

## Линейность и нелинейность. Нелинейные элементы

1. Считая, что в описанных ниже системах нелинейность является слабой, представьте их уравнения движения в форме осциллятора с нелинейностью степени  $n$

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x + \mu x^n) = 0.$$

Определите в каждом случае константы  $\mu$  и  $n$ .

- Массивное колесо с моментом инерции  $I$  может вращаться вокруг
- оси, проходящей через центр колеса (рис.1). На ободе колеса укреплен груз массы  $m$  на расстоянии  $R$  от оси.

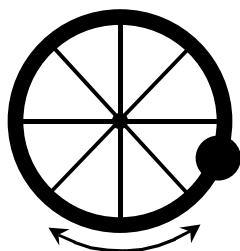


Рис.1

- Сосуд объемом  $2V_0$  разделен подвижным поршнем площади  $S$  на две равные части (рис.2). Начальное давление газа  $p_0$ . При колебаниях поршня процесс в газе считать адиабатическим. Масса поршня равна  $m$ .

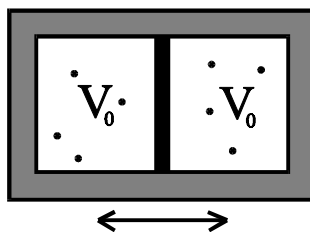


Рис.2

- Резиновый жгут натянут с силой  $F$ . Посередине жгута прикреплен шарик массы  $m$  (рис.3). Шарик может совершать лишь поперечные колебания. Жгут подчиняется закону Гука, его длина в ненатянутом состоянии  $l_0$ , коэффициент жесткости  $k$ . Колебания происходят в невесомости.

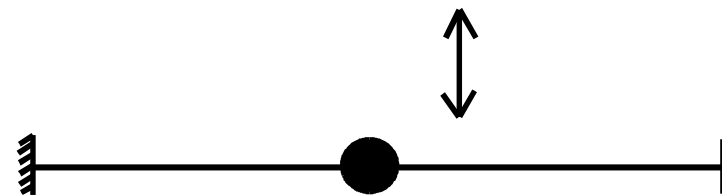


Рис.3

2. Небольшой грузик массы  $m$  прикреплен к концу легкой пружины, вращающейся в невесомости вокруг другого ее конца с угловой скоростью  $\omega$ , и совершает малые радиальные колебания около положения равновесия (рис.4).

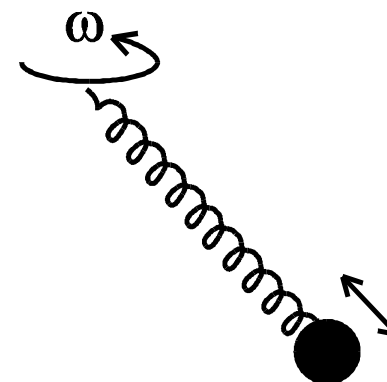


Рис.4

Длина недеформированной пружины  $l_0$ . Покажите, что в рамках модели линейной пружины с коэффициентом жесткости  $k$  такое поведение системы можно описать лишь при не очень больших значениях частоты вращения. Найдите критическую частоту  $\omega_c$ , при которой линейная модель полностью теряет смысл. Покажите, что учет нелинейности пружины позволяет дать

описание поведения системы и при  $\omega \geq \omega_c$ . Считайте, что зависимость упругой силы от деформации имеет вид  $F = kx + cx^3$ , где  $k$  и  $c$  — положительные коэффициенты. (Указание. Определите положение равновесия системы графическим методом.)

3. Шарик массы  $m$  подвешен в поле тяжести на пружине, зависимость упругой силы которой от деформации имеет вид  $F = kx + cx^3$ , где  $k$  и  $c$  — положительные коэффициенты. Получите уравнение, описывающее колебания шарика около положения равновесия и покажите, что оно содержит как кубическую, так и квадратичную нелинейности. Выясните условия, при которых свойства пружины линейны и колебания также линейны; свойства пружины нелинейны, а колебания линейны; колебания нелинейны.

4. Для описания динамики популяции в 1838 году Ферхюльст предложил следующую модель:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2.$$

Здесь  $N$  — численность популяции,  $a$  и  $b$  — коэффициенты. Найдите решение этого уравнения и постройте график зависимости  $N(t)$ . Начальное число особей равно  $N_0$ . Покажите, что если начальное число особей невелико, то можно выделить “линейную” стадию процесса, на которой исходное дифференциальное уравнение заменяется соответствующим линейным. По какому закону изменяется число особей  $N$  на линейной стадии? Через какое характерное время начнут сказываться нелинейные эффекты? К чему приведет воздействие нелинейности по истечении достаточно большого времени? Используя полученные результаты, дайте интерпретацию коэффициентам  $a$  и  $b$ .

5. Конденсатор с нелинейной характеристикой  $q = CU + aU^2$  замкнут на резистор с сопротивлением  $R$ . Получите зависимость напряжения на конденсаторе от времени, если его начальное значение равно  $U_0$ . Оцените характерное время  $\tau$ , в течение которого существенны нелинейные эффекты. Найдите закон изменения напряжения на линейной стадии процесса разряда конденсатора.

6. Получите дифференциальное уравнение, описывающее процессы в колебательном контуре, образованном емкостью  $C$  и катушкой с нелинейной индуктивностью. Магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий катушку, связан с током  $I$  соотношением  $\Phi = LI + kI^3$ .

7. Проявляет ли парамагнетик нелинейные свойства во внешнем магнитном поле? Если да, то какова природа нелинейности?

8. В соленоид с поперечным сечением  $S$  и индуктивностью  $L$  вставляют ферромагнитный сердечник. Получите выражение для потока, пронизывающего соленоид, в приближении слабой нелинейности в виде ряда, содержащего линейный и кубичный по току члены. Считайте, что ферромагнетик описывается моделью Вейса, в рамках которой нормированная намагниченность  $\eta = M/M_0$  связана с магнитным полем  $H$  соотношением

$$\text{th} \eta = \frac{T}{T_c} \eta - \frac{\mu_B}{kT} \cdot H.$$

Здесь  $T$  — температура,  $\mu_B$ ,  $k$ ,  $M_0$ ,  $T_c$  — постоянные коэффициенты, причем  $T_c$  представляет собой температуру в точке Кюри. Ферромагнетик плотно входит в соленоид, температура среды выше точки Кюри. Покажите, что при приближении температуры к точке Кюри и линейная модель, и модель слабой нелинейности оказываются несостоятельными. (Указание. Следует искать решение уравнения Вейса  $\eta = \eta(H)$  в виде соответствующего ряда по  $H$ .)

### Зависимость периода нелинейных колебаний от амплитуды

9. На рис.5 изображены три варианта симметричной потенциальной ямы, характеризующихся одним и тем же периодом линейных колебаний  $T$ . Пунктир соответствует закону  $U = kx^2$ . Возрастает или убывает период колебаний с ростом амплитуды при движении частицы в двух других ямах?

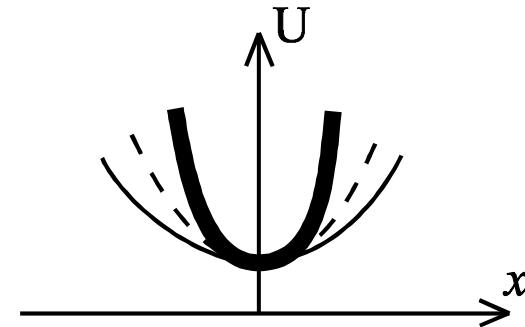


Рис.5

10. Определите зависимость периода колебаний от амплитуды при движении частицы массы  $m$  в потенциальной яме вида  $U(x) = U_0 \operatorname{tg}^2 \alpha x$  и постройте соответствующий график. Найдите период линейных колебаний и укажите его значение на графике. С какими особенностями рассматриваемой потенциальной ямы связано то, что с ростом амплитуды период колебания уменьшается по сравнению со значением, предсказанным линейной теорией?

11. Исследуйте колебания материальной точки массы  $m$  в потенциальной яме вида  $U(x) = k|x|^n$ . Определите период колебаний с точностью до константы. Покажите, что для  $n = 2$  и малые и большие колебания изохронны. Покажите, что для  $n \neq 2$  как большие, так и малые колебания неизохронны. Определите для  $n \neq 2$  характер зависимости периода колебаний от амплитуды при её стремлении к нулю.

12. Опишите, как зависит период колебаний от амплитуды для систем, представленных в задаче 1. Для случая в) укажите значения параметров, при которых период колебаний стремится к бесконечности при уменьшении амплитуды. По какому закону обращается в бесконечность период колебаний?

13. Проволочка изогнута так, что ее профиль задан функцией - цепной линией  $y = a \operatorname{ch} x$ . Ось  $x$  горизонтальна. По проволочке без трения скользит маленькая бусинка. Трение отсутствует. Получите "эффективный" потенциал  $U(x)$ , описывающий колебания бусинки. Возрастает или убывает период нелинейных колебаний с ростом амплитуды?

### Особенности спектров нелинейных систем

14. Нелинейный элемент описывается квадратичной вольт-амперной характеристикой  $I = aU + bU^2$ . Напряжение на элементе изменяется по следующим законам:

- $U = U_0 \cos(\omega t)$ ,
- $U = U_1 \cos(\omega_1 t) + U_2 \cos(\omega_2 t)$ ,
- $U = U_1 \cos(\omega_1 t) + U_2 \sin(\omega_2 t)$ ,
- $U = U_1 \cos(\omega_1 t) + U_2 \cos(\omega_2 t) + U_3 \cos(\omega_3 t)$ .

Какие частоты присутствуют в спектре тока?

15. Нелинейная пружина одним концом прикреплена к стенке (рис.6). Второй конец пружины перемещают вдоль горизонтальной оси по закону  $x = x_0 \cos(\omega t)$ . Определите спектр силы, действующей на стенку. Пружина невесома, сила упругости  $F$  зависит от координаты  $x$  по закону  $F = kx + cx^3$ . Сколько будет компонент в спектре, если координата изменяется по закону  $x = x_1 \cos(\omega t) + x_2 \cos(2\omega t)$ ?

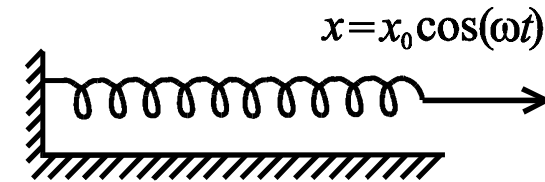


Рис.6

16. На обложке журнала "Scientific American" за июль 1963 года изображена эффектная фотография, на которой показан пучок красного цвета с длиной волны  $6940 \text{ \AA}$ , падающий на кристалл. С противоположной стороны кристалла выходит пучок синего цвета с длиной волны  $3470 \text{ \AA}$ . Каков характер нелинейности, которая приводит к подобному преобразованию света?

17. В книге Ф. Крауффорда "Волны" описан следующий опыт. Возьмем два камертона, соответствующие двум нотам с частотами 440 Гц и 523 Гц. Возбудив их, можно услышать не только две эти ноты, но и колебание, близкое к частоте некоторой третьей ноты. Частота третьей ноты 349 Гц. Объяснение этого эффекта состоит в нелинейности уха. Каков характер нелинейности, проявившейся в этом опыте?

18. Можно ли изготовить радиоприемник, содержащий только линейные элементы? Является ли нелинейным элементом громкоговоритель? Может ли быть электрический звонок линейным элементом?

19. Вольт-амперная характеристика некоторого элемента имеет вид

$$I = \begin{cases} 0, & U < 0, \\ U/R, & U \geq 0. \end{cases}$$

На элемент подано напряжение  $U = U_0 \cos(\Omega t)$ . Определите спектр тока. По какому закону спадают с ростом частоты  $\omega$  далекие фурье-компоненты

тока? С какими особенностями нелинейного преобразования связан этот закон?

20. Грузик массы  $m$  прикреплен к пружине жесткости  $k$  и может двигаться по горизонтальной плоскости без трения (рис.7).

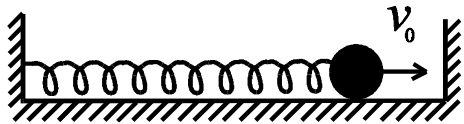


Рис.7

Грузику ударом сообщают скорость  $v_0$ . Расстояние от грузика до стенки  $l$ , удары о стенку абсолютно упругие. Исследуйте зависимость спектра колебаний системы от величины  $v_0$ . По какому закону в нелинейном режиме колебаний спадают с ростом частоты  $\omega$  далекие фурье-компоненты? С какими особенностями нелинейности системы связан этот закон?

### Мультистабильность и гистерезис

21. На рис.8 показана система, представляющая собой маятник в верхнем положении равновесия, прикрепленный к пружине. Покажите, что если пружина линейна и ее коэффициент жесткости  $k$  невелик, то положение равновесия неустойчиво. Покажите, что если пружина нелинейная, то в системе возможна бистабильность — реализуются два положения устойчивого равновесия. Считайте, что нелинейность пружины описывается соотношением  $F = kx + cx^3$ , где  $k$  и  $c$  — положительные коэффициенты, а угол отклонения маятника от вертикали мал. Длина стержня  $l$ , масса шарика  $m$ . (Указание. Получите в явном виде зависимость потенциальной энергии маятника от координаты  $x$ .)

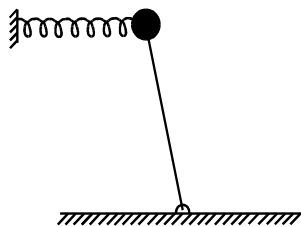


Рис.8

22. В системе, описанной в предыдущей задаче, точка прикрепления пружины  $C$  может перемещаться вдоль горизонтали влево-вправо. Изобразите график зависимости деформации пружины  $x$ , отвечающей положениям равновесия, от величины смещения точки прикрепления пружины  $x_0$ . Опишите трансформации графика зависимости потенциальной энергии  $U(x)$  при вариации  $x_0$ . Обсудите возможность гистерезиса в системе.

23. На рис.9 показана вольт-амперная характеристика полупроводникового радиотехнического элемента — туннельного диода. Такой диод включен в цепь, содержащую регулируемую э.д.с.  $\mathcal{E}$  с внутренним сопротивлением  $R$ . Графически решив уравнение, соответствующее закону Ома, покажите, что существуют такие значения  $\mathcal{E}$  и  $R$ , при которых в системе реализуется бистабильность. Рассмотрите эту же задачу аналитически, используя кубическую аппроксимацию вольт-амперной характеристики  $I = a(U - U_0)^3 - b(U - U_0) + c$ , где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — коэффициенты. Покажите, что при вариации э.д.с. бистабильность возможна лишь при выполнении условия  $bR > 1$ .

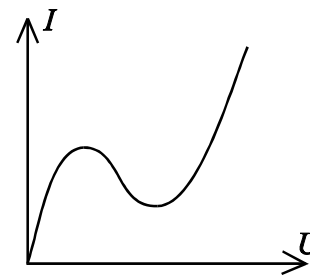


Рис.9

24. Для модели ферромагнетика Вейса постройте графики зависимости намагниченности образца  $M$  от внешнего поля  $H$ . Покажите, что эти графики имеют качественно разный вид при температуре  $T$  большей и меньшей точки Кюри. Обсудите возможность мультистабильности и гистерезиса в системе. Свяжите Ваши рассуждения с известной Вам информацией о поведении ферромагнетиков.

25. Резонатор Фабри-Перо, представляющий собой два плоскопараллельных полупрозрачных зеркала, заполнен средой с нелинейным показателем

преломления (рис.10). Свойства нелинейности таковы, что полный набег фазы волны между зеркалами зависит от интенсивности света по формуле  $\varphi = \varphi_0 + \alpha I$ , где  $\varphi_0$  и  $\alpha$  — константы,  $I$  — интенсивность выходящего излучения. Используя известное в оптике соотношение

$$I = \frac{\alpha I_0}{1 + b \sin^2(\varphi/2)}$$

где  $I_0$  — интенсивность на входе в интерферометр,  $a$  и  $b$  — константы, покажите, что в системе существует мультистабильность. Для этого постройте график зависимости интенсивности света на выходе  $I$  от интенсивности на входе  $I_0$ . Покажите на полученном графике петли гистерезиса.

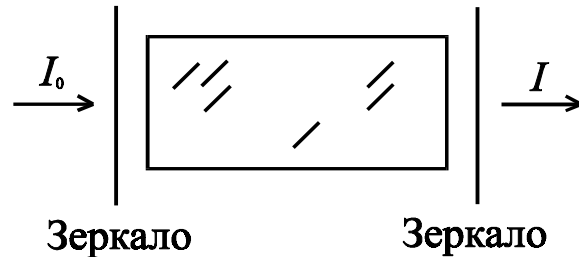


Рис.10

## Динамические системы.

### Консервативные и диссипативные системы

26. Найдите матрицу эволюции для гармонического осциллятора, позволяющую определить вектор-столбец, составленный из величин  $x$  и  $\dot{x}$ , в любой момент времени по его начальному значению. Вычислите определитель этой матрицы и покажите, что рассматриваемая система является консервативной.

27. Представьте уравнение линейного осциллятора с затуханием в “стандартной” форме, отвечающей определению динамической системы. Покажите, что рассматриваемая система является диссипативной, для чего вычислите дивергенцию соответствующего векторного поля на фазовой плоскости.

28. Одной из первых систем, для которой был обнаружен динамический хаос, являлась простая модель тепловой конвекции в атмосфере, исследованная Лоренцем (1963 г.):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}$$

Здесь  $\sigma$ ,  $r$ ,  $b$  — параметры. Установите значения параметров, при которых модель Лоренца является диссипативной.

29. Простейший генератор электромагнитных колебаний, содержащий электронную лампу, описывается уравнением Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

Представьте это уравнение в “стандартной” форме. Укажите области в фазовом пространстве, для которых имеет место сжатие фазового объема. Что можно сказать об остальных областях?

### Фазовые портреты нелинейных систем

30. Шарик массы  $m$  может колебаться в невесомости на пружине, зависимость упругой силы которой от деформации имеет вид  $F = kx + cx^3$ , где  $k$  и  $c$  — положительные коэффициенты. Постройте фазовый портрет системы. В чем его отличие от фазового портрета соответствующей линейной системы? Укажите область на фазовой плоскости, в пределах которой систему можно считать линейной.

31. Найдите уравнение фазовых траекторий для колебательного контура, составленного из конденсатора емкости  $C$  и нелинейной индуктивности, для которой зависимость магнитного потока от тока  $I$  дается соотношением  $\Phi = LI + kI^3$ . Постройте соответствующий фазовый портрет. (Указание. Найдите выражение для энергии, запасенной индуктивностью.)

32. Небольшое тело массы  $m$  может скользить без трения по горизонтальному стержню (рис.11). Тело прикреплено пружиной жесткости  $k$  к точке  $O$ , находящейся на расстоянии  $l$  от стержня. Длина пружины в нерастянутом состоянии  $l_0$ , причем  $l_0 > l$ . Найдите положения равновесия и соответствующие им значения потенциальной энергии. Постройте график функции  $U(x)$ , дающий зависимость потенциальной энергии от координаты тела, и с его помощью определите, какие из положений равновесия устойчивы. Постройте фазовый портрет системы. Укажите характерные элементы фазового

портрета: особые точки, типичные траектории, сепаратрисы. Напишите уравнение сепаратрисы в явной форме. Используя график потенциальной энергии, опишите поведение тела, отвечающее перечисленным элементам фазового портрета.

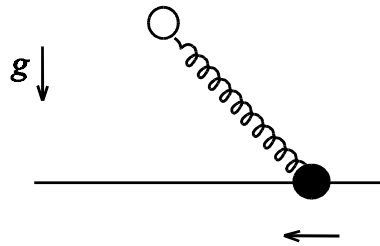


Рис.11

33. Молекула может совершать колебательные движения в поле, заданном потенциалом Леннарда-Джонса

$$U(r) = 4a \left[ \left( \frac{b}{r} \right)^{12} - \left( \frac{b}{r} \right)^6 \right].$$

Постройте фазовый портрет системы и проведите его исследование по схеме, описанной в предыдущей задаче. Масса молекулы  $m$ , параметры  $a$  и  $b$  считайте известными. Какую физическую интерпретацию можно дать для движения по сепаратрисе?

34. Шарик массы  $m$ , несущий заряд  $q$ , может без трения скользить по непроводящей спице. Спица проходит через центры двух неподвижных колец перпендикулярно их плоскости (рис.12). Кольца несут заряды противоположных знаков  $-Q$  и  $Q$  и расположены на расстоянии  $2a$  друг от друга. Радиусы колец  $R$ . Постройте фазовый портрет системы.

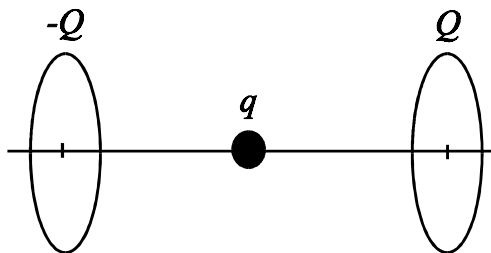


Рис.12

35. На рис.13 показан график функции  $U(x)$ . Изобразите соответствующий ему фазовый портрет консервативной системы.

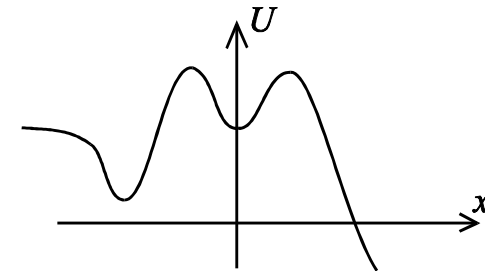


Рис.13

36. На рис.14 показан фазовый портрет системы. Изобразите соответствующий ему график функции  $U(x)$ .

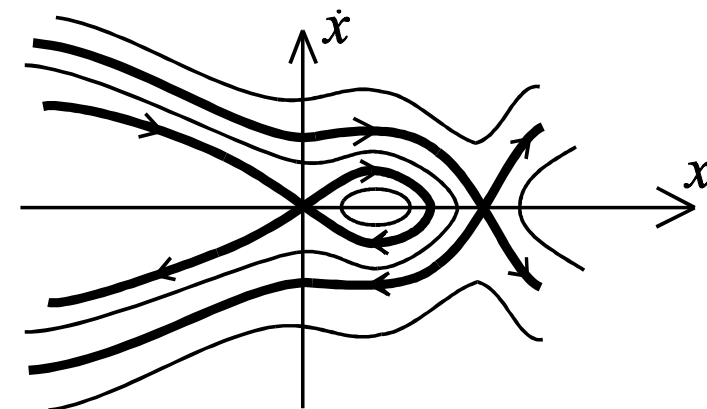


Рис.14

37. Частица движется в потенциальной яме  $U(x)$ . На фазовой плоскости представлена система фазовых траекторий, для которых полные энергии отличаются на малую величину  $\Delta E$ . Оцените расстояние между точками, в которых соседние траектории пересекают ось  $x$ . Рассмотрите два случая: когда обе траектории являются типичными и когда одна из них является сепаратрисой. Сгущаются или разрежаются фазовые траектории при приближении к сепаратрисе?

38. На рис.15 показаны три фазовые траектории. Одна из них относится к консервативной системе. Какая из двух остальных может относиться к этой же системе при включении небольшой диссипации? Ответ обоснуйте.



Рис.15

39. Частица массы  $m$  движется в потенциальной яме  $U(x)$  по некоторой типичной траектории, причем ее координата изменяется по закону  $x(t)$ . В момент времени, когда координата частицы равна  $x_0$ , а скорость — нулю, в системе появляется очень небольшое затухание. Сила сопротивления пропорциональна скорости с известным коэффициентом  $\gamma$ . Покажите, что благодаря затуханию частица не вернется в точку  $x_0$ , а пройдет от нее на расстоянии порядка

$$\Delta x \approx \frac{\gamma \int_0^T \dot{x}^2(t) dt}{U'(x_0)}.$$

Проверьте вашу оценку для случая линейной системы, когда  $U(x) = kx^2/2$ . Изобразите траектории частицы без затухания и с затуханием на фазовой плоскости.

40. На рис.16 изображена петля сепаратрисы некоторой консервативной системы. Изобразите вид сепаратрисы при включении небольшой диссипации. (Указание. Восстановите вид функции  $U(x)$  и выясните характер движения и его модификацию при включении диссипации для каждой из ветвей сепаратрисы.)

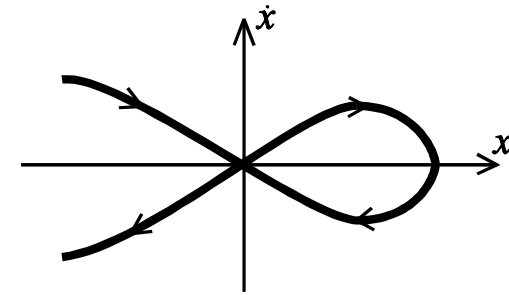


Рис.16

41. В системе, описанной в задаче 32 имеется затухание, причем сила сопротивления, действующая на шарик, пропорциональна его скорости с известным коэффициентом  $\gamma$ . Изменятся ли при введении диссипации координаты положений равновесия? Найдите значение параметра затухания  $\gamma_0$ , при котором происходит изменение типа устойчивых неподвижных точек. Постройте фазовый портрет системы для случая  $\gamma < \gamma_0$ . Сколько аттракторов имеет система? Заштрихуйте на отдельном рисунке на фазовой плоскости соответствующие бассейны притяжения. Обсудите роль сепаратрис с точки зрения определения бассейнов притяжения.

### Нелинейный осциллятор. Приближение слабой нелинейности

42. Квадратная рамка, по которой течет ток  $I$ , может вращаться без трения вокруг оси  $OO'$  (рис.17). Рамка помещена в однородное магнитное поле с индукцией  $B$ , перпендикулярное оси рамки. Покажите, что колебания рамки описываются уравнением математического маятника. Масса рамки  $m$ .

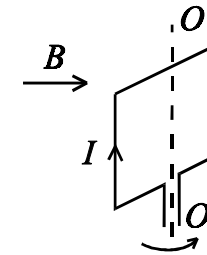


Рис.17

43. Приведите приближенно задачу о движении частицы массы  $m$  в потенциальной яме вида  $U(x) = U_0 \operatorname{tg}^2(ax)$  к модели осциллятора с кубической нелинейностью. В рамках этой модели найдите зависимость периода колебаний от частоты. Сравните полученный результат с точным (задача 10), построив соответствующую таблицу.

44. Шарик массы  $m$ , несущий положительный заряд  $q$ , может без трения скользить по непроводящей спице (рис.18).

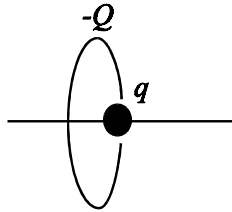


Рис.18

Спица проходит через центр неподвижного кольца перпендикулярно его плоскости. Кольцо несет отрицательный заряд  $-Q$ . Радиус кольца равен  $R$ . Представьте эту систему в виде модели нелинейного осциллятора с кубической нелинейностью. Какие особенности динамики системы такая модель передает верно, а какие нет? Оцените относительное изменение частоты колебаний по сравнению с линейным случаем, если амплитуда колебаний равна  $R/3$ .

45. С помощью модели осциллятора с кубической нелинейностью оцените угловую амплитуду колебаний математического маятника, для которой период на 1% отличается от значения, предсказанного линейной теорией.

46. С помощью модели осциллятора с кубической нелинейностью оцените отношение первой и третьей гармоник в спектре математического маятника, совершающего колебания с угловыми амплитудами  $\pi/6$  и  $\pi/2$ .

47. Найдите поправку к частоте линейных колебаний для математического маятника. Покажите, что в первом порядке по квадрату амплитуды полученная оценка согласуется с известным результатом, отвечающим аппроксимации математического маятника осциллятором с кубической нелинейностью. Оцените период колебаний с угловой амплитудой  $\pi/2$ . Сравните найденное значение с точным и оценкой для осциллятора с кубической нелинейностью. (Указание. Используйте формулу для разложения функции  $\sin(x \sin \theta)$  в ряд по функциям Бесселя.)

48. Маятник в верхнем положении равновесия прикреплен к нелинейной пружине (см. задачу 21). Нелинейность пружины описывается соотношением  $F = kx + cx^3$ , где  $k$  и  $c$  — положительные коэффициенты. Угол отклонения маятника от вертикали мал, длина стержня  $l$ , масса шарика  $m$ . Какой из универсальных моделей нелинейного осциллятора следует пользоваться при  $lk > mg$  и при  $lk < mg$ ? Получите уравнения соответствующих моделей в явном виде, оцените поправку к частоте и величину смещения центра колебаний относительно положения равновесия. Амплитуда колебаний  $A$ .

49. Молекула может совершать колебательные движения в поле, заданном потенциалом Леннарда-Джонса. Представьте такую систему в виде модели нелинейного осциллятора с квадратичной нелинейностью. Используя эту модель, оцените увеличение расстояния между молекулами, совершающими колебания с амплитудой  $a$ . На основании полученной оценки, объясните механизм теплового расширения твердых тел.

50. Найдите поправку к частоте линейных колебаний для осциллятора, описываемого уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^5 = 0.$$

## Нелинейный осциллятор. Движение вблизи сепаратрисы

51. Массивное колесо радиуса  $R = 30$  см массы  $M = 1$  кг может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр колеса. На ободе колеса укреплен груз массы  $m = 100$  г. Колесо находится в покое. Какую линейную скорость необходимо сообщить колесу, чтобы возникло движение, соответствующее сепаратрисе? Масса колеса сосредоточена в его ободе, трение отсутствует.

52. Для математического маятника  $\ddot{x} + \sin x = 0$  покажите, что движение по сепаратрисе дается соотношениями  $x = -\pi + 4 \operatorname{arctg} e^t$ ,  $v = 2 / \operatorname{ch} t$ . Используя этот результат, найдите спектр скорости ротационных и колебательных движений вблизи сепаратрисы. Для этого считайте, что закон изменения скорости дается в виде ряда приведенных выше импульсов, отстоящих на период  $T$ .

53. Математический маятник длины  $l = 1$  м отклонили на угол  $\alpha = 1^\circ$  от верхнего положения равновесия и отпустили. Оцените период возникших колебаний. Для этого найдите закон изменения координаты от времени вблизи положения неустойчивого равновесия в линейном приближении, получите



его асимптотику и “сшейте” полученное решение с законом изменения координаты от времени, который соответствует движению по сепаратрисе.

**54.** Математический маятник длины  $l = 1$  м находится в верхнем положении равновесия. Маятнику сообщили начальную скорость  $v_0 = 10^{-3}$  м/с. Оцените период колебаний. (Указание. Действуйте по аналогии с задачей оценки периода колебаний маятника, отклоненного на определенный угол.)

**55.** Для осциллятора с кубической нелинейностью, описываемого уравнением  $\ddot{x} + x - x^3 = 0$ , найдите закон изменения координаты и скорости, соответствующий движению по сепаратрисе.

**56.** Осциллятор с кубической нелинейностью, описываемый уравнением  $\ddot{x} + x - x^3 = 0$ , совершает колебательное движение вблизи сепаратрисы. Оцените период колебаний. Начальное значение координаты  $x_0$ , а начальная скорость равна нулю.

**57.** Найдите приближенно спектр скорости для осциллятора с кубической нелинейностью, совершающего колебательное движение вблизи сепаратрисы.

## Метод медленно меняющихся амплитуд

**58.** Покажите, что если  $A(t)$  — комплексная амплитуда, соответствующая действительной переменной  $x(t)$ , определенной из  $x = \frac{Ae^{i\omega_0 t} + k.c.}{2}$  при дополнительном условии  $\dot{A}e^{i\omega_0 t} + k.c. = 0$ , то справедливы следующие соотношения:

- $\dot{x} = i\omega_0(A/2)\exp(i\omega_0 t) + k.c.$ ,
- $\ddot{x} + \omega_0^2 x = i\omega_0 \dot{A} \exp(i\omega_0 t)$ .

**59.** Покажите, что для линейного осциллятора с затуханием  $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$  уравнение для комплексной амплитуды имеет вид

$$\dot{A} + \alpha A = AA^* \exp(-2i\omega_0 t).$$

Запишите укороченное уравнение для амплитуды  $A$  в предположении о медленности ее изменения во времени и решите это уравнение. Сравните закон изменения координаты осциллятора от времени, полученный методом медленно меняющихся амплитуд, с точным.

**60.** Покажите, что укороченное уравнение для комплексной амплитуды в случае диссипативного осциллятора с кубической нелинейностью  $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0$  имеет вид  $\dot{A} = -\alpha A + \frac{3}{8} \frac{i\beta}{\omega_0} A|A|^2$ . Используя его, найдите

уравнения для модуля  $a$  и фазы  $\varphi$  комплексной амплитуды  $A = ae^{i\varphi}$ . Покажите, что в отсутствие диссипации полученные уравнения позволяют найти правильное выражение для поправки к частоте линейных колебаний.

**61.** Колебательный контур состоит из последовательно соединенных индуктивности  $L$ , емкости  $C$  и нелинейного резистора, характеризующегося вольт-амперной характеристикой  $U = IR + kI^3$ . Найдите закон изменения заряда на обкладках конденсатора с помощью метода медленно меняющихся амплитуд.

**62.** В осцилляторе, параметры которого изменяются по гармоническому закону в соответствии с уравнением Матье  $\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + \varepsilon \cos(2\omega t)]x = 0$ , при условии, что  $\omega = \omega_0 + \Delta$ , где  $\Delta$  — малая величина, возможна так называемая параметрическая неустойчивость. Считая, что  $x = \text{Re}(A \exp i\omega t)$ , получите соответствующее укороченное уравнение. Покажите, что в системе действительно возможна неустойчивость и определите инкремент нарастающих колебаний. Найдите область на плоскости параметров  $\Delta, \varepsilon$ , внутри которой наблюдается параметрическая неустойчивость.

**63.** Получите укороченное уравнение, описывающее параметрическую неустойчивость в осцилляторе с кубической нелинейностью.

**64.** Получите укороченное уравнение, описывающее нелинейный резонанс в осцилляторе с кубической нелинейностью  $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = b \cos \omega t$ . Используйте подстановку

$x = \frac{Ae^{i\omega t} + k.c.}{2}$ . Покажите, что его неподвижная точка приводит к уравнению для резонансной кривой

$$\left[ \left( \omega - \omega_0 + \frac{3}{8} \frac{\beta}{\omega_0} |A|^2 \right)^2 + \frac{\alpha^2}{4} \right] |A|^2 = \frac{b^2}{4\omega_0^2}.$$

## Быстрые и медленные движения в случае сильной диссипации

65. Для линейного колебательного контура, состоящего из последовательно соединенных индуктивности  $L$ , емкости  $C$  и резистора  $R$ , получите условие сильной диссипации в явной форме.

66. Линейный осциллятор с затуханием, находящийся в положении равновесия, получил ударом скорость  $v_0$ . Найдите закон изменения координаты от времени и выполните в полученном соотношении предельный переход к случаю сильной диссипации. Постройте график зависимости координаты от времени и укажите на нем участки быстрого и медленного движения. Покажите, что закон изменения координаты на фазе быстрого движения может быть получен, если в исходном уравнении отбросить инерционный член, а на фазе медленного движения — если отбросить член, соответствующий упругой возвращающей силе.

67. Математическому маятнику длины  $l$  и массы  $m$ , находящемуся в покое в положении устойчивого равновесия в среде с сильной вязкостью (сила сопротивления пропорциональна скорости), сообщили ударом достаточно большую скорость  $v_0$ . Найдите зависимость угла отклонения маятника от времени. Оцените максимальный угол отклонения. (Указания. Выполните предварительно оценки, которые уточняют понятия “сильная вязкость” и “большая скорость” для данной задачи. Найдите решения, соответствующие фазам быстрого и медленного движений, постройте их суперпозицию и подчините ее начальным условиям.)

## Автоколебательные системы

68. В сосуд с поперечным сечением  $S_1$  из крана с сечением  $S_2$  поступает со скоростью  $V$  вода. Вода может выливаться через узкую сифонную трубку с поперечным сечением  $S_3$  (рис.19). Высота левого колена трубки равна  $h$ , а правого —  $H$ . Постройте график зависимости уровня воды в сосуде от времени и обоснуйте автоколебательный характер поведения системы. Найдите период установившихся автоколебаний. Считайте, что скорость вытекания воды через трубку определяется формулой Торричелли.

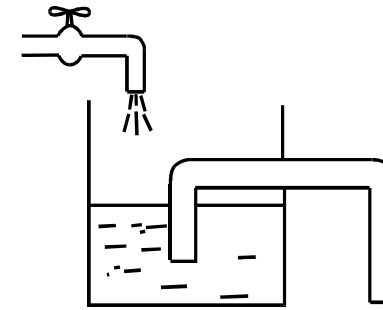


Рис.19

69. Найдите период автоколебаний в схеме с неоновой лампочкой (рис.20). Э.д.с. источника  $\mathcal{E}$ , сопротивление резистора  $R$ , емкость конденсатора  $C$ . Неоновая лампочка зажигается, если напряжение на ней превышает  $U_0$  и гаснет, если оно близко к нулю. Сопротивление горящей лампочки очень мало, а потухшей — велико.

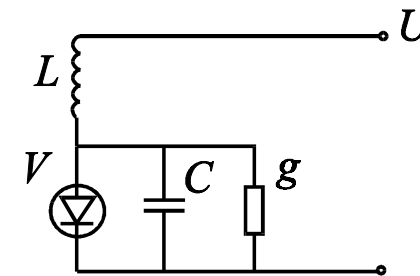


Рис.20

70. Если провести по струне скрипки смычком, то она зазвучит. Почему? К какому типу колебаний следует отнести такой процесс (вынужденные колебания, параметрические колебания, автоколебания)?

71. Почему скрипит плохо смазанная дверь?

72. Прodelайте следующий эксперимент. Пустите в ванну воду из под крана. Внесите под струю воды шарик от пинг-понга. Пронаблюдайте поведение шарика. Проведите наблюдения для разных значений скорости струи, вытекающей из крана. Опишите поведение шарика на языке теории колебаний. Попробуйте объяснить поведение шарика.

73. Почему гудят провода? (Указание. Гудение проводов является чисто механическим эффектом.)

### Уравнения Ван-дер-Поля и Рэлея

74. Каким свойством должна обладать вольт-амперная характеристика нелинейного элемента в схеме автогенератора, показанного на рис.20, чтобы автоколебания описывались уравнением Ван-дер-Поля?

75. На рис.21 изображена полученная экспериментально вольт-амперная характеристика туннельного диода. В эксперименте измерены значения максимума и минимума тока  $I_1$ ,  $I_2$  и соответствующие значения напряжения  $V_1$  и  $V_2$ . На этом диоде собран автогенератор по схеме, приведённой на рис.20. Параметры схемы  $L$ ,  $C$  и  $g$  считайте известными. Найдите величину амплитуды напряжения установившихся квазигармонических автоколебаний на туннельном диоде. При каком условии автоколебания будут квазигармоническими? Пусть величина проводимости  $g$  может регулироваться. При каком значении  $g$  возникнут автоколебания? Чему равна максимально возможная амплитуда автоколебаний?

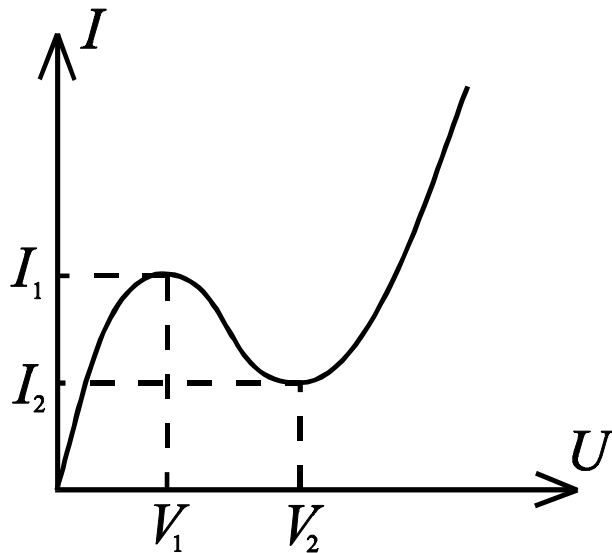


Рис.21

76. На ленте транспортера, движущегося с постоянной скоростью  $V$ , находится тело массы  $m$ , прикрепленное к пружине жесткости  $k$  (рис.22). Зависимость силы трения от относительной скорости движения ленты и транспортера при  $v > 0$  дается формулой

$$f(v) = f_1 + \frac{f_2}{1 + v^2/u^2},$$

где  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $u$  — постоянные коэффициенты. Масса груза  $m$ , коэффициент жесткости пружины  $k$ . Сопротивление воздуха очень мало. Найдите скорость транспортера  $V$ , при которой уравнение движения груза может быть приближенно приведено к уравнению Рэлея. Оцените амплитуду квазигармонических автоколебаний груза. Оцените амплитуду колебаний, для которой справедливо уравнение Рэлея.

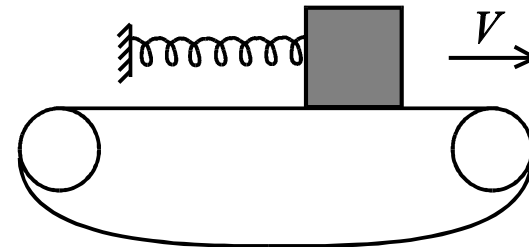


Рис.22

77. Покажите, что для уравнения Ван-дер-Поля  $\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0$  подстановка  $x = (Ae^{it} + k.c.) / 2$  после усреднения приводит к действительному укороченному уравнению  $\dot{A} = \frac{\lambda}{2}A - \frac{1}{8}A^3$ . Получите его решение при  $\lambda > 0$  и постройте соответствующий график.

78. Покажите, что решение укороченного уравнения Ван-дер-Поля в случае  $\lambda < 0$  при больших временах отвечает экспоненциальному затуханию. Соответствует ли множитель перед экспонентой начальной амплитуде колебаний? Почему?

79. В рамках метода медленно меняющихся амплитуд оцените время установления квазигармонических колебаний в системе, описываемой уравнением Ван-дер-Поля. Начальная амплитуда  $A_0$  много меньше амплитуды

установившихся колебаний. Как ведет себя время установления при приближении параметра к бифуркационному значению?

80. Для системы, описываемой уравнением  $\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu x^3 = 0$ , получите укороченное уравнение. Покажите, что оно соответствует обобщенному уравнению для бифуркации Андронова Хопфа.

81. Напишите уравнение типа уравнения Ван-дер-Поля, в котором наблюдается субкритическая бифуркация Андронова Хопфа.

82. Рассмотрите систему Ван-дер-Поля под гармоническим воздействием  $\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = b \sin \Omega t$  положив  $x = (ae^{i\Omega t} + k.c.) / 2$ , получите укороченное уравнение  $\dot{A} + i\Delta A = \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{8}|A|^2 A + \frac{b}{2}$ . Здесь  $\Delta = \Omega - 1$  - отстройка частоты внешнего воздействия от собственной. Представьте это уравнение в декартовых координатах  $(x, y)$ , считая  $A = x + iy$  и в полярных, считая  $A = a e^{i\varphi}$ , где  $a$  - действительная амплитуда,  $\varphi$  - фаза колебаний.

83. Используя укороченное уравнение для системы Ван-дер-Поля под гармоническим воздействием покажите, что в случае малого воздействия уравнения для амплитуды и фазы можно считать независимыми:

$$\dot{a} = \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{8}a^3,$$

$$\dot{\varphi} = -\Delta - \varepsilon \sin \varphi,$$

где  $\varepsilon = b/4\sqrt{\lambda}$ . Обсудите эволюцию фазового портрета при фиксированных  $\lambda$  и  $b$  с ростом  $\varepsilon$ . Какой случай соответствует режимам захвата, а какой биениям? Укажите разграничительную линию (границу языка Арнольда) на плоскости безразмерных частоты  $\Delta$  и амплитуды воздействия  $\varepsilon$ .

84. Проинтегрируйте уравнение  $\dot{\varphi} = -\Delta - \varepsilon \sin \varphi$ , описывающее фазовую синхронизацию. Обсудите его свойства с точки зрения этого явления.

### Жесткое возникновение автоколебаний

85. Покажите, что уравнение  $\ddot{x} - (\varepsilon + \mu \dot{x}^2 - \dot{x}^4)\dot{x} + x = 0$  приводится к традиционной модели автогенератора с жестким возбуждением  $\ddot{x} - (\lambda + kx^2 - x^4)\dot{x} + x = 0$ .

86. Приведите приближенно уравнение  $\ddot{x} - (\varepsilon + \cos x)\dot{x} + x = 0$  к традиционной модели автогенератора с жестким возбуждением, и найдите в этом приближении значение параметра  $\varepsilon$ , отвечающее жесткому возникновению предельного цикла.

87. Для модели автогенератора

$$\ddot{x} - (\lambda + kx^2 - x^4)\dot{x} + x = 0$$

укажите значения параметров, при которых возникающий жестким образом предельный цикл будет иметь заданный размер  $R_0$ .

88. Для модели автогенератора с жестким возбуждением

$$\ddot{x} - (\lambda + kx^2 - x^4)\dot{x} + x = 0$$

изобразите разбиение  $k, \lambda$  плоскости на области, отвечающие различным возможными типами динамики. Изобразите фазовые портреты для каждой из областей. Укажите устойчивые и неустойчивые предельные множества.

89. Для той же модели постройте графики зависимости амплитуды колебаний от параметра  $\lambda$  для  $k < 0$ ,  $k = 0$  и  $k > 0$ . В каком случае наблюдается гистерезис? Покажите, что вблизи точки жесткого перехода зависимость амплитуды от параметра  $\lambda$  имеет корневой характер. На полученных графиках покажите пунктиром зависимость амплитуды неустойчивого предельного цикла от  $\lambda$ .

90. Постройте зависимости амплитуды автоколебаний от параметра  $k$  для  $\lambda < 0$ ,  $\lambda = 0$  и  $\lambda > 0$ .

### Релаксационные колебания

91. Исследуйте релаксационные колебания, описываемые уравнением Рэлея в форме, соответствующей малому параметру перед старшей производной,  $\varepsilon \ddot{x} - (1 - \dot{x}^2)\dot{x} + x = 0$ .

- Постройте линию медленных движений на фазовой плоскости и фазовый портрет.
- Найдите диапазон изменения координаты  $x$  и скорости  $\dot{x}$  на участке медленных движений.
- Найдите связь между скоростью  $\dot{x}$  и временем  $t$  на фазе медленных движений. Постройте график зависимости скорости от времени.
- Оцените период колебаний.

92. Используя результат предыдущей задачи, получите выражение для периода релаксационных колебаний для уравнения Рэля в “стандартной” форме

$$\ddot{x} - (\lambda - \dot{x}^2)\dot{x} + x = 0.$$

93. Изобразите предельные циклы для автогенератора с жестким возбуждением, описываемого уравнением  $\ddot{x} - (\varepsilon + \mu\dot{x}^2 - \dot{x}^4)\dot{x} + x = 0$ , в случае релаксационных колебаний. Обсудите бифуркации циклов, возможные в этой системе.

94. На ленте транспортера, движущегося с постоянной скоростью  $V$ , находится тело массы  $m$ , прикрепленное к пружине жесткости  $k$ . Зависимость силы трения от относительной скорости движения груза и транспортера при  $v > 0$  дается соотношением  $f(v) = a - b \ln(1 + v^2/u^2)$ , где  $a, b, u$  — некоторые положительные константы. Коэффициент вязкого трения груза о воздух  $\alpha$ . Найдите линию медленных движений и постройте фазовый портрет в случае релаксационных колебаний. Найдите диапазон изменения скорости и координаты груза в режиме релаксационных колебаний. Описываются ли эти колебания уравнением Рэля?

## Сечение Пуанкаре. Одномерные дискретные отображения

95. Дискретное отображение  $x_{n+1} = f(x_n)$  имеет неподвижную точку  $x^*$  такую, что  $f'(x^*) \neq 0$ . Покажите, что поведение последовательности  $y_n = x_n - x^*$  в малой окрестности этой точки соответствует сходящейся геометрической прогрессии, если  $|f'(x^*)| < 1$  и расходящейся при  $|f'(x^*)| > 1$ .

96. Покажите, что отображение  $x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$  можно использовать для вычисления квадратного корня из числа  $a$  (такой способ применяли еще в древнем Вавилоне). Найдите первые пять членов последовательности  $x_n$ , порождаемой этим отображением при  $a = 2$ . Величину  $x_0$  положите равной единице. Проиллюстрируйте решение задачи с помощью итерационной диаграммы. Покажите, что неподвижная точка этого отображения устойчива. Можно ли использовать отображение  $x_{n+1} = a/x_n$ ?

97. Найдите неподвижные точки отображения  $x_{n+1} = \varepsilon \log(1 + x_n)$  и исследуйте их устойчивость. Решение проиллюстрируйте итерационной диаграммой.

98. Используя укороченное уравнение Ван-дер-Поля, исследуйте его на устойчивость. Покажите, что соответствующее дискретное отображение имеет вид  $x_{n+1} = \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 (e^{2\pi\lambda} - 1) / 4\lambda + 1}}$  и изобразите соответствующие итерационные диаграммы.

99. Получите отображение, соответствующее укороченному уравнению для колебательного контура с нелинейным резистором из задачи 61. Изобразите для него итерационную диаграмму.

100. Получите отображение, соответствующее укороченному уравнению для автогенератора с жестким возбуждением  $\ddot{x} - (\lambda + kx^2 - x^4)\dot{x} + x = 0$  в случае  $k = 0$ .

101. Постройте итерационную диаграмму для одномерного отображения, отвечающего представленным на рис.23 фазовому портрету системы и секущему лучу.

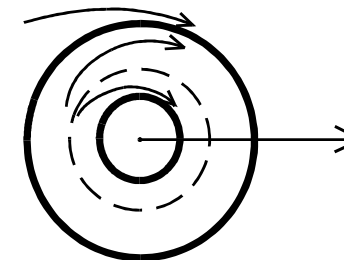


Рис.23

## Нелинейные колебания. Задачи для компьютерного исследования.

102. *Фазовые портреты нелинейных систем.* Постройте фазовые портреты перечисленных ниже систем. Для этого можно рекомендовать следующий метод: выбранный фрагмент фазовой плоскости равномерно покрывается решеткой из точек. Затем исходные уравнения решаются вперед и назад

во времени, пока соответствующие фазовые траектории не выйдут за границы области или не придут к предельному притягивающему множеству. Этот метод обеспечивает адекватное заполнение области траекториями.

*Динамические системы для исследования.*

- Осциллятор с кубической нелинейностью

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0.$$

- Осциллятор с квадратичной нелинейностью

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x + \gamma x^2 = 0.$$

- Осцилляторы из задач 32, 33, 34.

Обсудите вид фазовых портретов, характерные особенности этих портретов, их трансформации при вариации параметров, а также устройство бассейнов притяжения неподвижных точек.

**103. Нелинейные преобразования сигналов и спектров.** Исследуйте преобразование гармонического сигнала  $x = A \cos \omega t$  нелинейным элементом, т.е. рассмотрите его преобразование  $y = f(x)$  при различном выборе функции  $f(x)$ , например,  $f(x) = a + bx, x^2, x^3, x^2 + x^3, \sin x, xe^{-x^2}$ . Выберите подходящий шаг дискретизации времени и постройте графики зависимости входного и выходного сигнала от времени при разных значениях амплитуды  $A$ . Как трансформируется при увеличении амплитуды спектр выходного сигнала?

**104. Математический маятник.** Проведите следующее исследование уравнения математического маятника  $\ddot{x} + \sin x = 0$ .

- Создайте анимационную программу, демонстрирующую движение маятника.
- Постройте зависимость от времени координаты и скорости. Пронаблюдайте колебания с малой амплитудой и движение вблизи сепаратрисы. Для случая умеренных колебаний постройте другим цветом график, отвечающий решению, полученному методом медленно меняющихся амплитуд, и сравните его с точным. То же для движения вблизи сепаратрисы.
- Постройте график зависимости периода колебаний от амплитуды. Для этого используйте точное выражение через эллиптический интеграл, либо метод Эно, в рамках которого исходное уравнение численно решается до начала повторений. Постройте соответствующий

график и сравните его с выражением в приближении слабой нелинейности.

- Постройте спектр Фурье скорости колебаний и наблюдайте его эволюцию с ростом амплитуды: от малых колебаний до движения вблизи сепаратрисы. В последнем случае сравните численный результат с соответствующим аналитическим решением (задача 52).
- Постройте фазовый портрет консервативного и диссипативного осцилляторов. Пронаблюдайте его эволюцию с ростом параметра диссипации.

**105. Нелинейный резонанс.** Постройте систему резонансных кривых для нелинейного осциллятора с кубической нелинейностью  $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = b \cos \omega t$  (см. задачу 64) для различных значений параметра диссипации. Покажите другим цветом линию  $\omega = \omega_0 - \frac{3}{8} \frac{\beta}{\omega_0} |A|^2$ . Обсудите возможность гистерезиса. Чем отличаются случаи положительных и отрицательных значений параметров нелинейности  $\beta$ ? Решая численно исходное уравнение, получите фазовый портрет на плоскости  $(x, \dot{x})$ , отвечающий колебаниям осциллятора точно на частоте внешней силы. Параметры осциллятора подберите самостоятельно. Обратите внимание на трансформацию фазового портрета при изменении параметров, не описывающуюся в рамках приближения, для которого получено уравнение резонансной кривой. (Можно рекомендовать построить рядом истинный фазовый портрет установившегося движения и портрет, который восстанавливается из метода медленно меняющихся амплитуд.)

**106. Система Ван-дер-Поля.** Для осциллятора Ван-дер-Поля  $\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0$  постройте для различных значений параметра  $\lambda$  графики реализаций  $x(t)$ . Нанесите другим цветом приближенное решение, полученное методом медленно меняющихся амплитуд, и сравните его с точным (задача 77). Постройте предельные циклы и наблюдайте их эволюцию с ростом  $\lambda$ . Отметьте существование релаксационных колебаний.

**107. Жесткое возникновение автоколебаний.** Для модели автогенератора с жестким возбуждением  $\ddot{x} - (\lambda + kx^2 - x^4)\dot{x} + x = 0$  постройте все характерные фазовые портреты на  $(\lambda, k)$  плоскости, на которую предварительно нанесите линии прямой и обратной бифуркаций Андронова Хопфа и рождения цикла из сгущения фазовых траекторий, полученную с помощью метода медленно меняющихся амплитуд (задача 88). Обсудите трансформации

ции фазового портрета. Не ограничивайте исследование областью малых значений параметров. В чем особенности поведения системы вне её?

**108. Фазовая синхронизация.** Постройте семейство функций, являющихся решениями канонического уравнения  $\dot{\varphi} = -\Delta - \varepsilon \sin \varphi$ , описывающего синхронизацию, для различных начальных значений фазы (см. задачи 82, 83). Варьируя  $\varepsilon$ , наблюдайте фазовые захваты и их превращение в режимы биений. Постройте спектры реализаций  $x(t) = \cos(\Omega t + \varphi(t))$ . Обсудите их устройство в режиме биений. Определите частоту биений.

**109. Метод дискретных (точечных) отображений.** С помощью метода сечений Пуанкаре построьте одномерные отображения для двумерных потоков. Выберите прямую линию или луч, пересечение с которым определит сечение Пуанкаре. (Для этого может понадобиться предварительно построить аттрактор на фазовой плоскости.) Изучите трансформацию вида одномерного отображения при вариации параметров. Для полученного численно отображения построьте несколько итерационных диаграмм, характеризующих типичные режимы динамики.

*Системы для исследования:*

- Уравнение Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = 0 .$$

- Автогенератор с жестким возбуждением:

$$\ddot{x} - (\lambda + kx^2 - x^4)\dot{x} + x = 0 .$$

- Трехпараметрическая модель автогенератора с жестким возбуждением:

$$\ddot{x} - (\lambda + kx^2 + px^4 - x^6)\dot{x} + x = 0 .$$