительно неподвижной (в этот момент) *мгновенной оси вращения* O'. Проверьте, что скорости точек A, B и C получаются такими же, как выше.

§ 2. Основы динамики

▶ **Первый закон Ньютона** состоит в том, что существуют такие системы отсчета, в которых любое свободно движущееся тело, т.е. тело, на которое не действуют другие тела (или действия других тел компенсируются), движется равномерно и прямолинейно. Системы отсчета, существование которых постулирует этот закон, называются *инерциальными*.

Из закона сложения скоростей (6) видно, что любая система отсчета, движущаяся с постоянной скоростью относительно инерциальной, также является инерциальной. Все законы механики имеют одинаковый вид во всех инерциальных системах. Утверждение о равноправии инерциальных систем отсчета называют *принципом относительности Галилея*.

Используемые при решении задач системы отсчета инерциальны лишь с той или иной степенью точности. Так, систему, связанную с поверхностью Земли, во многих случаях можно считать инерциальной. Однако из-за суточного вращения Земли она не является абсолютно инерциальной, о чем свидетельствует, например, медленное вращение плоскости колебаний длинного маятника (*маятник Фуко*).

Из первого закона Ньютона следует, что в инерциальных системах отсчета ускорение тела возникает только в результате его взаимодействия с другими телами. Это ускорение зависит от инертности тела, т.е. его способности сопротивляться изменению скорости, а также от интенсивности и направления действия на него других тел.

▶ **Масса.** *Масса* тела m — это скалярная положительная величина, характеризующая *инертность* тела. Эксперименты показывают, что при взаимодействии двух тел их ускорения $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ в инерциальной системе отсчета направлены в противоположные стороны, а отношение модулей ускорений a_1/a_2 не зависит от характера и интенсивности взаимодействия. Это позволяет определить отношение масс двух произвольных тел как величину, обратную отношению ускорений, возникающих при их взаимодействии друг с другом: $m_1/m_2 = a_2/a_1$.

Чтобы определить не только отношение массы данного тела к массе других тел, но и абсолютное значение массы m, необходимо установить эталон массы. В СИ за эталон массы принимают один *килограмм* (1 кг), примерно равный массе 10^{-3} м^3 воды. Таким образом, сравнивая ускорение тела a, возникающее при его взаимодействии с телом массой $m_0 = 1$ кг, и ускорение a_0, приобретаемое эталонным телом, можем найти массу тела $m = a_0 m_0 / a$.

Как показывает опыт, такое определение массы является непротиворечивым: если измерить отношение ускорений a_1/a_2 двух тел, массы которых m_1 и m_2 были до этого определены из взаимодействия с эталоном, то оно окажется равным m_2/m_1. Кроме того, определенная таким образом масса обладает важным свойством аддитивности: сумма масс частей, на которые можно разделить тело, равна массе всего тела.

▶ **Сила.** *Силой*, действующей на тело массой m при его взаимодействии с другим телом, назовем величину $\vec{F} = m\vec{a}$, где $\vec{a}$ — ускорение тела m в инерциальной системе отсчета. Таким образом, сила, действующая на тело, равна произведению массы тела на ускорение, сообщаемое телу этой силой. В СИ сила выражается в *ньютонах* (Н = кг · м/с^2).

▶ **Второй закон Ньютона.** Если на материальную точку одновременно действуют n тел с силами $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ соответственно, то ускорение тела $\vec{a}$ определяется *векторной суммой этих сил*:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n}{m}$$

Силу $\vec{F}$ называют *равнодействующей* (или *результирующей*) сил $\vec{F}_1, \ldots, \vec{F}_n$.

▶ **Третий закон Ньютона.** *Третий закон Ньютона* утверждает, что силы $\vec{F}_{AB}$ и $\vec{F}_{BA}$, с которыми действуют друг на друга два взаимодействующих тела A и B, направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны и равны между собой по модулю:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}.$$

Этот закон выполняется для любых взаимодействующих тел независимо от природы взаимодействия и от того, находятся ли тела в непосредственном контакте или взаимодействуют на расстоянии с помощью гравитационных или электромагнитных сил.

▶ **Силы природы.** Все разнообразие действующих в природе сил можно свести к нескольким фундаментальным взаимодействиям (гравитационному, слабому, электромагнитному и сильному).

Однако для практических целей такой подход непригоден, и кроме фундаментальных дальнодействующих сил надо знать свойства различных сил, возникающих при контакте макроскопических тел.

Сила упругости. Под действием внешних сил (нагрузки) твердое тело деформируется (изменяет форму и размеры). Деформацию называют *упругой*, если при снятии нагрузки форма тела восстанавливается. (Подробнее об упругих деформациях рассказано на стр. 68.) Сила, с которой деформируемое упругое тело действует на деформирующее (источник нагрузки), называют *силой упругости*. При деформации линейного тела (растяжении или сжатии стержня или пружины, растяжении упругого шнура) сила упругости пропорциональна изменению длины тела (*закон Гука*):

$$|\vec{F}_{упр}| = k|\Delta l|,$$

где коэффициент пропорциональности k называется *жесткостью* (в СИ k измеряется в Н/м), а $\Delta l = l - l_0$ — изменение длины тела (l_0 — длина в недеформированном состоянии). При растяжении ($\Delta l > 0$) сила упругости направлена в сторону упругого тела (растянутое тело "тянет на себя"), при сжатии ($\Delta l < 0$) — наоборот.

Если деформация линейного тела происходит за счет смещения точки приложения нагрузки (другой конец тела закреплен), то для проекции силы упругости на ось x, параллельную телу, можно записать

$$F_{упр_x} = -kx,$$

где x — *смещение* точки приложения нагрузки (смещение отсчитывается от положения этой точки в отсутствие деформации).

Вопрос. Как жесткость резинового шнура (стержня, пружины) зависит от его длины? Во сколько раз изменится жесткость, если резиновый шнур сложить пополам?

Ответ. При растяжении шнура в любой его точке возникает одинаковая сила упругости. При этом растяжение любой части шнура пропорционально ее длине (например, половина шнура удлинилась в два раза меньше, чем весь шнур). Значит, жесткость куска шнура обратно пропорциональна его длине. При складывании пополам шнура жесткостью k жесткость каждой половины равна $2k$ и они действуют одновременно, т.е. общая жесткость равна $4k$.

Если жесткость тела k велика, а сила упругости не очень большая, то изменением формы тела можно прене- бречь и считать его абсолютно твердым. Силу упругости, действующую на поверхность, называют в этом случае *силой давления* и обозначают $\vec{P}$, а силу противодействия, действующую со стороны поверхности на тело, — *силой нормальной реакции* $\vec{N}$; $\vec{N} = -\vec{P}$. Аналогично при большом значении k можно пренебречь растяжением нити и считать ее нерастяжимой. В этом случае силу упругости называют *силой натяжения нити* и обозначают $\vec{T}$.

Пример 8. Два тела массами m_1 и m_2 подвешены на невесомой нерастяжимой нити, переброшенной через невесомый блок, не оказывающий сопротивления вращению (рис. 9). Найдем ускорения тел и силу натяжения нити. Так как массы блока и нити пренебрежимо малы, а блок не оказывает сопротивления вращению,то силы натяжения, действующие на тела, равны по модулю: $T_1 = T_2 = T$. Из нерастяжимости нити следует, что ускорения тел $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ равны по модулю и направлены в противоположные стороны. Поэтому уравнения второго закона Ньютона в проекции на ось y, направленную вниз, можно записать в виде:

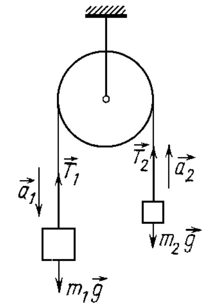

Рис. 9

$$\begin{cases} m_1 a_{1y} = m_1 g - T, \\ -m_2 a_{1y} = m_2 g - T. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим:

$$a_{1y} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g, \qquad T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Силы трения. Если два тела находятся в контакте и не движутся друг относительно друга, то кроме сил упругости, действующих перпендикулярно соприкасающимся поверхностям, возникают *силы трения покоя*, действующие в плоскости, касательной к этим поверхностям. Величина и направление силы трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$ в этой плоскости могут быть любыми при условии, что ее модуль не превосходит максимального значения $F_{\text{тр.max}} = \mu N$, где N — величина силы давления (нормальной реакции), а μ называется *коэффициентом трения покоя.* Силу трения покоя можно найти из условия относительной неподвижности соприкасающихся тел (условия отсутствия скольжения).

Если модуль найденной таким образом силы трения покоя превышает максимальное значение, то состояние, при котором отсутствует скольжение, оказывается невозможным. В том случае, когда поверхность одного тела скользит по поверхности другого, действующую между ними силу трения называют *силой трения скольжения.* Абсолютная величина силы трения скольжения практически не зависит от скорости движения и пропорциональна силе давления (нормальной реакции):

$$F_{\text{тр}} = \mu N,$$

где μ — *коэффициент трения скольжения*, который обычно принимают равным коэффициенту трения покоя. Сила трения скольжения, приложенная к одному из тел, лежит в плоскости контакта тел и направлена в сторону, противоположную вектору скорости этого тела относительно другого.

Пример 9. Рассмотрим тело массой m, находящееся на плоскости, наклоненной под углом α к горизонту, при условии, что коэффициент трения между телом и плоскостью равен μ (рис. 10). Второй закон Ньютона для тела имеет вид: $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$, где $\vec{a}$ — ускорение тела, а $\vec{N}$, $\vec{F}_{\text{тр}}$ — силы реакции и трения. Проецируя это уравнение на оси декартовой системы, в которой ось x направлена вдоль плоскости, а ось y — перпендикулярно ей, имеем:

$$\begin{cases} ma = mg\sin\alpha - F_{\text{тр}}, \\ 0 = N - mg\cos\alpha. \end{cases}$$

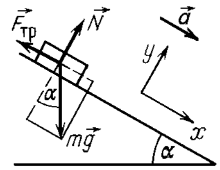

Рис. 10

Если тело покоится, то из первого уравнения можно найти силу трения покоя: $F_{\text{тр}} = mg\sin\alpha$. Она должна быть меньше предельного значения $F_{\text{тр. max}} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$, т.е. условие неподвижности тела имеет вид $\text{tg}\alpha < \mu$. Если это условие не выполняется, то тело поедет по плоскости с ускорением $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$, которое можно найти из первого уравнения после подстановки в него выражения для силы трения скольжения $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$.

Гравитационные силы. Все тела в природе притягиваются друг к другу. Возникающие при этом силы называются *гравитационными* и подчиняются *закону всемирного тяготения Ньютона*. Для двух материальных точек с массами m_1 и m_2 гравитационные силы (силы тяготения) $\vec{F}$ направлены вдоль прямой, соединяющей точки, и равны

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где $G \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11}\text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$ — *гравитационная постоянная*, а r — расстояние между точками.

Тела сложной формы можно разбить на материальные точки, а затем вычислить и просуммировать все элементарные гравитационные силы. Гравитационная сила, действующая на материальную точку со стороны сферически симметричного тела, была вычислена Ньютоном. Оказалось, что величина и направление этой силы точно такие же, как для материальной точки, масса которой равна массе тела и сосредоточена в его центре.

Гравитационная сила, действующая со стороны Земли на небольшое тело, находящееся вблизи ее поверхности, называется *силой тяжести*. Сила тяжести направлена к центру Земли, т.е. перпендикулярно земной поверхности, и равна

$$F_{\text{тяж}} = G\frac{M_{\text{з}} m}{R^2} = mg,$$

где $M_{\text{з}}$, R — масса и радиус Земли, а $g = GM_{\text{з}}/R^2$ — *ускорение свободного падения*. Движение тела под действием силы тяжести в отсутствие других сил называется свободным падением. Оно было рассмотрено раньше.

▶ **Вес.** *Вес тела* — это сила, с которой оно действует на опору или подвес, относительно которых тело не движется. По третьему закону Ньютона $\vec{P} = -\vec{F}_{\text{р}}$, где $\vec{F}_{\text{р}}$ — сила реакции опоры, которую можно найти из второго закона Ньютона: $\vec{F}_{\text{р}} + m\vec{g} = m\vec{a}$. Вес $\vec{P}$

тела, движущегося относительно земли равномерно и прямолинейно, равен силе тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$. Вес тела, движущегося (вместе с опорой) с ускорением $\vec{a}$, равен $\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a})$. Видно, что вес свободно падающего тела равен нулю. Поэтому состояние свободного падения называют *состоянием невесомости*.

Вопрос. Для привыкания космонавтов к условиям невесомости требуется создать искусственную невесомость. Как это можно сделать в земных условиях? На какое время?

Ответ. Ясно, что для этого нежелательно помещать космонавта в кабину падающего лифта. (Кстати, и время такого падения невелико: с высоты 200 м лифт будет падать примерно 6 с.) Поступают по-другому: задают программу автопилоту, которая заставляет самолет лететь точно так же, как двигалось бы в отсутствие воздуха тело, брошенное под углом к горизонту (см. (5)). Например, если эта программа начнет действовать в тот момент, когда скорость самолета равна 250 м/с и направлена под углом 45° к горизонту, то до возвращения на тот же уровень пройдет время $t = 2v_0 \sin\alpha / g \approx 35\,\text{с}$.

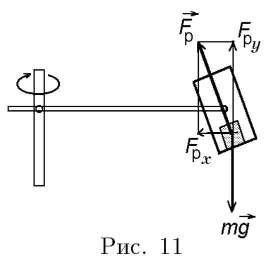

Рис. 11

Пример 10. Чтобы космонавты смогли привыкнуть к перегрузкам, возникающим при старте ракеты с большим ускорением, их раскручивают на центрифуге (рис. 11). Найдем перегрузку, т.е. отношение веса P к mg, при вращении центрифуги в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω. Для этого запишем второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальную ось x, направленную от кабины к центру окружности (проекция ускорения на эту ось равна центростремительному ускорению (7)), и на вертикальную ось y:

$$\begin{cases} F_{\text{р}x} = m\omega^2 R, \\ F_{\text{р}y} - mg = 0, \end{cases}$$

где $F_{\text{р}x}$, $F_{\text{р}y}$ — проекции на оси силы реакции $\vec{F}_\text{р}$, действующей на человека со стороны тренажера. Из этих уравнений находим силу реакции, которая, по третьему закону Ньютона, равна весу человека в условиях тренировки

$$P = F_\text{р} = \sqrt{F_{\text{р}x}^2 + F_{\text{р}y}^2} = \sqrt{(mg)^2 + (m\omega^2 R)^2},$$

и вычисляем перегрузку

$$\frac{P}{mg} = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega^2 R}{g}\right)^2}.$$

Вопрос. Можно ли считать, что вес тела на поверхности Земли точно равен по величине и направлению силе тяготения?

Ответ. Нет, так как любое тело на поверхности Земли участвует в ее суточном вращении, т.е. движется (вместе с поверхностью Земли в данном месте) с центростремительным ускорением, направленным в сторону земной оси. На полюсах $\vec{P} = m\vec{g}$, а на экваторе вес меньше, чем mg, на величину $m\omega^2 R$, что составляет $\approx 0{,}34\%$ от mg (ω — угловая скорость вращения Земли, которую легко найти, зная период вращения $T = 24$ часа; $R \approx 6400$ км — радиус Земли). Экспериментально определенное в данном месте (путем взвешивания) значение $\vec{g}$ уже включает в себя влияние вращения Земли, и используемая при расчетах сила тяжести $m\vec{g}$ равна весу покоящегося тела данной массы, т.е. немного отличается от силы тяготения по величине и направлению.

Если тело движется со скоростью v по круговой орбите радиусом $r > R$ вокруг Земли (такие тела называют *искусственными* *спутниками* Земли), то ускорение тела равно центростремительному ускорению: $a = a_{\text{цс}} = v^2/r$. По второму закону Ньютона $ma = GM_{з}m/r^2$, откуда

$$v^2 = G\frac{M_з}{r} = G\frac{M_з}{R+h},$$

где h — расстояние от орбиты до поверхности Земли. Скорость искусственного спутника v_I, движущегося вдоль поверхности Земли (*первая космическая скорость*), можно найти, положив $h = 0$. Пользуясь определением g, получаем

$$v_I^2 = G\frac{M_з}{R} = gR,$$

или $v_I = \sqrt{gR} \approx 7{,}9\,\text{км/с}$.

▶ **Статика.** Статика изучает условия равновесия тел. Для *равновесия материальной точки* необходимо, чтобы сумма сил, действующих на точку, была равна нулю. Для равновесия твердого тела этого недостаточно, поскольку под действием двух равных по величине, но противоположно направленных сил тело может вращаться (рис. 12 а). Рассмотрим сначала *условие равновесия тела, имеющего неподвижную ось вращения* O (рис. 12 б). Назовем *моментом* M *силы* $\vec{F}$ относительно оси O произведение модуля силы F на *плечо* этой силы d

$$M = \pm Fd,$$

где d — расстояние от оси O до линии действия силы $\vec{F}$. Знак момента определяется выбором положительного направле-

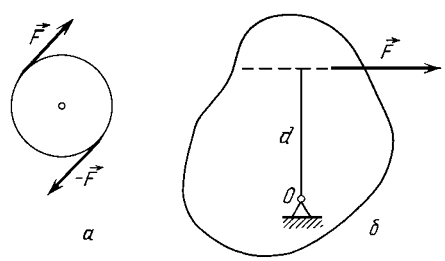

Рис. 12

ния вращения,— например, считается положительным, если сила вызывает вращение тела по часовой стрелке. Момент силы характеризует ее вращательное действие по отношению к выбранной оси. Из определения момента видно, что вращательное действие силы а) не меняется при перемещении силы вдоль линии ее действия, б) возрастает при удалении линии действия силы от оси вращения и в) обращается в ноль, если линия действия силы проходит через ось вращения. Условие равновесия тела с осью вращения O состоит в том, что алгебраическая сумма моментов всех сил, действующих на тело, относительно оси O должна равняться нулю (*правило моментов*).

Пример 11. Рассмотрим *равновесие рычага* — системы, состоящей из двух материальных точек m_1 и m_2, соединенных жестким невесомым стержнем AB, шарнирно закрепленным в точке O. По правилу моментов алгебраическая сумма моментов сил тяжести $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$ должна равняться нулю (плечо силы реакции опоры $\vec{N}$ равно нулю, так как она проходит через ось). Отсюда получаем условие равновесия рычага: $m_1g|AO| = m_2g|BO|$ или $m_1/m_2 = |BO|/|AO|$.

Общее условие равновесия тела состоит в выполнении двух условий: 1) сумма сил, действующих на тело, должна равняться нулю и 2) сумма моментов относительно любой оси также должна равняться нулю (для неподвижного тела каждая ось может рассматриваться как неподвижная ось вращения). Назовем *равнодействующей* сил, действующих на тело, силу, равную векторной сумме этих сил и имеющую такое же вращательное действие на тело, как и все силы, действующие вместе.

Пример 12. Найдем равнодействующую двух сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ в следующих случаях (рис. 13):

а) линии действия $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ пересекаются;

б) $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ параллельны;

в) $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ антипараллельны и имеют различные модули;

г) $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ антипараллельны и равны по модулю (*пара сил*).

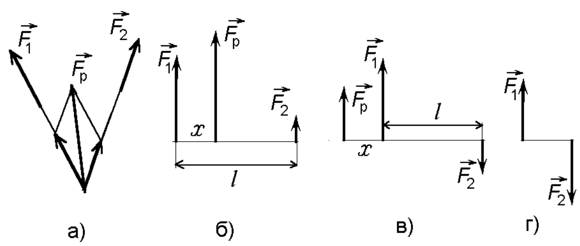

Рис. 13

В случае а) силы надо переместить в точку их пересечения, после чего найти их векторную сумму. В случае б) линия равнодействующей лежит между линиями действия сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, ее положение определяется уравнением $F_1x = F_2(l-x)$ (сравните с условием равновесия рычага). В случае в) линия действия равнодействующей лежит вне линий действия сил, со стороны большей силы (на рис. 13в это $\vec{F}_1$), ее положение определяется условием $F_1x = F_2(l+x)$. Видно, что чем меньше отличаются силы по модулю, тем дальше лежит равнодействующая. В случае г) сумма сил равна нулю, и поэтому их нельзя заменить одной равнодействующей.

▶ **Центр тяжести.** При любой ориентации тела (или системы тел) в однородном поле тяжести равнодействующая сил тяжести проходит через одну и ту же точку тела, которую называют *центром тяжести*. Положение центра тяжести может быть найдено из условия, что сумма моментов сил тяжести относительно любой проходящей через него оси равна нулю. Часто положение этой точки удается определить разбиением тела на части простой формы.

Пример 13. Найдем центр тяжести плоского однородного треугольника. Разобьем треугольник на тонкие полоски, параллельные одной из сторон. Центр тяжести каждой полоски лежит в ее середине. Значит, мы заменили треугольник набором точек, лежащих на его медиане. Следовательно, центр тяжести должен лежать на этой медиане. Повторяя рассуждение для каждой из сторон, приходим к выводу, что центр тяжести лежит на пересечении медиан.

§ 3. Законы сохранения в механике

▶ **Импульс.** *Импульсом* $\vec{p}$ *тела* (материальной точки) называется произведение массы m на скорость $\vec{v}$: $\vec{p} = m\vec{v}$. Изменение импульса $\Delta\vec{p}$ за время Δt можно представить в виде $\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v}$, откуда получаем, что *второй закон Ньютона* может быть записан в виде

$$\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v} = \vec{F}\Delta t,$$

где $\vec{F}$ — равнодействующая всех сил, действующих на тело. Величина $\vec{F}\Delta t$ называется *импульсом силы* $\vec{F}$.

Импульсом $\vec{p}$ *системы*, состоящей из n материальных точек m_1, $m_2, \ldots, m_n$, движущихся со скоростями $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ соответственно, называется сумма импульсов точек

$$\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n.$$

▶ **Закон сохранения импульса.** Рассмотрим систему, состоящую из двух точек m_1 и m_2, имеющих скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Обозначим через $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ внешние силы, действующие на точки m_1 и m_2 соответственно, а силы взаимодействия $\vec{F}_{12}$ (сила, с которой точка m_1 действует на точку m_2) и $\vec{F}_{21}$. Тогда из второго закона Ньютона следует, что

$$m_1\Delta\vec{v}_1 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_{21})\Delta t,$$
$$m_2\Delta\vec{v}_2 = (\vec{F}_2 + \vec{F}_{12})\Delta t.$$

Из третьего закона Ньютона имеем $\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}=0$. Поэтому, складывая уравнения, получаем

$$\Delta\vec{p} = m_1\Delta\vec{v}_1 + m_2\Delta\vec{v}_2 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)\Delta t \tag{8}$$

Видно, что импульс системы изменяется только под действием внешних сил.

Пример 14. Вычислим силу, которая действует на изогнутый под углом 90° участок трубы сечением S, если по трубе течет вода со скоростью v. Для изменения импульса воды на нее со стороны трубы должна действовать сила, равная $\vec{F} = \Delta\vec{p}/\Delta t$, где $\Delta\vec{p}$ — изменение импульса воды за время Δt. Масса воды, прошедшей через изгиб за это время, равна $\Delta m = \rho_{\text{в}} v S \Delta t$, а изменение скорости этой массы воды равно $v\sqrt{2}$ и направлено по биссектрисе угла (рис. 14). Значит, изменение импульса $\Delta\vec{p}$ направлено по биссектрисе и равно $|\Delta\vec{p}| = \sqrt{2}\rho_{\text{в}} S v^2 \Delta t$, а сила, действующая на воду, равна $F = \sqrt{2}\rho_{\text{в}} S v^2$ и тоже направлена по биссектрисе. Сила реакции воды $\vec{F}_{\text{р}}$, приложенная к трубе, действует в обратном направлении.

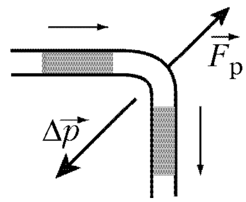

Рис. 14

Закон сохранения импульса выполняется в следующих случаях.

1. Если система *замкнута*, т.е. на точки m_1 и m_2 не действуют внешние силы, то импульс системы сохраняется: $\Delta\vec{p} = 0$, или

$$\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \text{const}.$$

Этот вывод не изменится, если $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ не равны нулю, но равна нулю их сумма.

2. Если внешние силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ *перпендикулярны некоторой оси* x (пример — сила тяжести), то проекция импульса на это направление сохраняется: $\Delta p_x = 0$, $p_x = \text{const}$.

3. Если внутренние силы $\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{21}$ имеют *ударный или взрывной* характер, т.е. в течение короткого интервала времени Δt достигают больших (по абсолютной величине) значений, а внешние силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ остаются ограниченными ($F_i \ll F_{12}$; $i = 1, 2$), то изменением импульса системы за время Δt можно пренебречь и считать, что на интервале времени Δt импульс системы сохраняется: $\vec{p} = \text{const}$. Отметим, что в этом случае, в отличие от случая 1, импульс сохраняется лишь на малом промежутке времени Δt.

Закон сохранения импульса выполняется в трех приведенных выше случаях для систем, состоящих не только из двух, но и из любого числа тел.

▶ **Центр масс.** Центр масс системы, состоящей из n материальных точек m_1, m_2, …, m_n, положение которых задается радиус-векторами $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, …, $\vec{r}_n$ — это точка, положение которой задается радиус-вектором

$$\vec{r}_{\text{цм}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}. \tag{9}$$

Тело произвольной формы можно представить как совокупность материальных точек и определять его центр масс по этой же формуле. Центр масс обладает многими замечательными свойствами:

1. Взяв производную по времени от уравнения (9), получим, что импульс системы равен произведению массы системы m на скорость центра масс:

$$\vec{p} = m\vec{v}_{\text{цм}}.$$

Если импульс сохраняется, то центр масс движется с постоянной скоростью.

2. Изменение импульса системы $\Delta\vec{p}$ равно, с одной стороны, $m\Delta\vec{v}_{\text{цм}}$, а с другой стороны, произведению результирующей внешней силы $\vec{F}$ на Δt (см. уравнение (8)). Значит, движение центра масс подчиняется уравнению

$$\vec{F} = m\vec{a}_{\text{цм}}.$$

Видно, что движение центра масс определяется только *внешними* силами, т.е. *внутренние* по отношению к системе силы на его движение не влияют.

3. Если единственная сила, действующая на тело, приложена к его центру масс, то она не будет вызывать вращательного движения.

4. Равнодействующая сил тяжести, приложенных к точкам тела или системы, проходит через центр масс, т.е. центр масс совпадает с *центром тяжести* тела в однородном поле тяготения (см. стр. 22).

Пример 15. В качестве примера использования понятия центра масс вычислим период вращения двойной звезды, состоящей из двух звезд массами m_1 и m_2, расстояние между которыми неизменно и равно r. Центр масс этой системы расположен между звездами, на расстоянии $r_1 = m_2 r/(m_1 + m_2)$ от первой звезды (рис. 15). Так как система замкнута, то скорость центра масс постоянна, и связанная с ним система отсчета является инерциальной. В этой системе отсчета каждая звезда движется по окружности своего радиуса вокруг центра масс. Записав второй закон Ньютона для звезды массой m_1

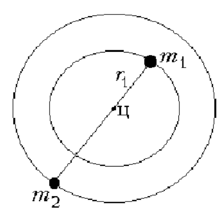

Рис. 15

$$G\frac{m_1 m_2}{r^2} = m_1\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r_1$$

и подставив r_1, найдем период вращения:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G(m_1 + m_2)}}\,.$$

Видно, что период вращения определяется полной массой звезды и не зависит от того, как она распределена между компонентами.

▶ **Реактивное движение.** Как уже отмечалось выше, внутренние силы не могут изменить характера движения центра масс системы. Однако скорости частей системы могут существенно меняться за счет действия внутренних сил. Рассмотрим управление ракетой в отсутствие внешних сил, за счет выброса реактивной струи. Пусть из сопла ракеты за малое время Δt вылетают отработанные газы массой Δm со скоростью $\vec{u}$ относительно ракеты. Запишем закон сохранения импульса системы «ракета — газы» для интервала времени Δt. В инерциальной системе отсчета, скорость которой равна скорости ракеты в начале интервала времени Δt, получаем: $M\Delta\vec{v} + \Delta m\vec{u} = 0$, где $\Delta\vec{v}$ — изменение скорости ракеты за время Δt, M — ее масса в данный момент ($\Delta m \ll M$). Отсюда находим, что $\Delta\vec{v} = -\vec{u}\Delta m/M$. *Реактивная сила*, действующая на ракету со стороны реактивной струи, определяется как произведение массы ракеты на ее ускорение: $\vec{F}_р = M(\Delta\vec{v}/\Delta t) = -\mu\vec{u}$ ($\mu = \Delta m/Deltat$ — *расход топлива*, т.е. масса топлива, выбрасываемая в единицу времени). Таким образом, выброс газов из сопла ракеты с большой скоростью приводит к увеличению скорости движения самой ракеты. При движении ракеты во внешнем поле тяжести ее ускорение определяется равнодействующей сил: $M\vec{a} = -\mu\vec{u} + M\vec{g}$.

Принцип реактивного движения позволяет совершать полеты в безвоздушном космическом пространстве.

▶ **Работа и энергия.** Состояние любой системы характеризуется скалярной величиной E — энергией, которая однозначно определяется состоянием системы. С ней связана другая скалярная величина — механическая работа A. При изменении состояния системы под действием внешних сил их работа характеризует изменение энергии:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = A.$$

▶ **Механическая работа.** Если на тело, движущееся по прямой, действует постоянная сила $\vec{F}$, то механической работой A этой силы на перемещении $\vec{s}$ называется произведение

$$A = Fs\cos\alpha = F_s s,$$

где α — угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{s}$, а F_s — проекция силы на перемещение. В СИ работа и энергия выражаются в *джоулях* (Дж = Н·м). Работа A силы $\vec{F}$ положительна, если угол α — острый, и отрицательна, если угол α — тупой. При движении тела по криволинейной траектории или изменении силы в процессе движения траекторию можно разбить на малые участки, соответствующие перемещениям $\Delta\vec{r}_i$, и считать силу постоянной на каждом из таких участков. Тогда работа A силы $\vec{F}$ равна сумме элементарных работ

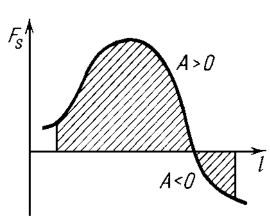

Рис. 16

$$\Delta A_i = F_{si}|\Delta\vec{r}_i| = F_{si}\Delta l_i, \tag{10}$$

где F_{si} — проекция силы на $\Delta\vec{r}_i$, а Δl_i — величина пути на этом малом участке. Поэтому работу A можно представить как площадь под кривой зависимости проекции силы на перемещение F_s от пути l (рис. 16).

▸ **Мощность.** *Средняя мощность* $P_{\text{ср}}$ силы $\vec{F}$ — это отношение работы A, совершенной силой $\vec{F}$ за время t, к интервалу времени t:

$$P_{\text{ср}} = \frac{A}{t}.$$

Мгновенная мощность P или просто *мощность* — это предел, к которому стремится средняя мощность при неограниченном уменьшении интервала времени:

$$P(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = A'(t),$$

т.е. мощность — это производная работы, рассматриваемой как функция времени. Подставляя выражение для элементарной работы из формулы (10) и учитывая, что $\Delta l/\Delta t = v$, получаем

$$P = Fv\cos\alpha = F_v v,$$

где α — угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{v}$, а F_v — проекция силы на скорость. Мощность в СИ выражается в *ваттах* (Вт = Дж/с).

▸ **Кинетическая энергия.** Чтобы изменить скорость тела, к нему необходимо приложить силу $\vec{F}$ и, следовательно, совершить работу. По второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$, где $\vec{F}$ — результирующая сила. На малом интервале времени Δt силу можно считать постоянной, а движение — равноускоренным. В этом случае, как было показано ранее (см. формулу (4)), выполняется соотношение $2a_s s = v^2 - v_0^2$, где s — величина перемещения тела за время Δt, a_s — проекция ускорения на направление движения, а v_0 и v — скорости в начальный момент времени и через Δt. Подставляя в это соотношение выражения для ускорения $a_s = F_s/m$ и работы $A = F_s s$, получаем, что

$$A = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Так как это соотношение выполняется на каждом малом участке движения, то оно будет верным и для всего движения. Видно, что работа силы $\vec{F}$ определяется только величиной начальной и конечной скоростей тела, к которому эта сила приложена. Поэтому можно ввести кинетическую энергию $E_{\text{кин}}$ — величину, зависящую только от скорости и массы тела:

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2},$$

изменение которой равно работе внешних сил:

$$\Delta E_{\text{кин}} = A$$

(*теорема о кинетической энергии*).

Пример 16. Вычислим полезную мощность брандспойта (т.е. мощность, затрачиваемую на увеличение кинетической энергии воды), если скорость вылетающей струи равна $v = 20\,\text{м/с}$, а ее сечение $s = 5\,\text{см}^2$. Кинетическая энергия воды массой Δm, выброшенной из брандспойта за время Δt, равна

$$\Delta E = \frac{1}{2}\Delta m v^2 = \frac{1}{2}(\rho_{\text{в}} s v \Delta t) v^2 = \frac{1}{2}\rho_{\text{в}} s v^3 \Delta t,$$

откуда для мощности получаем $P = \rho_{\text{в}} s v^3/2 \approx 2\,\text{кВт}$. (Средняя сила реакции струи равна $\Delta m v/\Delta t = \rho_{\text{в}} s v^2$, а множитель $1/2$ возникает потому, что средняя скорость воды при разгоне равна $v/2$.) Отметим, что при использовании этой струи для водных процедур (массажа) сила давления равна $F = \rho_{\text{в}} s v^2 \approx 400\,\text{Н}$, а давление $p = F/s = \rho_{\text{в}} v^2 \approx 4\,\text{атм}$. (См. также пример 14.)

▶ **Консервативные силы.** Пусть сила $\vec{F}$, действующая на тело, принимает определенное значение при любом возможном положении тела и не зависит от скорости и направления его движения. Такая сила называется *консервативной*, если ее работа A_{BC} при перемещении тела из точки B в точку C не зависит от траектории (или, что то же самое, работа на любой замкнутой траектории равна нулю).

1. *Работа силы тяжести* при перемещении тела по прямолинейной траектории BC равна $A_{BC} = -mg\Delta h$, где Δh — проекция отрезка BC на вертикальную ось. Формула

$$A = -mg\Delta h \tag{11}$$

верна для случая перемещения тела по любой траектории (это легко доказать, разбив траекторию на прямолинейные участки). Из уравнения (11) видно, что сила тяжести — консервативная.

2. *Работа силы упругости* при изменении растяжения упругого тела от x_1 до x_2 равна площади трапеции на графике $F_{\text{упр}_x}(x) = -kx$ (рис.17)

$$A = -\frac{kx_1 + kx_2}{2}(x_2 - x_1) = -\left(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}\right). \tag{12}$$

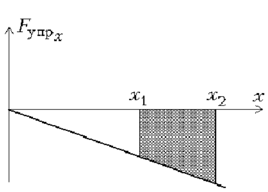

Рис. 17

Из формулы (12) видно, что работа силы упругости зависит только от начального и конечного растяжения, т.е. эта сила — консервативная.

3. *Работа силы трения* всегда отрицательная. Поэтому ее работа при перемещении по замкнутой траектории не равна нулю, т.е. сила трения — не консервативная.

▶ **Потенциальная энергия.** Работа консервативной силы однозначно определяется начальным и конечным положениями точки приложения силы. Поэтому для любой консервативной силы можно определить потенциальную энергию, зависящую только от положения тела в пространстве или от относительного расположения его частей. Приложим к телу внешнюю силу $\vec{F}^*$, уравновешивающую консервативную силу $\vec{F}$ ($\vec{F}^* = -\vec{F}$), и будем очень медленно перемещать тело из одной точки в другую. Поскольку перемещение медленное, то кинетическая энергия пренебрежимо мала и изменение энергии тела (равное работе внешней силы A^*) равно изменению потенциальной энергии $E_{\text{пот}}$: $A^* = \Delta E = \Delta E_{\text{пот}}$. Но внешняя сила была выбрана так, что $A^* = -A$, где A — работа консервативной силы $\vec{F}$, поэтому

$$\Delta E_{\text{пот}} = -A. \tag{13}$$

Для того чтобы окончательно определить потенциальную энергию, формулу (13) нужно дополнить выбором того состояния системы, в котором потенциальная энергия равна нулю.

Из формул (11)—(13) следует, что *потенциальная энергия силы тяжести* равна

$$E_{\text{пот}} = mgh,$$

где h отсчитывается от нулевого уровня, а *потенциальная энергия силы упругости* равна

$$E_{\text{пот}} = \frac{kx^2}{2},$$

где за нуль принята энергия недеформированного тела.

Замечание. Потенциальная энергия системы точек (например, твердого тела) в поле тяжести равна

$$E_{\text{пот}} = mgh_{\text{цм}},$$

где m — масса системы, а $h_{\text{цм}} = (m_1h_1 + m_2h_2 + \ldots)/m$ — высота центра масс (центра тяжести), определяемая формулой (9).

▶ **Закон сохранения механической энергии.** *Механическая энергия* системы E равна сумме ее потенциальной $E_{\text{пот}}$ и кинетической $E_{\text{кин}}$ энергий. Если в замкнутой системе действуют только консервативные силы (*консервативная система*), то механическая энергия системы сохраняется:

$$\Delta E = 0; \qquad E = E_{\text{пот}} + E_{\text{кин}} = \text{const}.$$

Действительно, согласно теореме о кинетической энергии $\Delta E_{\text{кин}} = A$, а из (13) имеем $\Delta E_{\text{пот}} = -A$. Под действием консервативных сил механическая энергия не переходит в другие виды энергии. Закон сохранения механической энергии является частным случаем общего закона сохранения энергии в любой замкнутой системе.

Рассмотрим два примера на закон сохранения энергии.

Пример 17. При *упругом ударе* шаров выполняется как закон сохранения импульса (сумма внешних сил равна нулю), так и закон сохранения механической энергии (система консервативна). Рассмотрим центральный удар шара массой m_1 о покоящийся шар массой m_2:

$$\begin{cases} m_1 v_{1x} = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x}, \\ \dfrac{m_1 v_{1x}^2}{2} = \dfrac{m_1 u_{1x}^2}{2} + \dfrac{m_2 u_{2x}^2}{2}, \end{cases}$$

где v_{1x} — скорость шара до удара, а u_{1x}, u_{2x} — скорости шаров после удара (в проекции на направление движения налетающего шара). Чтобы упростить эту систему уравнений, перенесем в левую часть каждого уравнения все члены с m_1, и поделим второе уравнение на первое (при этом мы отбрасываем решение $u_{1x} = v_{1x}$, $u_{2x} = 0$, соответствующее отсутствию удара). Получим уравнение

$$v_{1x} + u_{1x} = u_{2x}.$$

Решая его совместно с уравнением сохранения импульса, находим конечные скорости шаров:

$$u_{1x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1x}, \qquad u_{2x} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1x}.$$

Видно, что если $m_1 > m_2$, то налетающий шар продолжает движение вперед, если $m_1 = m_2$, то он останавливается, если $m_1 < m_2$, то он отлетает назад.

Пример 18. Рассмотрим соскальзывание маленького тела с вершины гладкой горки, имеющей форму полусферы радиусом R. Найдем, как меняется давление груза на горку в зависимости от высоты h. Запишем второй закон Ньютона в проекции на радиус для момента времени, изображенного на рис.18:

$$mg\cos\alpha - N = m\frac{v^2}{R}.$$

Мы использовали тот факт, что при любом, как равномерном, так и неравномерном движении по окружности проекция ускорения на радиус (нормальное ускорение) равна v^2/R. Скорость выразим из закона сохранения энергии, приравняв механическую энергию в рассматриваемый момент к энергии в верхней точке:

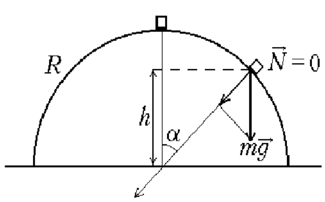

Рис. 18

$$mgR = \frac{mv^2}{2} + mgR\cos\alpha$$

(потенциальная энергия отсчитывается от центра сферы). Решая уравнения, находим

$$N = 3mg(\cos\alpha - \frac{2}{3}).$$

Видно, что при $\cos\alpha = 2/3$ сила давления обратится в ноль. Значит, в этот момент (на высоте $2R/3$) тело оторвется от поверхности горки и продолжит свободный полет по параболе.

▶ **Изменение механической энергии.** *Изменение механической энергии* под действием внешних и внутренних неконсервативных сил равно суммарной работе этих сил A:

$$\Delta E = A.$$

Например, при действии силы трения ($A < 0$) механическая энергия системы уменьшается, переходя во внутреннюю, тепловую энергию тел. Другой причиной нарушения закона сохранения механической энергии являются машины, совершающие работу за счет внутренней энергии (в том числе человек).

Если система тел является замкнутой, то работа неконсервативных сил приводит к изменению внутренней энергии тел системы. С учетом внутренней энергии закон сохранения энергии можно записать в виде

$$E_{\text{мех}1} = E_{\text{мех}2} + \Delta E_{\text{внутр}}.$$

Силы трения, сопротивления относятся к разряду *диссипативных*, т.е. их действие приводит к диссипации (потере) механической энергии за счет увеличения внутренней тепловой энергии. В этом случае $\Delta E_{\text{внутр}} > 0$, изменение внутренней энергии обозначают буквой Q и называют количеством выделившегося тепла (теплоты). Закон сохранения энергии можно записать в виде

$$E_{\text{мех}1} = E_{\text{мех}2} + Q.$$

Отметим, что количество выделившегося тепла равно работе сил трения, взятой с обратным знаком (или по модулю): $Q = \Delta E_{\text{внутр}} = |A_{\text{тр}}|$.

Пример 19. Переход механической энергии во внутреннюю происходит и при *неупругом ударе* тел. Вычислим потерю механической энергии при застревании пули массой m в деревянном бруске массой M. Скорость u пули с бруском после удара найдем из закона сохранения импульса

$$mv = (m + M)u.$$

Механическая энергия в конечном состоянии

$$E_2 = \frac{(m + M)u^2}{2} = \frac{m}{m + M}\frac{mv^2}{2}$$

меньше начальной энергии $E_1 = mv^2/2$. Увеличение внутренней, тепловой энергии равно убыли механической энергии:

$$Q = \Delta E_{\text{внутр}} = E_1 - E_2 = \frac{M}{m + M}\frac{mv^2}{2}.$$

Найденная убыль механической энергии равна модулю работы силы сопротивления при углублении пули: $Q = F_{\text{c}}s$. Измерив глубину проникновения пули s, можно вычислить величину силы сопротивления.

Если же в замкнутой системе происходят процессы, приводящие к превращению внутренней энергии тел в механическую (примеры: разрыв снаряда, адиабатическое расширение газа, работа двигателя внутреннего сгорания, работа человека и т.д.), то $\Delta E_{\text{внутр}} < 0$. Модуль этой величины называют *выделившейся энергией* и записывают закон сохранения энергии в виде

$$E_{\text{мех}1} + E_{\text{выд}} = E_{\text{мех}2}.$$

Пример 20. Вычислим, сколько внутренней (химической) энергии выделяется при разрыве снаряда массой m на два осколка массами m_1 и m_2 $(m_1 + m_2 = m)$. Известны скорости осколков $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ и угол их разлета α (т.е. угол между $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$). Начальная механическая энергия равна $E_{\text{нач}} = \frac{mv^2}{2}$, где v – скорость снаряда до разрыва, конечная механическая энергия равна $E_{\text{кон}} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}$. Начальную скорость снаряда найдем с помощью закона сохранения импульса: $m\vec{v} = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$. Применяя к векторному треугольнику (см. рис.19) теорему косинусов, получим

$$(mv)^2 = (m_1u_1)^2 + (m_2v_2)^2 - 2(m_1u_1)(m_2u_2)\cos(\tfrac{\pi}{2} - \alpha).$$

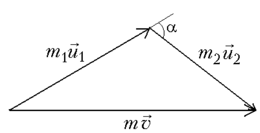

Рис. 19

Вычислив начальную и конечную энергии, выразим через них выделившуюся при разрыве энергию: $E_{\text{выд}} = E_{\text{кон}} - E_{\text{нач}}$. Увеличение механической энергии происходит в этом случае за счет внутренней химической энергии порохового заряда. (Заметим, что массу этого заряда мы считали малой по сравнению с массой осколков, и его механической энергией мы пренебрегали.)

§ 4. Механика жидкостей и газов

Главное отличие жидкостей и газов от твердых тел заключается в их *текучести*, т.е. в способности течь, растекаться, легко изменять свою форму. Отметим различия между жидкостью и газом, существенные с точки зрения механики. Первое отличие — в плотности: у жидкостей она обычно во много раз больше, чем у газов. Но главное отличие жидкости от газа состоит в ее *несжимаемости*: легко изменяя форму, она сохраняет объем и плотность практически неизменными. Жидкость может занимать часть объема сосуда или находиться в открытом сосуде; в этих случаях мы видим четко выраженную границу между жидкостью и воздухом (ее называют свободной поверхностью жидкости). Напротив, газ не обладает фиксированной плотностью: помещенный в сосуд, он заполняет весь предоставленный ему объем. Это свойство газа иногда называют *летучестью*.

В дальнейшем мы для краткости будем говорить только о свойствах жидкостей, отмечая, где нужно, отличительные особенности газов.

Гидростатика изучает свойства жидкости в состоянии покоя, равновесия.

▶ **Текучесть жидкости и сила давления.** Рассмотрим силу, действующую со стороны жидкости в состоянии равновесия на плоский участок поверхности. Это может быть как поверхность постороннего тела (например, стенка сосуда), так и воображаемая поверхность, отделяющая одну часть жидкости от другой. Оказывается, эта сила (ее называют *силой давления*) может быть направлена только по нормали к поверхности (т.е. перпендикулярно к ней). Отсутствие сил, направленных по касательной к поверхности, объясняется свойством текучести: такая сила вызвала бы движение одних слоев жидкости относительно других.

▶ **Давление.** Если разделить силу давления $F_\text{д}$ на площадь плоского участка S, то мы получим *среднее давление* на данной поверхности

$$p_\text{ср} = \frac{F_\text{д}}{S}.$$

Если уменьшать площадь участка, стягивая его к данной точке, то $p_\text{ср}$ стремится к определенному пределу, который называют *давлением в точке*, или просто *давлением*:

$$p = \lim_{S\to 0} \frac{F_\text{д}}{S}.$$

В СИ давление выражают в *паскалях*: Па = Н/м^2.

▶ **Закон Паскаля.** При определении давления в точке мы использовали воображаемую плоскую поверхность, проходящую через эту точку. Но через данную точку жидкости можно провести множество различных плоскостей. Возникает вопрос: будем ли мы каждый раз, выбирая новую поверхность, получать новое значение давления в данной точке? Ответ дает *закон Паскаля*, который утверждает, что давление в данной точке жидкости не зависит от ориентации площадки. Поэтому можно говорить о давлении в точке и не оговаривать, о какой поверхности идет речь.

Закон Паскаля является следствием того факта, что сила давления перпендикулярна площадке, т.е. следствием *текучести* жидкости. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим два произвольных направления и выделим мысленно внутри жидкости маленькую равнобедренную призму, две равные грани которой перпендикулярны этим направлениям. (На рис. 20 оба выделенных направления лежат в плоскости чертежа.) Из условия равновесия этой «жидкой призмы» следует, что силы давления на боковые грани равны. Так как площади этих граней одинаковы, то из равенства сил следует равенство давлений.

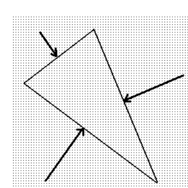

Рис. 20

Вопрос. Почему при исследовании равновесия призмы мы не учитывали силу тяжести?

Ответ. При уменьшении размеров призмы относительный вклад силы тяжести стремится к нулю. Например, при уменьшении всех размеров призмы в 2 раза силы давления уменьшатся в 4 раза, а сила тяжести — в 8 раз.

▶ **Равновесие жидкости в поле тяжести. Давление столба жидкости**. Из условия равновесия однородной жидкости в поле тяжести следуют два утверждения.

1. Давление жидкости во всех точках, лежащих на одной горизонтали, одинаково.

2. При увеличении глубины на h давление возрастает на величину $\rho g h$ (ρ — плотность жидкости).

Для доказательства выделим в объеме жидкости воображаемый тонкий цилиндр, соединяющий точки A и B (рис. 21 а,б). Рассмотрим силы, действующие на этот цилиндр вдоль линии AB. Если

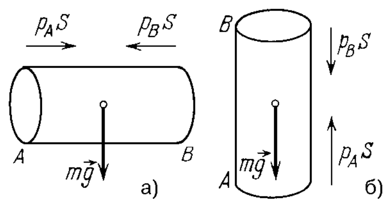

Рис. 21

точки A и B лежат на одной горизонтали (рис. 21 а), то таких сил только две: силы давления $p_A S$ и $p_B S$, приложенные к основаниям цилиндра. Из условия равновесия получаем $p_A S - p_B S = 0$, т.е. $p_A = p_B$. Если же цилиндр AB вертикален (рис. 21 б), то надо учитывать вклад силы тяжести, и условие равновесия принимает вид

$$p_A S - p_B S - mg = 0.$$

Так как плотность жидкости ρ постоянна, масса жидкости в цилиндре равна $m = \rho S h$. Получаем

$$p_A - p_B = \rho g h. \qquad (14)$$

Если давление на свободной поверхности жидкости равно p_0, то для давления на глубине h имеем

$$p(h) = p_0 + \rho g h.$$

Давление p_0 называют *внешним давлением*, а член $\rho g h$ — *давлением столба жидкости*.

Если точки A и B находятся в разных частях сосуда, но в одной и той же жидкости, то формула (14) остается верной. Для доказательства достаточно соединить эти точки ломаной линией, все отрезки которой проходят по жидкости. Если поле тяжести отсутствует (или его влиянием можно пренебречь), то давление во всех точках жидкости одинаково и равно внешнему давлению.

Иногда именно это свойство жидкости — способность передавать давление без изменений во все точки — называют законом Паскаля.

Численный пример: давление столба воды. Атмосферное давление составляет в среднем $p_0 \approx 10^5$ Па. Так как плотность воды $\rho_{\text{в}} \approx 10^3$ кг/м^3, то такое же давление создается столбом воды высотой $H_0 \approx 10$ м. К примеру, на глубине 20 м давление воды в 3 раза больше атмосферного, что представляет немалые трудности для организма ныряльщика.

Линейная зависимость давления от глубины позволяет в некоторых случаях легко определить силу давления. Самый простой случай — прямоугольная площадка, расположенная вертикально или наклонно, две стороны которой горизонтальны. Если одна из этих сторон находится на глубине h_1, а другая — на глубине h_2, то среднее давление столба воды равно

$$p_{\text{ср}} = \frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{\rho g h_1 + \rho g h_2}{2},$$

а сила давления равна $F = p_{\text{ср}} S$, где S — площадь рассматриваемой площадки. (Атмосферное давление обычно учитывать не надо, так как оно действует со всех сторон.) Например, сила давления на стенку аквариума шириной $l = 80$ см и высотой $h = 50$ см, доверху заполненного водой, равна $F = (\rho g h/2) l h \approx 980$ Н.

▶ **Миллиметр ртутного столба.** *Миллиметр ртутного столба* — внесистемная единица измерения давления, равная давлению столба ртути высотой 1 мм: 1 мм рт. ст. $\approx$ 13600 кг/м$^3 \cdot 9{,}8$ м/с$^2 \cdot 10^{-3}$ м $\approx$ 133 Па. Давление p в мм рт. ст. численно равно высоте h (в мм) воображаемого столба ртути, давление которого $\rho g h$ равно p.

▶ **Гидравлический пресс.** *Гидравлический пресс* используется для значительного увеличения силы. Его устройство основано на следующих свойствах жидкости: а) способности передавать давление во все точки; б) несжимаемости; в) пропорциональности силы давления площади участка. Налитая в пресс жидкость взаимодействует с двумя поршнями: малым площадью S_1, к которому прикладывают силу F_1, и большим площадью S_2, с которого «снимают» силу F_2 (рис. 22). При расчете пресса считают, что давление столь велико, что членом $\rho g h$ можно пренебречь, т.е. давление p одинаково во всех точках жидкости. Получаем первую формулу для расчета пресса

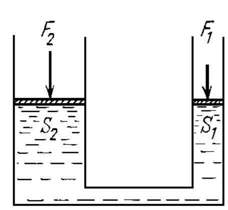

Рис. 22

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \qquad (p = \text{const}).$$

Вторая формула, связывающая между собой перемещения поршней l_1 и l_2, выражает условие идеальности пресса, т.е. отсутствие выигрыша или проигрыша в работе:

$$F_1 l_1 = F_2 l_2 \qquad (A = \text{const}).$$

Условие идеальности пресса связано с условием несжимаемости жидкости. Действительно, поделив второе уравнение на первое, получим условие сохранения объема

$$S_1 l_1 = S_2 l_2 \qquad (V = \text{const}).$$

Для решения задач можно выбирать любые два уравнения из трех.

▶ **Сообщающиеся сосуды.** *Сообщающиеся сосуды* содержат одну или несколько несмешивающихся жидкостей. Одна из жидкостей является «общей»: перемещаясь вдоль нее, можно попасть из одного сосуда в другой. Соотношение между уровнями этой жидкости в различных сосудах определяется условием ее равновесия в поле тяжести: в пределах общей жидкости давление на одном и том же уровне в различных сосудах одинаково. Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. **Одна жидкость, одинаковое внешнее давление.** В этом случае свободные поверхности жидкости находятся на одинаковом уровне. Это свойство используют для контроля уровня недоступной глазу поверхности (пример — бочка с квасом).

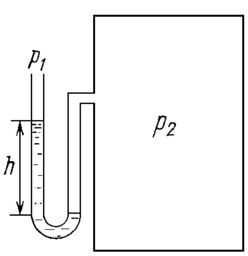

Рис. 23

Случай 2. **Одна жидкость, различные внешние давления.** Разность уровней h зависит от разности внешних давлений p_1 и p_2 (рис. 23). Приравнивая давления на том уровне, где находится нижняя свободная поверхность (внешнее давление p_2), получаем $p_2 = p_1 + \rho g h$. Если одно из давлений известно, то, измеряя разность уровней, можно найти другое, неизвестное, давление. На этом принципе основано устройство жидкостного манометра, а также ртутного барометра — *трубки Торричелли*. (*Манометром* называют любой прибор для измерения давления жидкостей и газов. *Барометр* — прибор для измерения атмосферного давления.)

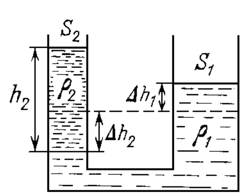

Рис. 24

Случай 3. **Две разные жидкости, одинаковые внешние давления.** Если поверх общей жидкости плотностью ρ_1 в один из сосудов налить жидкость плотностью ρ_2 ($\rho_2 < \rho_1$) высотой h_2, то уровень общей жидкости в этом сосуде понизится на Δh_2, а в другом повысится на Δh_1 (рис. 24). Чтобы найти образовавшуюся разность уровней нижней жидкости h_1 ($h_1 = \Delta h_1 + \Delta h_2$), приравняем давления в разных сосудах на том уровне, где находится граница между жидкостями:

$$p_0 + \rho_1 g h_1 = p_0 + \rho_2 g h_2, \quad \text{т.е.} \quad \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2.$$

Если сосуды имеют вертикальные стенки и известны площади их сечений S_1 и S_2, то можно найти смещение уровней Δh_1 и Δh_2. Для этого надо записать условие сохранения объема

$$\Delta h_1 S_1 = \Delta h_2 S_2$$

(из одного сосуда вытеснен объем $\Delta h_2 S_2$, в другом добавился объем $\Delta h_1 S_1$). Например, в U-образной трубке, где $S = \text{const}$, получаем $\Delta h_1 = \Delta h_2 = h_1/2$.

▶ **Атмосферное давление. Изменение давления с высотой.** Давление воздуха у поверхности Земли составляет $\approx 10^5$ Па. Хотя это давление довольно велико (сила давления на 1 см^2 равна ≈ 10 Н), обычно оно никак не проявляется, поскольку воздух действует на любой предмет со всех сторон.

Существование атмосферного давления было продемонстрировано в знаменитом опыте с магдебургскими полушариями (полушария было невозможно разъединить после того, как между ними откачали воздух) и в опыте Торричелли. Увеличивая высоту верхней, запаянной части трубки со ртутью (*трубка Торричелли*) над уровнем ртути в открытом сосуде, он наблюдал появление над ртутью в трубке безвоздушного промежутка (рис. 25). Давление в этом промежутке можно считать равным нулю (давление паров ртути ничтожно мало). По правилам сообщающихся сосудов давление столба ртути $\rho g h$ равно атмосферному давлению, т.е. высота столба h дает значение $p_{\text{атм}}$, выраженное в мм рт. ст. (730–780 мм рт. ст.; за внесистемную единицу *атмосфера* (атм) принято давление 760 мм рт. ст.).

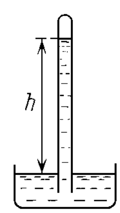

Рис. 25

Так же как и в случае жидкости, *давление воздуха изменяется с высотой* таким образом, чтобы обеспечить равновесие воздушного столба в поле тяжести. Для небольших высот, пока плотность воздуха почти постоянна, можно пользоваться формулой $p(h) = p_0 - \rho g h$. Плотность воздуха у поверхности Земли $\approx 1{,}2$ кг/м^3, значит на высоте 100 м давление уменьшается на $\approx 1{,}2\%$. Если бы плотность воздуха не менялась, то высота атмосферы составила бы ≈ 8 км. Однако газ не обладает свойством несжимаемости — с уменьшением давления уменьшается и плотность воздуха. При удалении от Земли как давление, так и плотность плавно стремятся к нулю. Четкой границы у атмосферы нет, и хотя на высоте 30–40 км давление воздуха становится во много раз меньше, чем у поверхности Земли, в разреженных слоях атмосферы (простирающихся до 1000 км!) происходит немало важных физических процессов (например, поглощение жесткого ультрафиолетового излучения в озонном слое).

▶ **Закон Архимеда**. На тело, погруженное (полностью или частично) в жидкость, действует выталкивающая сила, направленная вертикально вверх и численно равная весу жидкости в вытесненном телом объеме. *Выталкивающая сила* (*сила Архимеда*) есть результирующая всех сил давления, действующих на тело со стороны жидкости. Хотя на полностью погруженное тело жидкость действует со всех сторон, результирующая сил давления не обращается в нуль. Причина состоит в том, что в поле тяжести давление жидкости возрастает с глубиной, и силы давления, направленные вверх, оказываются больше, чем направленные вниз.

Так как зависимость давления от глубины нам известна, можно было бы рассчитать результирующую всех сил давления (т.е. доказать закон Архимеда прямым расчетом). Однако такой расчет был бы простым только для тела призматической формы (с горизонтальными основаниями). Воспользуемся иным методом: вместо погруженной части тела рассмотрим мысленно объем жидкости точно такой же формы (рис. 26). На него действуют две силы — сила Архимеда и сила тяжести, причем сила Архимеда, действующая на объем жидкости, равна силе Архимеда, действующей на тело. Но выделенный объем жидкости находится в равновесии. Значит, сила Архимеда равна силе тяжести, действующей на жидкость в вытесненном объеме:

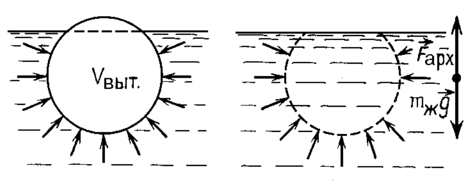

Рис. 26

$$F_{\text{арх}} = \rho_{\text{ж}} V_{\text{выт}} g. \qquad (15)$$

Вопрос. Чему равна выталкивающая сила, действующая на тело, помещенное на границе двух несмешивающихся жидкостей с разными плотностями?

Ответ. Надо мысленно разделить тело на две части по границе раздела жидкостей, по формуле (15) вычислить выталкивающую силу, действующую на каждую часть в соответствующей жидкости, и сложить эти силы:

$$F_{\text{арх}} = \rho_{\text{ж}1} V_{\text{выт}1} g + \rho_{\text{ж}2} V_{\text{выт}2} g.$$

Этот ответ может вызвать сомнения, так как, например, результирующая сил давления со стороны верхней жидкости направлена не вверх, а вниз. Действительно, этот ответ верен не для каждой из двух сил по отдельности, а для их результирующей. В этом легко убедиться, рассмотрев вместо погруженного тела воображаемый объем на границе жидкостей, который находится в равновесии.

Вопрос. Нарушится ли равновесие весов, на одной чаше которых стоит сосуд с водой, если в воду погрузить подвешенное на ниточке тело так, чтобы оно не касалось стенок и дна сосуда?

Ответ. Эта чаша весов опустится, так как по третьему закону Ньютона на воду со стороны погруженного тела будет действовать такая же по величине сила, как $F_{\text{арх}}$ (15), но направленная вниз.

Замечание. Закон Архимеда может оказаться неприменимым в том случае, если жидкость не имеет доступа ко всей поверхности погруженной части тела. Например, плотно прижатый к гладкому дну сосуда деревянный брусок не будет всплывать до тех пор, пока в пространство между ним и дном сосуда не проникнет вода.

▶ **Вес тела, погруженного в жидкость.** Если тело подвесить на динамометре и погрузить в жидкость, то показание динамометра уменьшится на величину, равную силе Архимеда. Результат такого измерения называют весом погруженного в жидкость тела:

$$P_{\text{погр}} = mg - F_{\text{арх}},$$

где m — масса тела.

Пример 21. Знаменитый пример применения закона Архимеда самим автором — легенда о том, как Архимед по просьбе царя Сиракуз определил содержание золота в короне, сделанной из золота и серебра. Для этого он взвесил корону дважды — в воздухе и после погружения в воду — и получил систему уравнений для $m_{\text{з}}$ и $m_{\text{с}}$:

$$\begin{cases} P = (m_{\text{з}} + m_{\text{с}})g, \\ \Delta P = \left(\dfrac{m_{\text{з}}}{\rho_{\text{з}}} + \dfrac{m_{\text{с}}}{\rho_{\text{с}}}\right)\rho_{\text{в}} g, \end{cases}$$

где ΔP — уменьшение веса при погружении в воду, равное выталкивающей силе. Отметим, что при использовании рычажных весов удобно взвешивать не корону, погруженную в воду, а ту воду, которую корона вытеснит из наполненного до краев сосуда, — ее вес как раз равен выталкивающей силе.

Пример 22. Выясним, как меняется энергия системы при изменении положения тела в жидкости. Рассмотрим медленный подъем камня массой m и объемом V со дна на поверхность. При перемещении на расстояние h внешняя сила совершает работу

$$A = Fh = (mg - F_{\text{арх}})h = mgh - (\rho_{\text{ж}} V)gh.$$

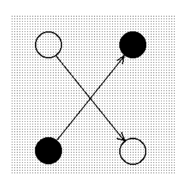

Рис. 27

Однако увеличение потенциальной энергии камня равно mgh. Откуда же берется второй член? Он соответствует уменьшению потенциальной энергии воды. Дело в том, что в том объеме, который занимает тело, вода отсутствует. Значит, при перемещении тела из нижнего положения в верхнее вода в объеме, равном объему тела, как бы перемещается вниз (рис. 27), из верхнего положения в нижнее.

▶ **Условие плавания тел на поверхности жидкости.** Плавающее тело находится в равновесии под действием двух сил: силы тяжести mg и силы Архимеда $F_{\text{арх}} = \rho_{\text{ж}} g V_{\text{выт}}$. Вытесненный телом объем — это объем погруженной его части, т.е. условие плавания имеет вид

$$mg = \rho_{\text{ж}} V_{\text{погр}} g, \qquad \text{или} \qquad m = \rho_{\text{ж}} V_{\text{погр}}.$$

Масса однородного тела плотности ρ равна ρV (V — объем тела), и условие плавания принимает вид

$$\frac{V_{\text{погр}}}{V} = \frac{\rho}{\rho_{\text{ж}}},$$

т.е. плотность тела должна быть меньше плотности жидкости (иначе тело утонет). Например, плотность льда составляет 0,9 плотности воды, из чего следует, что 90% объема айсберга скрыто под водой.

Пример 23. Выясним, на сколько изменится уровень воды в цилиндрическом сосуде площадью S при помещении в него плавающего тела массой m. Объем части сосуда, расположенной ниже уровня воды, увеличился, с одной стороны, на $S\Delta h$, а с другой — на объем погруженной части тела: $S\Delta h = V_{\text{погр}}$. Выражая $V_{\text{погр}}$ из условия плавания тела: $V_{\text{погр}} = m/\rho_{\text{в}}$, найдем изменения уровня воды $\Delta h = m/\rho_{\text{в}} S$. Полезно получить этот же результат другим способом, рассмотрев равновесие всего содержимого сосуда под действием силы тяжести и сил давления. Сила тяжести возросла на mg (масса воды не изменилась), а сила давления со стороны дна возросла на $\Delta p S = \rho_{\text{в}} g \Delta h S$. Так как равновесие не нарушилось, то $mg = \rho_{\text{в}} g \Delta h S$, откуда находим Δh.

Вопрос. В сосуде с водой плавает кусок льда. Изменится ли уровень воды, если лед растает?

Ответ. Нет, не изменится. Вода, получившаяся из льда, займет такой же объем, какой занимала погруженная часть льда.

► **Элементы гидродинамики**. Описание движущейся жидкости представляет собой значительно более трудную задачу. Жидкость обладает вязкостью, и поэтому между слоями жидкости и между жидкостью и стенками действуют силы внутреннего трения, или силы вязкости. Если при малых скоростях течение носит *ламинарный* характер, т.е. слои жидкости движутся не перемешиваясь друг с другом, то при увеличении скорости наступает сложный *турбулентный* режим течения, характеризующийся хаотическим движением жидкости и непрерывным перемешиванием слоев. Мы отвлечемся от этих трудностей и рассмотрим ламинарное течение абсолютно несжимаемой идеальной жидкости (в которой полностью отсутствуют силы трения). В каждой точке такой жидкости определено давление, не зависящее от ориентации площадки.

► **Движение жидкости по трубам**. При движении жидкости по трубе переменного сечения скорость жидкости меняется вдоль трубы, так как через любое поперечное сечение за одно и то же время Δt проходит одинаковый объем жидкости $\Delta V = S\Delta x = Sv\Delta t$.

Значит, скорости жидкости в разных сечениях трубы связаны соотношением, которое называют *уравнением неразрывности*:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2.$$

▶ **Зависимость давления жидкости от скорости течения.** Итак, при сужении трубы скорость течения возрастает. Оказывается, при возрастании скорости жидкости ее давление уменьшается (см. рис. 28; чем меньше давление, тем меньше высота жидкости в манометрической трубке). Рассмотрим объем жидкости, заключенный в некоторый момент времени между сечениями

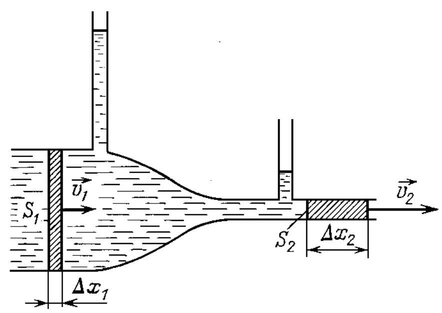

Рис. 28

S_1 и S_2. Пусть за малый промежуток времени произошло перемещение задней границы на Δx_1, а передней на Δx_2. Так как жидкость идеальная, т.е. потерь на трение нет, то работа сил давления равна изменению кинетической энергии ΔE этого объема жидкости. При подсчете ΔE достаточно заменить объем $\Delta V = \Delta x_1 S_1$, находившийся у задней границы, на такой же объем $\Delta x_2 S_2$, примыкающий к передней границе. Получаем

$$(p_1 S_1)\Delta x_1 - (p_2 S_2)\Delta x_2 = \frac{(\rho \Delta V) v_2^2}{2} - \frac{(\rho \Delta V) v_1^2}{2}.$$

Сокращая на ΔV, получаем уравнение, выражающее связь между давлением жидкости и скоростью ее течения:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}.$$

Если участки трубы находятся на разной высоте, то надо учесть изменение потенциальной энергии рассматриваемого объема жидкости. Получим *уравнение Бернулли*

$$p + \rho g h + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const}.$$

Пример 24. Если в стенке широкого сосуда на глубине h сделать маленькое отверстие, то скорость истечения жидкости будет определяться выражением:

$$v_2 = \sqrt{2gh},$$

так как давления на поверхности жидкости и в струе равны атмосферному давлению, а скорость v_1, с которой опускается уровень жидкости, пренебрежимо мала.

В случае вязкой жидкости давление вдоль горизонтальной трубы постоянного сечения не остается постоянным, так как для поддержания постоянной скорости необходима разность сил давления, компенсирующая силу трения жидкости о стенки трубы.