

Ряд Тейлора и модели

1. Маленькое тело массы m движется по плоской кривой $y=f(x)$. Какая математическая аппроксимация этой кривой достаточна, чтобы верно задать скорость тела в некоторой точке кривой? Силы, действующие на тело в этой точке?

2. Эллипс задан уравнением $y^2/a^2 + x^2/b^2 = 1$. Получите аппроксимацию эллипса кубической параболой и параболой четвертой степени в окрестности точки $x=0$. С помощью этой аппроксимации определите ординату точки пересечения эллипса с осью абсцисс и сравните полученный результат с точным значением.

3. Свойства некоторой системы определяются функцией $f(x) = Ax + Bx^2 + C \sin x + Dx \cos x + E \operatorname{sh} x$, зависящей от пяти параметров. Найдите число существенных параметров, которые необходимы при использовании аппроксимации с помощью двух первых членов ряда Тейлора. Что означает свойство “полноты” аппроксимирующей “модельной” функции в применении к обсуждаемой задаче?

4. Точки A и B расположены на фиксированном расстоянии друг от друга. Точки соединены некоторым путем, заданным гладкой функцией $f(x)$. Используя разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора, постройте систему моделей, позволяющих охарактеризовать путь из точки A в точку B . Каково число параметров этих моделей? Расстояние AB примите за единицу.

5. Линза из материала с показателем преломления n образована плоской поверхностью и поверхностью, полученной вращением вокруг оси y некоторой четной функции $y(x)$ с единственным квадратичным экстремумом, расположенным в точке $x=0$. Обоснуйте универсальные свойства такой фокусирующей системы.

6. Консервативный осциллятор характеризуется некоторой потенциальной функцией $U(x)$. Сколько членов ряда Тейлора надо учесть в разложении функции $U(x)$, чтобы получить существенно двухпараметрическую модель консервативного нелинейного осциллятора? Постройте такую модель.

7. Используя примеры, обсудите понятие универсальности применительно к модели осциллятора с кубической нелинейностью.

8. Обсудите, что означает свойство “полноты” модели, содержащей параметры, на примере автогенератора с жестким возбуждением.

9. Отображение $x_{n+1} = f(x_n)$ задано некоторой гладкой функцией $f(x)$. Используя разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора, а также замены переменной и параметров, получите одно- и двухпараметрические универсальные модельные отображения.

Понятия типичности и коразмерности

10. Кубическое уравнение $x^3 + px + q = 0$ может иметь три, два или один действительный корень. Изобразите плоскость параметров p, q , разбитую на соответствующие области и исследуйте вопрос о типичности и коразмерности каждой из возможных ситуаций.

11. Как известно, космическая станция в поле массивной звезды может двигаться по эллипсу, параболе или гиперболе. Какие из этих траекторий относятся к случаям общего положения, а какие - к вырожденным?

12. Как могут располагаться друг относительно друга плоская кривая и касающаяся ее окружность? Какие из этих вариантов соответствуют случаям общего положения, а какие представляют собой вырожденные ситуации? Какова коразмерность последних?

13. Какие возможны ситуации взаимного расположения тора и плоскости? Какие из них соответствуют случаям общего положения, а какие являются вырожденными? Какова их коразмерность? В своих рассуждениях используйте метод малых шевелений.

14. На доске массы M лежит небольшой брусок массы m (рис.24). Коэффициент трения между доской и бруском равен μ_1 , а между доской и поверхностью - μ_2 . К бруску приложена горизонтальная сила F . Укажите все возможные качественно разные ситуации поведения системы и изобразите на плоскости параметров μ_1, μ_2 области, соответствующие различным типам динамики. Укажите возможные негрубые ситуации коразмерности один и два.

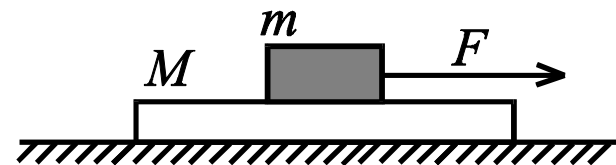


Рис.24

15. Укажите случаи общего положения, а также вырожденные ситуации коразмерности один и два на фазовых диаграммах состояния вещества.

16. Иголку бросают на плоскость, на которой (а) выделена некоторая область, (б) проведена линия, (в) поставлена точка. Пересечет ли иголка данный геометрический объект в типичном случае? Охарактеризуйте коразмерность различных возможных ситуаций.

“Игрушки” теории катастроф

17. Возьмите металлическую линейку и сожмите ее так, чтобы она прогнулась в одну сторону. Попробуйте “ликвидировать” этот прогиб, надавливая на выгнувшуюся линейку другой рукой. Пронаблюдайте происшедшую катастрофу.

18. Изготовьте машину Зимана (рис.25). Проведите эксперименты с этой машиной и определите примерное расположение области мультистабильности на плоскости x, y , где x, y - координаты конца указки.

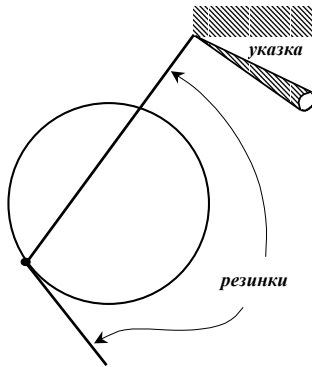


Рис.25.

19. Имеется машина Зимана со следующими параметрами: диаметр диска 1, длина резинок в нерастянутом состоянии 1, расстояние от центра диска до точки прикрепления одной резинки 4. Найдите расположение двух “кловов” области мультистабильности - ближайшего и наиболее удаленного от центра диска.

20. Рассмотрите параболическую качалку, форма которой задана уравнением $y = x^2$ (рис.26). В системе координат, привязанной к качалке, найдите

геометрическое место точек, размещение грузика в которых обеспечивает существование такого состояния равновесия, что качалка касается горизонтальной поверхности в точке x_0 . Найдите условия устойчивости этого положения равновесия. Как располагается точка потери устойчивости относительно центра кривизны параболы?

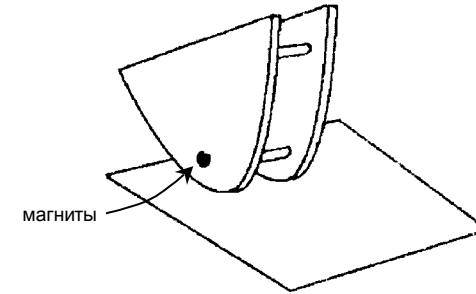


Рис.26.

21. Эволютой кривой называется кривая, представляющая собой геометрическое место центров кривизны для исходной кривой. Найдите эволюту для параболической качалки. Каковы координаты точки “клюва” на эволюте? Проинтерпретируйте эту кривую с точки зрения существования и сосуществования устойчивых состояний равновесия качалки.

22. Изготовьте качалку и приведите с ней эксперименты в духе теории катастроф.

23. Решите задачу Архимеда об устойчивости судна с параболическим профилем.

Критические точки функций одной переменной

24. Какую критическую точку имеет функция $f(x) = x(1 - \cos x)$ в точке $x=0$? Какие конфигурации функции в окрестности критической точки возникнут при введении возмущения вида px , где p - некоторый малый параметр? Все ли возможные трансформации $f(x)$ в окрестности кубической точки перегиба можно наблюдать, вводя такое возмущение?

25. Массивная платформа движется по прямой вдоль оси x со скоростью V . На платформе находится прикрепленный к пружине жесткости k груз

массы m , совершающий колебания вдоль оси x с амплитудой a . Какие критические точки может иметь функция, определяющая зависимость от времени координаты груза относительно неподвижного наблюдателя? Какие из них "более типичны"?

26. Найдите явный вид замены переменной и параметров, приводящей полином $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ к виду, не содержащему член x^3 .

27. Рассмотрите возмущение функции $f(x)=x^4$ вида px , где p - некоторый малый параметр. Какое число квадратичных экстремумов возникает при "малом шевелении" параметра p ?

28. Небольшое тело массы m может скользить без трения по горизонтальному стержню (рис.27). Тело прикреплено пружиной жесткости k к точке O , находящейся на расстоянии l от стержня. Длина пружины в нерастянутом состоянии l_0 . Как трансформируется график функции $U(x)$ при изменении параметра l ? Какие критические точки имеет функция $U(x)$? Укажите коразмерность вырожденной критической точки. Все ли возможные трансформации, характерные для снятия вырождения такой критической точки, можно пронаблюдать, варьируя l ? Как модифицировать задачу, чтобы все они стали возможны?

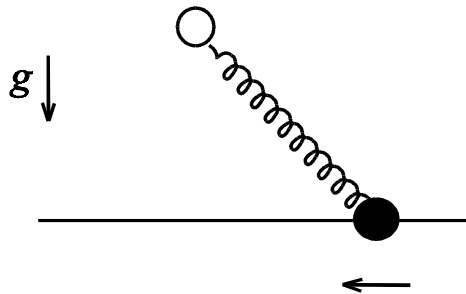


Рис.27.

29. Чему равна коразмерность критической точки x^6 на классе гладких функций?

Критические точки функций двух переменных

30. Найдите матрицу Гессе в критических точках типа "максимум", "минимум" "перевал", "обезьянье седло", "желоб" и "скрещенные желоба" и выясните, какие из них являются вырожденными, а какие нет.

31. Изобразите систему линий уровня, соответствующую всем перечисленным в предыдущей задаче критическим точкам.

32. Найдите в явном виде выражение для потенциала $\varphi(x, y)$ в системе двух параллельных нитей, несущих положительные заряды с одинаковой линейной плотностью q . Постройте картину линий уровня функции $\varphi(x, y)$ – так называемые овалы Кассини. Нити расположены на расстоянии d .

33. Какие критические точки имеет функция $\varphi(x, y)$ из предыдущей задачи? В их окрестности выделите у функции $\varphi(x, y)$ морсовскую часть, выполнив соответствующее разложение в ряд Тейлора.

34. Представьте себе тор в трехмерном пространстве x, y, z . Какие критические точки располагаются на поверхности тора, если считать, что она локально задает некоторую функцию $z(x, y)$? Какие из этих точек являются морсовскими? Рассмотрите различные ориентации тора в пространстве.

35. Какие объекты на фазовой плоскости консервативного осциллятора соответствуют морсовским седлам?

36. Докажите, что квадратичная форма четырех переменных может быть заменой переменных приведена к виду "морсовского седла".

37. К какой из канонических кубик приводится "обезьянье седло" $z = (y^3 - y^2x)$?

38. К какой из канонических кубик приводится кубическая форма $(ax + by)(x^2 - y^2)$ в случаях вырождения?

39. Укажите, какая из канонических кубик соответствует следующим полиномам: а) $x^3 - 3x^2y + 2xy^2$, б) $x^3 - 3x^2y + 6xy^2 - 4y^3$.

40. Покажите, что количество канонических "квартичных" форм от двух переменных, т.е. форм четвертой степени, бесконечно велико.

Катастрофа коразмерности один - складка

41. Как будет вести себя качалка, если прикрепить магнит в точке на границе области устойчивости, т.е. на линии складки.

42. Для системы двух проводов с током, из которых один удерживается упругой пружиной, а другой неподвижен (рис.28) покажите, что реализуется катастрофа складки, и вблизи точки катастрофы зависимость энергии от координаты может быть приведена к соответствующей канонической форме.

Величины токов I и i , коэффициент жесткости пружины k , расстояние между проводниками в отсутствие токов l .

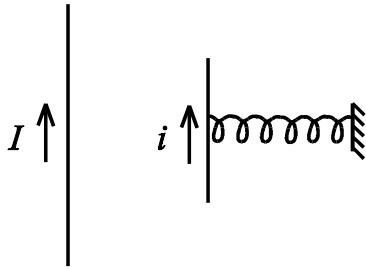


Рис.28.

43. Шарик массы m , несущий заряд q , может скользить без трения по горке, профиль которой задан функцией $y = a \ln(x^2/a^2 + 1)$, в электрическом поле напряженности E , направленном по горизонтали. Проследите за трансформацией зависимости потенциальной энергии шарика от координаты x при изменении параметра mg/qE . Определите тип катастрофы, происходящей в системе и изобразите ее многообразие.

44. В пробирке под невесомым поршнем находится идеальный газ. Поверх поршня налита ртуть (рис.29). Газ очень медленно нагревают. При этом поршень поднимается, и ртуть постепенно выливается из пробирки. При превышении некоторого значения температуры T_c происходит "катастрофа": поршень поднимается вверх и выбрасывает оставшуюся ртуть из пробирки, даже если температура газа больше не увеличивается. Установите тип наблюдающейся катастрофы и постройте ее многообразие. Атмосферное давление p_0 , начальная температура газа T_0 , длина пробирки l , первоначально газом занята часть пробирки l_0 .

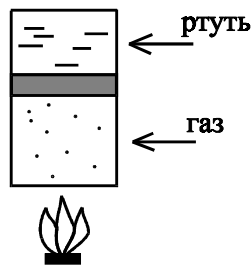


Рис.29.

Катастрофа коразмерности два - сборка

45. Шарик массы m может без трения скользить по стержню, наклоненному под углом α к горизонту. Шарик прикреплен к пружине жесткости k , второй конец которой неподвижно зафиксирован на расстоянии a от стержня в точке, принадлежащей проходящей через стержень вертикальной плоскости (рис.30). Длина пружины в нерастянутом состоянии l . Как трансформируется при изменении параметров вид зависимости потенциальной энергии от координаты шарика x , отсчитываемой вдоль стержня? Найдите линии складок и точку сборки на плоскости параметров $\alpha, l/a$.

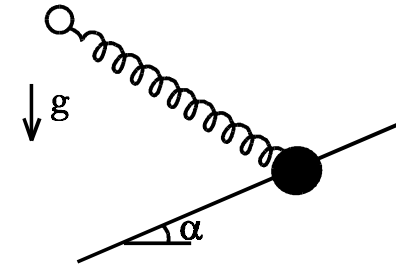


Рис.30.

46. Маленькая бусинка массы m может без трения скользить по тонкому проволочному кольцу радиуса R (рис.31). Кольцо вращают с частотой ω вокруг вертикальной оси, проходящей через плоскость кольца на расстоянии a от его центра. Проследите за трансформацией зависимости потенциальной энергии бусинки от ее координаты во вращающейся системе отсчета. Найдите линии складок и точку сборки на плоскости параметров $a, \omega^2 R/g$.

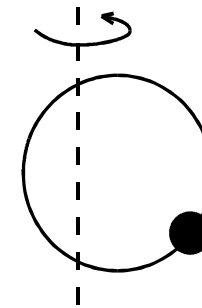


Рис.31.

47. Покажите, что в системе из задачи 22 из главы “Колебания” реализуется катастрофа сборки.

48. Изобразите поверхность, задаваемую уравнением газа Ван-дер-Ваальса в пространстве давление P , объем V , температура T и обсудите ее устройство с точки зрения теории катастроф. С помощью компьютера или калькулятора постройте линии складок и точку сборки в координатах P/P_k , T/T_k , где P_k и T_k – известные из термодинамики критические значения температуры и давления. На этом же графике постройте аппроксимацию в виде “полукубического” острия.

49. Для задачи о туннельном диоде (задача 23 из главы “Колебания”), найдите координаты точки сборки на плоскости \mathcal{E} , R и изобразите расположение вольт-амперной характеристики диода и нагрузочной прямой в различных точках в окрестности этой точки и непосредственно в ней.

50. Параметры системы, демонстрирующей катастрофу сборки, медленно изменяют так, что точка на плоскости параметров обходит сборку 5 раз (рис.32а). Сколько жестких переходов происходит в системе? Для маршрутов на рис.32б-г, изобразите качественно зависимость состояния системы от параметра, отсчитываемого вдоль этих маршрутов.

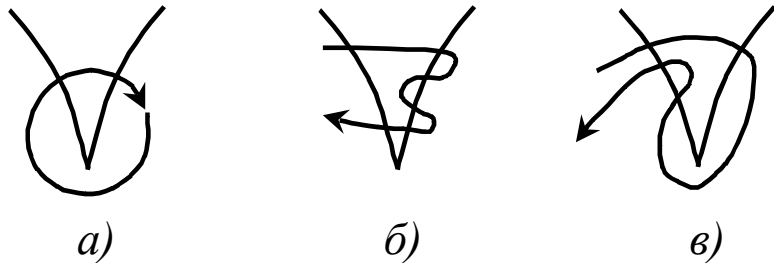


Рис.32

51. Как будет вести себя качалка, если прикрепить магнит в точке сборки?

52. Чем отличаются свойства нелинейного осциллятора в случаях, когда зависимость потенциальной энергии от координаты имеет катастрофу сборки и двойственной сборки?

53. Изобразите различные возможные проекции тора на плоскость. Укажите точки сборки, которые возникают при таком проецировании. Обсудите проблему устойчивости сборок при малом шевелении тора.

54. Покажите, что траектория точки на ободе колеса, катящегося без проскальзывания, имеет острия с характерной “полукубической” особенностью.

Катастрофа коразмерности три - ласточкин хвост

55. Для катастрофы ласточкин хвост, соответствующей потенциальной функции $U(x) = x^5/5 + ax^3/3 + bx^2/2 + cx$, изобразите проекции линий сборок на плоскости (a, b) , (a, c) и (c, b) . Для каждой из проекций укажите показатель степени, который отвечает полученным остриям.

56. Покажите, что в сечениях катастрофы ласточкин хвост плоскостью $a=const$ линии складок подходят к точкам сборки по универсальному “полукубическому” закону.

57. Изобразите характерные конфигурации потенциальной функции $U(x)$, отвечающие сечению катастрофы ласточкин хвост плоскостью $a=const$ для $a > 0$.

58. На рис.33 изображены несколько маршрутов на плоскости параметров b, c , отвечающих сечению катастрофы ласточкин хвост плоскостью $a=const$. Изобразите, как происходит трансформация потенциальной функции $U(x)$ при движении вдоль этих маршрутов.

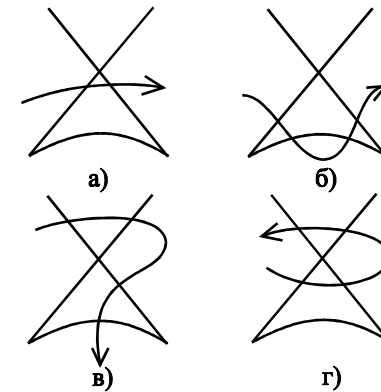


Рис.33.

59. Пусть потенциальная функция задана полиномом $U(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx$. Какие геометрические объекты образуют в пространстве параметров A, B, C, D складки, сборки, “линия самопересече-

ний", ласточкин хвост? Дайте ответ, не проводя детальных вычислений, а используя понятие коразмерности.

60. Покажите, что для полинома $U(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx$ точка катастрофы ласточкин хвост реализуется при выполнении условий $B = 2A^2/5$, $C = 2A^3/25$, $D = A^4/125$.

61. В системе из задачи 22 из главы "Колебания" шарик маятника несёт заряд q . На расстоянии a от него (в ситуации, когда пружина не растянута) помещен неподвижный заряд $-Q$. Нарисуйте график потенциальной энергии $U(x)$ в зависимости от координаты шарика. Сколько критических точек может иметь функция $U(x)$? Покажите, что в системе может наблюдаться катастрофа ласточкин хвост и найдите соответствующие значения параметров.

62. Для предыдущей задачи получите выражение для потенциальной энергии шарика в виде полинома пятой степени, используя разложение в ряд Тейлора электростатической энергии как функции координаты x . Используя эту аппроксимацию, получите значения параметров, соответствующих точке катастрофы ласточкин хвост. Сравните полученные значения с точными. Можно ли считать полученное приближенное решение приведением катастрофы ласточкин хвост к канонической форме? Почему?

Каспоидные катастрофы в двумерных системах

63. По горизонтальной плоскости может кататься шарик массы m , несущий положительный заряд q . Под плоскостью на расстоянии a от нее и на расстоянии l друг от друга помещены два отрицательных заряда Q_1 и Q_2 (рис.34). Найдите значения параметров, отвечающих точке катастрофе самой высокой коразмерности (какая это катастрофа?) и получите уравнение, задающее линии уровня потенциальной энергии шарика в этой точке. Решите эту же задачу в случае, если заряды Q_1 и Q_2 положительны.

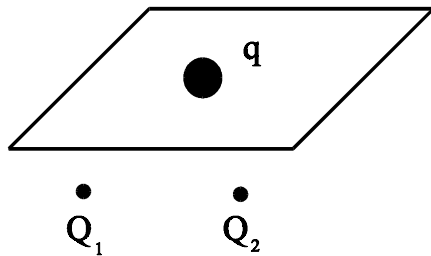


Рис.34

64. Придумайте физическую систему, для которой в точке катастрофы сливаются максимум и два седла.

65. Изобразите картину линий уровня потенциальной энергии $U(x, y) = \frac{x^4}{4} + a\frac{x^2}{2} + bx + y^2$ в различных характерных точках плоскости параметров вблизи точки сборки.

66. Решите ту же задачу для функции $U(x, y) = \frac{x^4}{4} + a\frac{x^2}{2} + bx - y^2$. Укажите линию на плоскости параметров, соответствующую нелокальному бифуркационному множеству.

67. Установите вид сепаратрис для системы линий уровня в двумерных системах в точках катастроф типа ласточкин хвост и бабочка.

68. Движение консервативного осциллятора задается потенциальной функцией $U(x)$. Какие катастрофы - каспоидные или омбилические - могут происходить с линиями уровня на фазовой плоскости осциллятора? Будут ли "проблемы" с приведением этих катастроф к каноническим формам?

69. Найдите замену переменных, приводящую к канонической форме катастрофы сборки функцию $U(x, y) = y^3/3 - x^2y - 2y^2$. Каков «тип» этой сборки (характерный для задачи 64 или 65)?

70. Рассмотрите функцию $U(x, y) = (x^2 - 1)y - \varepsilon x$. Найдите критические точки на плоскости x, y и "высоту", на которой они расположены. Постройте систему линий уровня для случаев $\varepsilon = 0$, $\varepsilon < 0$, $\varepsilon > 0$, укажите сепаратрисы и покажите, что наблюдается нелокальная бифуркация.

71. Рассмотрите следующую систему: вертикально висящий маятник, несущий заряд q , расположен посередине между двумя вертикальными нитями, несущими заряд с линейной плотностью λ_1 и λ_2 . Колебания могут происходить и в поперечном направлении. Найдите потенциальную энергию маятника как функцию координат x, y . Отклонения маятника от вертикали считайте малыми. Изобразите характерный потенциальный рельеф и картину линий уровня. Покажите, что при $\lambda_1 = \lambda_2$ имеет место нелокальная бифуркация и изобразите соответствующую картину линий уровня. Покажите, что соответствующая бифуркационная линия при вариации параметра $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ обрывается в точке, отвечающей сборке того же типа, что и в задаче 65. Изобразите соответствующую эволюцию линий уровня.

Катастрофа коразмерности три – эллиптическая омбилика

72. Для эллиптической омбилики, заданной потенциальной функцией $U(x,y) = x^2y - y^3/3 + a(y^2 + x^2) + bx + cy$, получите уравнение для линий сборок в пространстве параметров a, b, c .

73. Найдите выражение для потенциальной функции $U(x,y)$ в точке сборки $a=1, b=0, c=3$. Каков “тип” (см. задачи 64 и 65) этой сборки?

74. Покажите, что линия складок в сечении $a=1$ является гипоциклоидой - кривой, получаемой при движении точек катящейся окружности по внутренней части другой окружности.

75. Исследуйте эволюцию критических точек на плоскости переменных x, y при движении вдоль линии $a=1, b=0$. (Нарисуйте предварительно линию складок, точки сборки и выбранный маршрут.) Покажите, что

а) при $c < -1$ имеются два седла, которые с ростом c двигаются по линии $y=-1$ навстречу друг другу;

б) при $c=-1$ в точке $x=0, y=1$ рождаются минимум и седло;

в) при $-1 < c < 3$ эти седло и минимум расходятся по оси x в противоположные стороны, а два исходных седла продолжают сближаться;

г) при $c=3$ два седла и минимум сливаются в точке $x=0, y=-1$;

д) при $c > 3$ остаются два седла, которые расходятся по оси x с ростом c .

Дайте соответствующие иллюстрации на плоскости переменных x, y .

76. Изобразите нелокальное бифуркационное множество в пространстве параметров a, b, c .

77. Объясните симметрию бифуркационного множества эллиптической омбилики. Для этого покажите, что повороты системы координат x, y на 120° и 240° соответствуют аналогичным повторам на плоскости параметров b, c . (Указание. Используйте комплексное представление преобразования поворота.)

78. Имеется система трех одинаковых параллельных, равномерно заряженных нитей. Нити располагаются так, что их пересечение с перпендикулярной плоскостью образуют равносторонний треугольник. Покажите, что электростатический потенциал в такой системе как функция координат на этой плоскости имеет критическую точку, отвечающую росту катастрофы эллиптической омбилики.

79. Придумайте, как можно использовать предыдущую задачу, чтобы реализовать систему с катастрофой эллиптической омбилики. (Указание. Используйте маятник, несущий заряд Q).

Катастрофа коразмерности три – гиперболическая омбилика

80. Проведите исследование гиперболической омбилики, заданной потенциальной функцией $U(x,y) = x^2y + y^3/3 + a(y^2 - x^2) + bx + cy$, по следующей схеме:

а) получите выражение для критических точек;

б) найдите уравнение для линий складок в сечении пространства параметров плоскостью $a=1$;

в) найдите точки сборки в этом сечении и напишите уравнение для линий сборки в пространстве параметров;

г) выясните расположение и характер критических точек на плоскости x, y при $a=1, b=0$ и различных c ;

д) сделайте выводы об устройстве бифуркационного множества.

Катастрофы и теория упругости

81. Оцените критическую нагрузку для стального стержня длины 20 см и диаметром 5 мм.

82. Найдите критическую нагрузку для обычной стальной линейки. На сколько надо превысить эту нагрузку, чтобы линейка выгнулась на 2 см?

83. Получите выражение для энергии упругого стержня как функции амплитуды “выпучивания” a , считая что конфигурация стержня описывается выражением $y(s) = af(s)$, где $f(s) = s(s-L)/4$. Здесь s – координата, отсчитываемая вдоль стержня. Найдите с помощью этого приближения критическую нагрузку и соответствующий степенной закон для амплитуды a . Сравните результаты с полученными для случая $f(s) = \sin \pi s/h$.

84. Попробуйте угадать без вычислений структуру выражения для энергии Эйлера стержня в двухмодовом приближении с точностью до членов четвертого порядка. Представляет ли оно собой элементарную катастрофу Тома?

85. Найдите критическую нагрузку в задаче о выпучивании Эйлерова стержня в многомодовом приближении в случае, когда он лежит на упругом основании с заданным коэффициентом жесткости.

86. Найдите значения коэффициента жесткости основания, при котором теряют устойчивость сразу две моды.

87. Найдите критические значения нагрузок потери устойчивости мод в случае отсутствия упругого основания. В каком порядке моды теряют устойчивость? Покажите, что соответствующие критические значения соответствуют простому пересчету длины стержня и объясните, почему это так.

Катастрофы и физика фазовых переходов

88. Изобразите линии фазовых переходов жидкость-газ, жидкость-твердое тело, газ-твердое тело, тройную и критическую точки вещества на P, T плоскости. Покажите характерные конфигурации зависимости потенциала Гиббса от параметра порядка во всех характерных точках такой диаграммы.

89. Используя теорию Ландау, найдите скачок теплоемкости C_V в точке фазового перехода.

90. Изобразите качественно зависимость термодинамического потенциала от параметра порядка для системы с метастабильным фазовым переходом 1-го рода.

91. Дайте интерпретацию закона соответственных состояний в духе теории катастроф.

92. Какой параметр в задаче о выпучивании стержня является аналогом параметра порядка в физике фазовых переходов?

93. Для модели Гинзбурга-Ландау с так называемым трикритическим термодинамическим потенциалом $\Phi(\eta) = \frac{1}{6}\eta^6 + \frac{a}{4}\eta^4 + \frac{b}{2}\eta^2 + h\eta$ найдите линии фазовых переходов 1-го рода на b, h плоскости при $a = 1$. Здесь h – параметр порядка. Как они трансформируются при вариации a ?

Каустики и волны

94. На борту корабля, стоящего у причала, можно наблюдать медленно меняющуюся картину бликов, возникающую из-за отражений солнечного света от воды. Обсудите свойства яркости этой картины с точки зрения теории катастроф.

95. При отражении от цилиндрической поверхности возникает яркая каустика и еще более яркая точка сборки. Проведите экспериментальное исследование этой каустики (в частности определите положение точки сборки) и сравните с результатами теоретического анализа.

96. Пронаблюдайте картину, возникающую при прохождении света через “гофрированное” стекло. Что будет происходить при шевелении стекла?

97. Обсудите известные вам аберрации линз с позиций теории катастроф.

98. В узких заливах океанские волны могут образовывать каустики. Обсудите проблему безопасности плавания в таких заливах.

99. В момент времени $t=0$ волновой фронт имеет форму параболы $y=x^2$. Получите уравнение линии, задающей положение волнового фронта в момент времени t . Скорость распространения волны c . Когда волновой фронт претерпит катастрофу ласточкин хвост?

100. Какие катастрофы волновых фронтов акустических волн наиболее опасны с точки зрения возможных разрушений?

Колебания

101. Найдите зависимость частоты линейных колебаний от параметров для механической системы из задачи 45. Покажите, что в точках катастроф частота обращается в ноль, а период – в бесконечность (феномен “смягчения мод”).

102. То же самое для системы из задачи 46.

103. Исследуйте вид поверхности $\omega^2 = \omega^2(a, b)$, дающей зависимость частоты линейных колебаний от параметров для нелинейного осциллятора в окрестности катастрофы сборки $\ddot{x} + ax + b + x^3 = 0$. Сколько листов имеет эта поверхность? Чему это отвечает с точки зрения конфигурации потенциальной функции? Какие листы соответствуют устойчивым, а какие неустойчивым движениям? Каков смысл линии самопересечения? Покажите, что в окрестности линии складки и точки сборки частота зависит от параметров по степенным законам и найдите соответствующие показатели.

104. Почему опрокидыванию корабля предшествует долгопериодическая качка?

105. Как наблюдать феномен смягчения мод с помощью качалки?

106. В книге Постона и Стюарта “Теория катастроф” читаем: “Значит, ненагруженный стержень издает “тиньк”, при умеренной нагрузке “бумм”, а

вблизи точки выпучивания – “буинньккк”. Это великолепно известно опытным инженерам, а неискушенного читателя должно предостеречь от предпочтения конструкций в тоне сопрано басовым.” Обсудите эти утверждения с позиций теории катастроф и феномена смягчения мод.

107. При исследовании нелинейного резонанса в осцилляторе

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = b \cos \omega t$$

методом медленно меняющихся амплитуд, как известно, получается следующее уравнение для резонансной кривой:

$$\frac{b^2}{4\omega_0^2} = \left[\left(\omega - \omega_0 - \frac{3}{8} \frac{\beta}{\omega_0} |a|^2 \right)^2 + \frac{\alpha^2}{4} \right] |a|^2,$$

где a – амплитуда установившихся колебаний (задача 64 из раздела “Колебания”). Покажите, что подходящей заменой переменных это соотношение приводится к виду

$$A = [(\Delta - B)^2 + 1] B.$$

Здесь A – безразмерная амплитуда колебаний, B – безразмерный квадрат амплитуды воздействия, Δ – безразмерная отстройка частоты от собственной. Приведите последнее соотношение к канонической для катастрофы сборки форме. Найдите уравнение линии складок и координаты точки сборки на плоскости Δ, B . Изобразите многообразие катастрофы и ее бифуркационное множество. Дайте им интерпретацию с точки зрения колебаний осциллятора и вида резонансных кривых.

108. Какая катастрофа в укороченном уравнении автогенератора с жестким возбуждением отвечает точке, в которой бифуркация Андронова-Хопфа из прямой превращается в обратную?

109. Для канонического уравнения для фазы колебаний

$$\dot{\varphi} = -\Delta - \varepsilon \sin \varphi,$$

описывающего синхронизацию, введите эффективный потенциал $U(\varphi)$ такой, что $\dot{\varphi} + U'(\varphi) = 0$. Как трансформируется потенциал при вариации ε ? Какие катастрофы наблюдаются? Дайте в этих терминах интерпретацию режимам захвата и биений.

Катастрофы. Задачи для компьютерных исследований

110. Многообразия каспидных катастроф. Постройте многообразия катастроф в следующих случаях:

- Для катастрофы сборки в канонической форме,
- Для задачи 45 о прикрепленном к пружине шарике, скользящем вдоль стержня,
- Для канонической формы катастрофы ласточкин хвост в случае нескольких различных значений параметра a .

111. Бифуркационные множества простейших систем. Постройте бифуркационные множества катастроф в следующих случаях:

- Для задачи 49 о туннельном диоде на плоскости E, R ,
- Для газа Ван-дер-Ваальса,
- Для канонической формы катастрофы ласточкин хвост,
- Для задачи 60, демонстрирующей катастрофу ласточкин хвост. Используйте подходящие безразмерные координаты и параметры.

112. Машина Зимана. Постройте многообразие катастроф для машины Зимана. Диаметр диска и длины нерастянутых резинок положите равными 1, а расстояние от неподвижной точки прикрепления резинки до центра диска – 2. Предварительно получите строгое выражение для энергии упругой деформации резинок как функции угла поворота диска.

113. Эллиптическая качалка. Постройте многообразие катастроф эллиптической качалки, или поверхность, отвечающую семейству нормалей эллипса. Используйте стандартное уравнение для нормалей. Попробуйте провести исследование других кривых.

114. Колебания осциллятора в потенциале с двумя ямами. Постройте фазовые портреты консервативного и диссипативного осциллятора $\ddot{x} + \alpha \dot{x} + U'(x) = 0$ в потенциале, отвечающем катастрофе сборки $U(x) = x^4/4 + ax^2/2 + bx$. Создайте программу, демонстрирующую вид потенциала и фазовые портреты в различных точках плоскости a, b . Предварительно нанесите на нее линии складок и точку сборки. За эволюцией картинок удобно наблюдать, если изменение параметров (координаты выделенной на экране точки) осуществлять с помощью “мыши”.

115. Ласточкин хвост. Изучите эволюцию формы потенциала для катастрофы ласточкин хвост. Для этого предварительно получите на экране дисплея соответствующее бифуркационное множество. Создайте программу,

которая демонстрирует вид потенциала в точке, отмеченной на экране с помощью "мыши". Выберите несколько значений параметра a .

116. Трансформации эквипотенциалей. Над поверхностью океана помещена материальная точка массы m . Точка располагается на высоте h над невозмущенным уровнем океана. Постройте "карту" эквипотенциалей гравитационного поля в такой системе. Проследите за ее трансформациями при вариации безразмерного параметра m/gh^2 . (Ось x направьте вдоль невозмущенной поверхности воды.) Что можно сказать о форме возмущенной поверхности воды? Изобразите несколько характерных рельефов потенциальной функции $U(x,y)$.

117. Каспидные катастрофы в двумерных системах. Изучите эволюцию линий уровня для катастрофы сборки, заданной потенциальной функцией $U(x,y)=x^4/4+ax^2/2+bx+cy^2$. Предварительно получите на экране дисплея соответствующее бифуркационное множество. Создайте программу, которая демонстрирует вид эквипотенциалей в точке, отмеченной на экране. Создайте программу, которая демонстрирует рельеф потенциальной функции в выделенной точке.

Решите аналогичную задачу в случае потенциальной функции $U(x,y)=x^4/4+ax^2/2+bx-y^2$.

118. Эллиптическая омбилика. С помощью компьютера постройте картину линий уровня потенциальной функции $U(x,y)$ для катастрофы эллиптической омбилики в случае $a=1$. Подберите характерные точки на плоскости параметров b и c , на которой предварительно получите соответствующее бифуркационное множество. Обратите внимание на точки сборки. Постройте несколько потенциальных рельефов.

Решите эту же задачу в случае $a=0$.

Постройте бифуркационное множество в трехмерном пространстве параметров.

119. Гиперболическая омбилика. Решите задачу 118 для случая гиперболической омбилики при $a=1$ и при $a=0$. Постройте бифуркационное множество это катастрофы

120. Гладкие кривые с особенностями. Постройте простейшие кривые, имеющие особенности в виде точек сборки с характерными полукубическими острями: циклоиду, гипоциклоиду, астроида. Пополните этот список самостоятельно.

121. Каустики в чашке. В цилиндрическом сосуде (например, в чашке с кофе) можно наблюдать яркую линию с еще более ярким острием. Эта линия – каустика – представляет собой огибающую световых лучей, отраженных от

цилиндрической поверхности. Проведите компьютерное моделирование такой каустики. Рассмотрите далее ситуации, когда имеется точечный источник света, который может быть расположен как внутри, так и вне отражающей цилиндрической поверхности. Изучите трансформации каустик. Решите аналогичную задачу в случае эллиптической отражающей поверхности.

122. Миражи. В атмосфере температура изменяется с высотой и, соответственно, изменяется показатель преломления. Проведите компьютерное исследование траекторий световых лучей в такой среде. Используйте известные из оптики законы зависимости показателя преломления воздуха от температуры. Рассмотрите некоторые простейшие законы изменения температуры с высотой. Охарактеризуйте наблюдаемые картины в терминах теории катастроф.

123. Радуга. Найдите в справочнике данные по коэффициенту преломления света в воде в диапазоне от красного цвета до фиолетового и воспроизведите на компьютере расчет траекторий лучей света в капле воды (теория радуги Декарта). Пронаблюдайте образование каустик. Определите, под какими углами по отношению к направлению на солнце наблюдатель видит красное и фиолетовое кольца радуги. Используйте цветную графику.

124. Каустики в электронном потоке. Одно из известных устройств микроволновой электроники – клистрон – содержит две близко расположенные металлические сетки, на которые подано переменное напряжение $U=U_0 \cos \omega t$. Через сетки со скоростью v_0 летит пучок электронов (рис.35). Проведите компьютерное исследование пространственно-временных диаграмм для электронов в области за сетками. Охарактеризуйте полученные результаты в терминах теории катастроф.

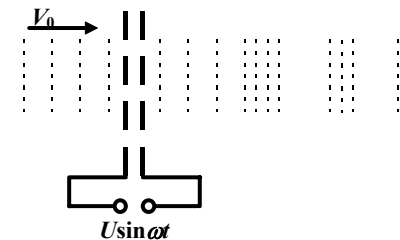


Рис.35.