Глава III

ЭЛЕМЕНТЫ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

§ 1. Динамическое истолкование законов Кеплера

1. В п. 1 предыдущей главы мы отметили, что среди динамических задач, в которых приходится рассматривать системы свободных точек, первое место по важности занимают задачи небесной механики. В этой главе, чтобы дать первые и наиболее элементарные понятия этой ветви механики, возьмем снова кеплеровы движения, уже изучавшиеся в § 8 гл. II т. I, т. е. движения планет вокруг Солнца. Эти движения характеризуются тремя законами Кеплера, формулировку которых здесь целесообразно повторить:

1. *Орбиты планет суть эллипсы, в одном из фокусов которых находится Солнце.*

2. *Площади, описанные радиусом-вектором, идущим от Солнца к планете, пропорциональны временам, в которые они были пройдены.*

3. *Квадраты времен, в течение которых различные планеты пробегают свои орбиты (квадраты времен обращения), пропорциональны кубам больших полуосей этих орбит.*

В т. I (гл. II, § 8, п. 54) было показано, что первые два закона Кеплера достаточны для того, чтобы характеризовать движение отдельной планеты P, поскольку они приводят к заключению, что ускорение планеты P постоянно направлено к Солнцу и имеет величину

$$\frac{c^2}{p}\frac{1}{r^2}, \tag{1}$$

где c есть постоянная площадей (удвоенная секторная скорость планеты), p — параметр эллиптической орбиты и r — расстояние SP планеты от Солнца.

Обозначая через m массу планеты и применяя динамическое определение силы, которое дается основным уравнением динамики $F = ma$, мы можем здесь сказать, что *планета движется так, как если бы она притягивалась Солнцем с силой (центральной), направленной от планеты к Солнцу, величина которой есть*

$$\frac{c^2}{p}\frac{m}{r^2}, \tag{2}$$

т. е. обратно пропорциональна квадрату расстояния.

С другой стороны, обозначая через a и T большую полуось орбиты и время обращения планеты, мы нашли (т. I, гл. II, п. 51)

$$\frac{c^2}{p}=4\pi^2\frac{a^3}{T^2}, \tag{3}$$

откуда на основании третьего закона Кеплера заключаем, что коэффициент пропорциональности

$$k=\frac{c^2}{p}, \tag{4}$$

который появляется в выражении (2) для силы притяжения Солнцем отдельной планеты, будет один и тот же для всех планет.

§ 2. Прямая задача Ньютона

2. Динамическое истолкование законов Кеплера, данное выше, естественно приводит к задаче: *определить движение материальной точки P, притягиваемой неподвижным центром S с силой, величина которой обратно пропорциональна квадрату расстояния.*

Эта задача как частный случай входит в более общую задачу, рассмотренную в § 2 предыдущей главы. Поэтому мы сразу же можем сказать, что речь идет *о плоском движении*, для которого существуют одновременно *интеграл живых сил и интеграл площадей* относительно центра силы S (гл. II, п. 3).

Приведя здесь эти результаты, полученные из общей теории § 2, мы дадим далее независимую аналитическую трактовку частной задаче, сформулированной выше, как ввиду важности самой задачи, так и ввиду дальнейших исследований, которые мы намерены с ней связать; при этом мы будем возвращаться к общей теории всякий раз, когда для этого представится удобный случай.

3. Условимся принимать за единицу массы массу движущейся точки P и обозначим через k величину силы притяжения, действующей на массу, равную единице и находящуюся на расстоянии, равном единице, от центра силы. Тогда составляющая $\varphi(r)$ силы притяжения единичной массы на расстоянии r по направлению прямой SP будет иметь вид

$$\varphi(r)=-\frac{k}{r^2}.$$

Если определить аддитивную постоянную так, чтобы потенциал в бесконечности равнялся нулю, то он определится равенством

$$U(r)=\frac{k}{r}. \tag{5}$$

Тогда оба первых интеграла: интеграл живых сил и интеграл площадей, выраженные, в полярных координатах r, θ с полюсом в центре силы, примут вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) &= \frac{k}{r} + E, \\ r^2\dot{\theta} &= c, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где, как обычно, E и c обозначают соответственно постоянную энергии и постоянную площадей.

Определение движения тем самым сведено к интегрированию системы первого порядка (6) (которое, как мы знаем из общей теории, выполняется в квадратурах).

С качественной точки зрения полезно отметить в соответствии с общими замечаниями п. 4 предыдущей главы, что из интеграла живых сил, т. е. из первого из уравнений (6), вытекает неравенство

$$\frac{k}{r} \geqslant -E.$$

Из этого неравенства следует, что, если полная энергия отрицательна, то во время движения радиус-вектор всегда остается меньше или, самое большее, равен $-k/E$; этим ограничивается область, внутри которой должна располагаться орбита.

4. Круговые орбиты. Исследование случая, когда орбита оказывается круговой ($r = \mathrm{const}$), исчерпывается прямыми и элементарными рассуждениями. В этом случае из закона площадей следует постоянство скорости на орбите, так что движение будет равномерным.

Если теперь через a обозначим радиус орбиты и через n (постоянную) угловую скорость радиуса, то скорость на орбите v будет равна an, а ускорение (целиком центростремительное) будет равно

$$\frac{v^2}{a} = an^2.$$

Сравнивая это значение с абсолютной величиной силы притяжения $\varphi(r) = -\frac{k}{r^2}$, при $r = a$, получим

$$\frac{k}{a^2} = an^2. \tag{7}$$

Отсюда заключаем, что для заданной действующей силы круговое движение оказывается возможным на некотором расстоянии a от центра силы, лишь бы угловая скорость имела одно из двух значений, определяемых равенством (7).

Из последних двух равенств следует

$$v^2 = \frac{k}{a}, \tag{8}$$

откуда заключаем, что кинетическая энергия $v^2/2$ единичной массы равна половине соответствующей величины k/a потенциала; та и другая остаются постоянными в течение всего движения.

Мы придем к тем же выводам, если рассмотрим этот вопрос как задачу об относительном равновесии. Действительно, материальную точку, движущуюся по окружности радиуса a с угловой скоростью n, можно рассматривать как находящуюся в покое относительно осей, вращающихся с той же угловой скоростью. Поэтому активная сила притяжения (центростремительного радиального) k/a^2 и центробежная радиальная сила n^2a должны находиться в равновесии (т. I, гл. XVI, п. 6), т. е. мы приходим как раз к равенству (7).

Укажем, наконец, еще значения, которые в этом частном случае принимают обе постоянные — полной энергии и площадей:

$$E = \frac{v^2}{2} - U = -\frac{1}{2}\frac{k}{a},$$

$$c = a^2\dot{\theta} = a^2 n = \pm\sqrt{ka}.$$

Из первой формулы, если принять во внимание равенство (8), следует, что *в случае круговой орбиты полная энергия отрицательна* и равна живой силе, взятой с обратным знаком.

5. Вырожденные орбиты. В качестве второго частного случая рассмотрим тот, когда обращается в нуль постоянная c площадей.

Исключая возможный случай постоянного совпадения точки P с центром силы S (т. е. случай, когда r все время равно 0), найдем на основании закона площадей $\dot{\theta} = 0$, или же $\theta = \text{const}$, так что движение будет происходить по прямой, проходящей через S, и закон изменения радиуса r как функции времени на этой прямой определяется интегралом живых сил, который здесь сводится к уравнению

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = \frac{k}{r} + E. \tag{9}$$

Мы пришли к простейшему уравнению известного вида (8′) гл. I, § 6, поэтому можем применить здесь результаты, полученные там для общего случая. С этой целью мы будем различать два случая в зависимости от знака постоянной энергии E:

a) $E < 0$. Так как правая часть равенства (9) не должна быть отрицательной, то постоянно будем иметь $r \leqslant -k/E$, так что *движение будет происходить полностью на конечном расстоянии.*

Если начальная скорость $\dot{r}_0$ направлена к центру или равна нулю (последний случай может представиться только при $r_0 = -\frac{k}{E}$), то движущаяся точка, не изменяя направления на обратное, достигнет центра сил S в конечное время, а скорость по величине будет возрастать беспредельно (гл. I, п. 27).

С астрономической точки зрения такую возможность можно истолковать как катастрофическое столкновение двух небесных тел P и S, после которого нет смысла следить за явлением, отыскивая поведение r при последующем возрастании t [1]).

Если, наоборот, $\dot{r}_0 > 0$, то движущаяся точка сначала удаляется от S на расстояние $2a$, определяемое равенством

$$2a = -\frac{k}{E} \tag{10}$$

(единственный нуль функции в правой части равенства (9)), а затем возвращается обратно и движется к S, как было описано выше.

б) $E \geqslant 0$. В этом предположении правая часть равенства (9) при $r > 0$ уже не исчезает и остается всегда положительной, так что движение не может изменить своего направления (гл. I, п. 27).

Если начальная скорость направлена к центру ($\dot{r}_0 < 0$), то движущаяся точка за конечное время достигнет центра силы, как и в случае а).

Если же, наоборот, $\dot{r}_0 > 0$, то из равенства (9), принимая во внимание предположение $E \geqslant 0$, видим, что в течение всего движения будет

$$\dot{r} \geqslant \sqrt{\frac{2k}{r}},$$

а так как

$$\dot{r}\sqrt{r} = \frac{2}{3}\frac{d}{dt}(r^{3/2}),$$

то из неравенства следует

$$\frac{d}{dt}(r^{3/2}) \geqslant 3\sqrt{\frac{k}{2}}.$$

Поэтому величина $r^{3/2}$, а вместе с ней и сам радиус-вектор r возрастает беспредельно вместе с t, а движущаяся точка будет беспредельно удаляться от центра по своей прямолинейной траектории.

6. Орбиты общего вида. Предполагая теперь $c \neq 0$, из второго из равенств (6) (интеграл площадей) получим, что θ есть монотон-

[1]) Отметим, что в некоторых исследованиях по небесной механике, чтобы углубить качественное исследование движения, оказывается полезным также рассмотрение аналитического продолжения интеграла и после столкновения. См., например, Levi-Civita, Sur la régularisation du problème des trois corps, *Acta math.*, т. 42, 1919.

ная и, следовательно, однозначно обратимая функция времени, так что в первом из равенств (6) (интеграл живых сил) за независимую переменную можно принять вместо t угол θ. Чтобы выполнить эту замену переменного, достаточно по обыкновению рассматривать в нем r как сложную функцию от t через посредство θ и исключить $\dot{\theta}$ при помощи интеграла площадей. Таким образом, мы придем к дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2=\frac{2E}{c^2}+\frac{2k}{c^2}\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2}, \tag{11}$$

определяющему полярное уравнение $r=r(\theta)$ орбиты общего вида рассматриваемого движения; оно представляет собой вместе с тем частный случай основного уравнения (10) предыдущей главы, так как справедливо только для определенного закона действия силы.

В общей теории мы полагали $r=\frac{1}{u}$, но в настоящем случае мы можем достигнуть еще большей формальной простоты, если вместо r примем за новую независимую переменную

$$\chi=\frac{1}{r}-\frac{k}{c^2}, \tag{12}$$

вследствие чего уравнение (11) примет вид

$$\left(\frac{d\chi}{d\theta}\right)^2=\frac{2E}{c^2}+\frac{k^2}{c^4}-\chi^2. \tag{11'}$$

Постоянная

$$\frac{2E}{c^2}+\frac{k^2}{c^4}$$

в силу того же равенства (11') есть сумма квадратов и необходимо будет положительной, за исключением лишь того случая, когда χ тождественно обращается в нуль, что в силу зависимости (12) может случиться только при $r=c^2/k$, т. е. в случае круговой орбиты, разобранном в п. 4.

Следовательно, можно положить

$$\frac{2E}{c^2}+\frac{k^2}{c^4}=q^2 \tag{13}$$

при $q>0$ и написать дифференциальное уравнение орбиты в окончательном виде

$$\left(\frac{d\chi}{d\theta}\right)^2=q^2-\chi^2.$$

Его общий интеграл, как это можно подтвердить и непосредственно путем разделения переменных, есть

$$\chi = q\cos(\theta - \theta_0),$$

где θ_0 есть постоянная интеграции; поэтому, подставляя вместо χ его выражение (12), мы получим для орбиты уравнение в полярных координатах

$$\frac{1}{r} = \frac{k}{c^2} + q\cos(\theta - \theta_0)$$

или же

$$r = \frac{\frac{c^2}{k}}{1 + \frac{c^2 q}{k}\cos(\theta - \theta_0)}.$$

Это есть полярное уравнение конического сечения, имеющего фокус в центре силы, с осью, наклоненной под углом θ_0 к полярной оси, с параметром

$$p = \frac{c^2}{k} \tag{14}$$

и с эксцентриситетом

$$e = \frac{c^2 q}{k};$$

принимая во внимание равенство (13), найдем

$$e = \sqrt{1 - \frac{2Ec^2}{k^2}}. \tag{15}$$

Припоминая выражения, найденные в п. 4 для постоянных E и c, в предположении, что орбита есть окружность (оно соответствует также предположению $c \neq 0$), и принимая во внимание, что для окружности параметр равен радиусу, а эксцентриситет равен нулю, мы видим, что формулы (14) и (15) остаются в силе также и для этого случая.

Поэтому заключаем, *что при движении точки, находящейся под действием центральной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния* (за исключением случая прямолинейного движения, характеризуемого обращением в нуль постоянной площадей), *орбита всегда представляет собой коническое сечение. Между механическими постоянными интегрирования* E и c (полная энергия и удвоенная секторная скорость) *и между элементами, геометрически характеризующими орбиту,* т. е. e, p (эксцентриситет и параметр), *существуют соотношения* (14) и (15).

7. Критерий для установления вида орбиты. Из равенства (15) следует, что вид конического сечения, описываемого движущейся точкой, зависит исключительно от знака полной энергии E. Если предположим $c \neq 0$, то из уравнения (15) найдем, что эксцентриситет e

будет меньше, равен, или больше единицы, в зависимости от того, будет ли полная энергия E отрицательна, равна нулю или положительна. Таким образом, ***орбита будет эллиптической, параболической или гиперболической*** (подразумевается одна ветвь гиперболы) ***в зависимости от того, будет ли полная энергия отрицательной, равной нулю или положительной.***

Здесь необходимо указать, что этот критерий применим даже и в том случае, когда $c=0$, если этот случай рассматривать как предельный. Действительно, при $c \to 0$ параметр орбиты стремится в силу равенства (14) к нулю, а эксцентриситет в силу равенства (15) — к 1; геометрически это означает, что орбита стремится к совпадению со своей осью.

Если $E < 0$, то эллиптическая орбита вырождается в сдвоенный отрезок, концы которого с геометрической точки зрения суть в одно и то же время фокусы и вершины выродившегося эллипса, а динамически один есть центр силы, другой — афелий. Как это следует из п. 5, движущаяся точка в зависимости от направления начального движения упадет в центр силы или сразу, или, пройдя через афелий.

Если, наоборот, $E \geqslant 0$, то орбита (при $c \neq 0$ ветвь гиперболы или парабола) геометрически выродится в сдвоенную полупрямую, конец которой, будучи вершиной и фокусом орбиты, совпадает с центром силы: движущаяся точка (п. 5) уходит в бесконечность или падает в центр в зависимости от направления начальной скорости.

8. В качестве дальнейшего применения критерия, установленного в предыдущем пункте, можно указать на известное общее выражение постоянной E энергии. Из формулы (15), принимая во внимание равенство (14), получим

$$E = -\frac{k}{2p}(1-e^2).$$

С другой стороны, если на время отвлечемся от случая параболической и выродившейся орбит, то параметр, как известно, определится равенством

$$p = \pm a(1-e^2),$$

в котором верхний знак берется в случае эллиптической, а нижний — в случае гиперболической орбиты и a представляет собой большую полуось эллипса или действительную полуось гиперболы.

Комбинируя обе предыдущие формулы, мы и получим названное выше выражение для постоянной E энергии:

$$E = \mp \frac{k}{2a}. \tag{16}$$

Легко проверить, что оно остается верным также и в случаях, исключенных ранее. Действительно, для параболической орбиты имеем $E=0$, а $a=\infty$; для вырожденной эллиптической орбиты $2a$ представляет расстояние от центра силы до единственного афелия, так что формула (15) является не чем иным, как равенством (10) п. 5. Наконец, если речь идет о вырожденной гиперболической орбите, то на полупрямой, к которой сводится ветвь гиперболы, нельзя дать прямого геометрического истолкования полуоси a. Величина a является предельным значением, к которому стремится при $c \to 0$ длина действительной полуоси гиперболы при каком-либо заданном значении постоянной энергии $E > 0$; равенство (16) и определяет этот предел.

9. Кеплерово движение. Рассмотрим, в частности, эллиптическое движение в собственном смысле, которое характеризуется двумя условиями: $E < 0$, $c \neq 0$.

Легко видеть, что в этом случае движение точки, притягиваемой центром S с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния, является *кеплеровым движением*, т. е. движением, удовлетворяющим первым двум законам Кеплера (см. п. 1). Действительно, движение является центральным по отношению к S, такой же, по предположению, будет и сила. Далее, орбита является эллипсом, имеющим фокус в S; и, наконец, как и во всяком движении под действием центральной силы, справедлив закон площадей по отношению к притягивающему центру.

Следовательно, речь идет о периодическом движении (как это, впрочем, a priori было ясно на основании двух соображений: орбита является замкнутой и секторная скорость постоянна). Вводя период (или продолжительность обращения) T, можно придать хорошо известную форму основному соотношению (14) между геометрическим, кинематическим и динамическим элементами p, c, k. Достаточно вспомнить (п. 1), что

$$\frac{c^2}{p} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2},$$

чтобы написать равенство (14) в виде

$$k = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}, \tag{17}$$

откуда имеем

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{k}}. \tag{18}$$

10. Закон времени в кеплеровом движении. уравнение Кеплера. В общем случае мы заметили, что во всяком движении под действием центральной силы закон движения будет однозначно определен (интегралом площадей), если только определена орбита (гл. II, п. 6). То же самое будет иметь место и для рассматриваемых здесь движений точки, притягиваемой центром S с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния, откуда, естественно, возникает задача о действительном определении для таких движений аналитического выражения закона движения. Мы займемся здесь этой задачей исключительно для случая эллиптического движения в собственном смысле (кеплерово движение), отсылая для других случаев к специальным сочинениям *).

Так как эллиптические движения, наиболее интересные для астрономии, совершаются по орбитам с малыми эксцентриситетами и потому, в предположении, что имеет место закон площадей, можно говорить о движениях почти равномерных, то естественно действительному эллиптическому движению точки P сопоставить фиктивное движение другой точки M, описывающей равномерным движением и с тем же периодом T окружность в плоскости орбиты точки P, концентрическую с орбитой и имеющую диаметром ее большую ось $2a$. Подчиним движение этой точки еще условию, что точки P и M проходят одновременно через два апсида, общие для обеих орбит. При заданном равенстве периодов (а следовательно, и полупериодов) последнее условие будет всегда выполняться, если это совпадение P и M имело место хотя бы один раз в одном из апсидов.

Постоянная угловая скорость n фиктивной точки M называется *средним движением* точки P (этот термин не вполне удовлетворителен, но он общепринят). Среднее движение, очевидно, определяется равенством

$$n=\frac{2\pi}{T};$$

поэтому равенству (18) можно придать вид

$$n^2=\frac{k}{a^3}. \tag{18'}$$

С другой стороны, если мы введем также и малую полуось b эллиптической орбиты точки P и примем во внимание очевидное тождество (уже употреблявшееся в кинематике: т. I, гл. II, п. 51)

$$\pi ab=\frac{cT}{2},$$

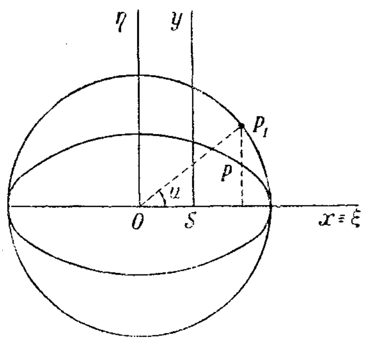
то для среднего движения получим выражение

$$n=\frac{c}{ab}. \tag{19}$$

---

*) См., например, Субботин, Курс небесной механики, т. I, 1933; Мультон, Введение в небесную механику, ОНТИ, 1935. (*Прим. ред.*)

Рассмотрим теперь в плоскости две системы прямоугольных осей (фиг. 13): 1) систему xy с началом в центре силы S, причем ось x возьмем вдоль большой оси орбиты и направим ее к перигелию, а ось y ориентируем таким образом, чтобы положительное направление от x к y совпадало с направлением движения точки P (и M); 2) систему $\xi\eta$ с началом в центре O, общем для орбит точек P и M, получающуюся из системы xy путем поступательного перенесения.



Фиг. 13.

Так как половина расстояния между фокусами OS равна ae, то имеем

$$x = \xi - ae, \quad y = \eta. \tag{20}$$

С другой стороны, известно, что если P есть любая точка эллипса и P_1 — та точка окружности, которая имеет ту же абсциссу, что и P и лежит с той же стороны относительно большой оси, то *эксцентрической аномалией* точки P называется угол u между радиусом OP_1 и полярной осью $O\xi$[1]).

Параметрические уравнения эллипса в функциях от аномалии имеют вид

$$\xi = a \cos u, \quad \eta = b \sin u. \tag{21}$$

В течение кеплерова движения точки P аномалия u будет вполне определенной функцией времени; эту функцию мы и намерены определить аналитически.

С этой целью возьмем снова интеграл площадей (относительно центра S)

$$x\dot{y} - y\dot{x} = c$$

и подставим в него вместо x и y их выражения (20), а в полученный таким образом результат вместо ξ и η — их выражения (21). Таким путем мы получим уравнение

$$c = \xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta - ae\dot{\eta} = ab\dot{u}(1 - e\cos u),$$

которое, принимая во внимание (19), можно написать в виде

$$\frac{d}{dt}(u - e\sin u) = n.$$

[1]) В этом пункте мы обозначаем согласно установившемуся обычаю через u эксцентрическую аномалию. В предыдущей главе, а также и в следующем п. 11 та же буква стоит вместо $^1/r$, что также сообразуется с традицией.

Интегрируя от некоторого момента t_0, когда точки P и M вместе проходят через перигелий (здесь имеем $u=0$), придём к уравнению

$$u - e\sin u = l, \tag{22}$$

где положено

$$l = n(t - t_0). \tag{23}$$

Эта переменная l, линейная относительно времени, равна, очевидно, углу, который составляет с полярной осью $O\xi$ в момент времени t радиус-вектор OM, идущий в фиктивную точку M, и называется *средней аномалией* точки P. Уравнение (22) и есть известное *уравнение Кеплера*, которое в эллиптическом движении в любой момент связывает эксцентрическую аномалию и среднюю аномалию l и которое на основании равенства (23) в неявной форме определяет u в функции от времени[1]).

11. Орбиты Эйнштейна. Прервем на время последовательный ход наших выводов, чтобы очень коротко указать на те применения, которые нашла предыдущая теория в двух основных направлениях современной физики: в теории относительности Эйнштейна и в учении Бора о *структуре атома*.

Прежде всего рассмотрим орбиты планет, которые получаются в результате применения к небесной механике теории относительности [*]). По этой теории (дающей лучшее приближение к действительному движению, чем теория, основанная на законах Кеплера) к основному выражению для притягивающей силы необходимо присоединить поправочный член, обратно пропорциональный четвертой степени расстояния и также имеющий характер притягивающей силы. Следует заметить, что здесь мы встречаемся с известным примером так называемой *теории планетных возмущений*, общую постановку которой мы дадим в § 5.

Если обозначим, как обычно, через

$$\varphi(r) = -\frac{k}{r^2} = -\frac{c^2}{p}\frac{1}{r^2}$$

радиальную составляющую силы притяжения, то в случае кеплерова движения дифференциальное уравнение второго порядка орбиты в

---

[1]) Определение u как явной функции от l, основанное на уравнении (22), составляет основную задачу сферической астрономии; таким образом Кеплер дал начало многочисленным исследованиям, направленным как к теоретическому углублению природы функции $u(l)$ из уравнения (22), так и к тому, чтобы облегчить числовые выкладки. См. Levi-Civita, Sopra la equazione di Kepler, *Rend. Lincei*, т. 13, 1904, стр. 260—268.

*) См. статью А. Эйнштейна в сборнике „Принцип относительности" из серии „Классики естествознания", 1935. *(Прим. ред.)*

общей форме (11′) предыдущей главы (п. 7), т. е. уравнение

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{1}{c^2u^2}\varphi\left(\frac{1}{u}\right),\quad u=\frac{1}{r}\tag{24}$$

перейдет в уравнение

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{1}{p};$$

полагая

$$\xi=au=\frac{a}{r}\tag{25}$$

и припоминая, что для эллипса $p=a(1-e^2)$, можем написать

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2}=-\xi+\frac{1}{1-e^2}.\tag{26}$$

Если присоединить к радиальной силе $\varphi(r)$ возмущающую силу притяжения, обратно пропорциональную четвертой степени расстояния, т. е. поправочный член вида $-\mu/r^4=-\mu u^4$, где μ обозначает положительную постоянную, то на основании уравнения (25) к правой части равенства (26) придется добавить член

$$\frac{\mu}{c^2a}\xi^2,$$

который удобнее написать в виде

$$\frac{3}{2}\varepsilon\xi^2,$$

где ε означает существенно положительную постоянную $2\mu/3c^2a$. При этом дифференциальное уравнение возмущенной орбиты примет вид

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2}=-\xi+\frac{1}{1-e^2}+\frac{3}{2}\varepsilon\xi^2.\tag{26′}$$

Если мы будем рассматривать постоянную ε как величину первого порядка (квадратом которой можно пренебречь), то к уравнению (26′) можем прийти, применяя к движению планет теорию Эйнштейна во втором приближении (тогда как в первом приближении, т. е. при $\varepsilon=0$, мы снова получим уравнение (26), выражающее кеплерово движение). Необходимо добавить, что согласно этой теории постоянная ε определяется равенством [1])

$$\varepsilon=\frac{2k}{aV^2},\tag{27}$$

где k имеет обычное значение (сила притяжения, обратно пропорциональная квадрату расстояния и действующая на единичную массу,

[1]) См. A. Palatini, Lo spostamento del perielio di Mercurio e la deviazione dei raggi luminosi secondo la teoria di Einstein, *Nuovo Cimento*, сер. VI, т. XIV (1917).

находящуюся на расстоянии, равном 1), а V обозначает скорость света.

Уравнение (26′) интегрируется в эллиптических квадратурах, но, имея в виду получить здесь только одно частное следствие, имеющее большой астрономический интерес, мы ограничимся интегрированием его в первом приближении, т. е. по крайней мере до членов порядка выше первого относительно ε[1]). Поэтому предположим, что начальные постоянные выбраны таким образом, что невозмущенная орбита, определенная при тех же начальных условиях из уравнения (26), к которому при $\varepsilon = 0$ сводится уравнение (26′), оказывается эллиптической (или орбитой в кеплеровом движении).

Обозначая в этом предположении через ξ_0 интеграл уравнения (26), на основании равенства (25) и полярного уравнения эллипса имеем

$$\xi_0 = \frac{1 + e\cos\theta}{1 - e^2}. \tag{28}$$

Положив

$$\xi = \xi_0 + \varepsilon\xi_1, \tag{29}$$

получим из уравнения (26′) для неизвестной функции ξ_1, с точностью до членов по крайней мере второго порядка относительно ε, линейное неоднородное уравнение (или уравнение в вариациях уравнения (26′))

$$\frac{d^2\xi_1}{d\theta^2} + \xi_1 = \frac{3}{2}\xi_0^2, \tag{30}$$

общий интеграл которого, как известно, можно вычислить посредством одной квадратуры, применяя метод вариации произвольной постоянной (множителя) C, появляющейся в интеграле $C\cos\theta$ однородного уравнения.

Принимая во внимание выражение для ξ_0 (28), мы видим, что все члены функции ξ_1 являются периодическими с периодом 2π, за исключением лишь того, который происходит от члена с $\cos\theta$ в правой части уравнения (30); точнее, имеем

$$\xi_1 = \xi_2 + \frac{3}{2}\frac{e}{(1-e^2)^2}\theta\sin\theta,$$

где ξ_2 обозначает периодическую функцию с периодом 2π. Отсюда, а также из равенства (29) заключаем, что

$$\xi = \xi_0 + \varepsilon\xi_2 + \frac{3}{2}\frac{\varepsilon e}{(1-e^2)^2}\theta\sin\theta. \tag{31}$$

[1]) Эддингтон, Теория относительности, 1934, гл. III, п. 40.

Но из общей теории орбит точек, находящихся под действием центральных сил (гл. II, п. 8), мы знаем, что общий интеграл (31) уравнения (26′) должен быть периодическим по отношению к θ с некоторым периодом 2Θ, равным удвоенному значению соответствующего апсидального угла Θ, который здесь необходимо является близким апсидальному углу π орбиты в кеплеровом движении. Если мы положим

$$\Theta = \pi + \frac{1}{2}\sigma, \tag{32}$$

то величина σ, имеющая тот же порядок, что и ε, даст *смещение*, которое испытывает перигелий возмущенной орбиты по отношению к перигелию орбиты в кеплеровом движении при каждом обращении планеты (путь, пробегаемый между двумя последовательными прохождениями через перигелий).

Чтобы оценить теперь это смещение σ, заметим, что вследствие ожидаемой периодичности ξ должно быть

$$\xi(\theta + 2\Theta) - \xi(\theta) = 0$$

или же, принимая во внимание (31) и (32) и пренебрегая членами порядка выше первого,

$$\xi(\theta + 2\pi) - \xi(\theta) - \sigma\xi_0' = 0. \tag{33}$$

Между тем, с другой стороны, из равенств (31) и (32) выводим

$$\xi(\theta + 2\pi) - \xi(\theta) = 3\pi\frac{\varepsilon e}{(1 - e^2)^2}\sin\theta,$$

или на основании того же равенства (28)

$$\xi(\theta + 2\pi) - \xi(\theta) = -3\pi\frac{\varepsilon}{1 - e^2}\xi_0'.$$

Достаточно подставить этот результат в равенство (33), чтобы заключить, что смещение σ перигелия планеты при одном обращении с точностью по крайней мере до членов порядка выше первого относительно ε определяется равенством

$$\sigma = 3\pi\frac{\varepsilon}{1 - e^2}. \tag{34}$$

12. Чтобы дать понятие о порядке величины этого смещения, начнем с оценки постоянной (27)

$$\varepsilon = \frac{2k}{aV^2}.$$

Если обозначим через a_0 радиус (средний) земной орбиты, предполагаемой приблизительно круговой, и вспомним, что в силу равенства (8) п. 4, k/a при том же предположении равно квадрату скорости (постоянной) v_0 Земли, то равенство (27) можно написать в форме

$$\varepsilon = \frac{2a_0}{a}\left(\frac{v_0}{V}\right)^2. \qquad (27')$$

Далее, общеизвестно, что скорость v_0 движения Земли по орбите равна примерно 30 *м/сек*, а скорость света около 300 000 *км/сек*. Отсюда следует, что порядок величины отношения $\frac{v_0}{V}$ равен

$$\frac{30}{300\,000} = 10^{-4},$$

а порядок величины $\left(\frac{v_0}{V}\right)^2$ равен 10^{-8}. Так как средние расстояния различных планет от Солнца сравнимы между собой (если за единицу берется средний радиус a_0 земной орбиты, то для Меркурия имеем 0,39 и для Нептуна 30,06), то на основании соотношения (27') можно сказать, что 10^{-8} дает грубо также и порядок величины постоянной ε.

Чтобы оценить смещение σ, определяемое равенством (34), необходимо принять во внимание величину среднего расстояния до рассматриваемой планеты.

Обратимся, например, к Меркурию, для которого имеем $e = 0{,}2$ и, как только что указано, $\frac{a}{a_0} = 0{,}39$. В таком случае, принимая во внимание равенства (34), (27') и ранее определенную величину $\left(\frac{v_0}{V}\right)^2$, найдем, что смещение перигелия равно

$$3\pi\frac{2}{0{,}39\cdot 0{,}96\cdot 10^8} = 3\pi\frac{2}{39\cdot 96\cdot 10^4}.$$

Чтобы выразить это смещение в секундах (вместо радианов), только что найденное число надо умножить на $\frac{6^4\cdot 10^3}{2\pi}$ (число секунд в одном радиане), после чего получим

$$\frac{3\cdot 6^4}{39\cdot 96\cdot 10} = \frac{6^3}{13\cdot 16\cdot 10},$$

т. е. немного больше одной десятой секунды.

Так как в течение столетия Меркурий совершает около 420 обращений вокруг Солнца, то для перигелия этой планеты найдем таким образом вековое смещение в 42'', что как раз соответствует разности между полным наблюдаемым смещением и смещением, предсказываемым небесной механикой на основе ньютоновой теории возмущений, происходящих от действия других планет. До создания теории относительности для объяснения одного этого явления, вне всякой связи с другими явлениями, выдвигались искусственные гипотезы, которые, будучи логически развиты, в большинстве случаев, в отношении других свойств движения планет, привели бы к более существенным расхождениям с наблюдениями.

13. Понятие о строении атома согласно теории Бора. Современная электронная теория материи привела к представлению об атоме как о системе, состоящей из положительно заряженного ядра (*протона*) и вращающихся вокруг него отрицательно заряженных частиц (*электронов*), масса которых весьма мала по сравнению с массой центрального ядра.

На основании классического закона Кулона два заряда с противоположными знаками (поскольку в вопросах динамики их можно рассматривать как точки) притягивают друг друга с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния.

Если, в частности, мы обратимся к атому водорода, состоящему из ядра и одного только электрона с зарядом, равным и противоположным заряду ядра, то эти два заряда механически будут подобны двум материальным точкам, взаимно притягивающимся по закону Ньютона (т. I, гл. XI, § 1), с тем лишь различием, что множитель пропорциональности k не будет уже более равен fmm_1, как в ньютоновом случае. Отсюда следует, что изучение движения электрона вокруг ядра входит в задачу о движении двух точек, притягивающихся с силами, обратно пропорциональными квадрату расстояния. Более того, мы докажем в п. 21, что задача о движении электрона может быть сведена к задаче о движении материальной точки, притягиваемой неподвижным центром с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния.

Но в то время как в абстрактном случае и в вопросах механики a priori возможны какие угодно значения для постоянных интегрирования и, в частности, для постоянной c площадей, в случае электрона приходится (по соображениям, связанным с так называемой *квантовой теорией*, которых мы не можем здесь даже слегка коснуться) принять, что постоянная c площадей может быть только кратным отношения $h/2\pi$, где h есть некоторая универсальная постоянная, называемая *постоянной Планка*, т. е.

$$c = n\frac{h}{2\pi}$$

при целом и положительном n. В случае круговых орбит, у которых параметр совпадает с радиусом, из равенства (14) следует

$$c = \sqrt{k}\,\sqrt{a};$$

отсюда мы заключаем, что: 1) между возможными с точки зрения квантовой теории круговыми орбитами существует одна (та, которая соответствует случаю $n=1$) с минимальным радиусом

$$a_1=\frac{h^2}{4\pi^2 k};$$

2) остальные орбиты имеют радиусы

$$a_n=n^2 a_1 \qquad (n=2,\ 3,\ 4\ldots).$$

Согласно с этой теорией каждая спектральная линия обусловлена переходами электрона с одной орбиты на другую возможную орбиту. Исходя из этого предположения, Бор установил следующий результат [1]). Если обозначим через E_n полную энергию движения вдоль n-ой возможной орбиты, то, как известно (п. 4), будем иметь

$$E_n=-\frac{1}{2}\frac{k}{a_n}=-\frac{1}{2}\frac{k}{a_1}\frac{1}{n^2};$$

поэтому для другой возможной орбиты, внешней по отношению к первой ($n'>n$), будем иметь (алгебраически)

$$E_{n'}>E_n.$$

Если положим

$$E_{n'}-E_n=h\nu,$$

то величина ν даст частоту, соответствующую спектральной линии о которой идет речь.

Этот и другие выводы, полученные Бором путем присоединения подходящих квантовых гипотез к гипотезам классической физики, находятся в удивительном согласии с результатами наиболее тонких экспериментальных наблюдений.

§ 3. Закон всемирного тяготения

14. Обратимся снова к рассуждениям, изложенным в п. 1. Обозначим через P_1, P_2, ... различные планеты и условимся обозначать одним и тем же индексом i все соответствующие отдельной планете P_i элементы: геометрические, кинематические и механические (расстояние от Солнца r_i, большая полуось орбиты a_i, период T_i, масса m_i и т. д.).

Мы знаем, в качестве первого приближения, из законов Кеплера, что различные планеты движутся так, как если бы каждая из них притягивалась силой (центральной), по величине соответственно равной

$$\frac{km_1}{r_1^2},\ \frac{km_2}{r_2^2},\ \ldots,$$

---

[1]) См., в частности, Э. В. Шпольский, Атомная физика, т. I, 1949.

где коэффициент

$$k = \frac{c_1^2}{p_1} = 4\pi^2 \frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{c_2^2}{p_2} = 4\pi^2 \frac{a_2^3}{T_2^2} = \ldots$$

имеет одно и то же значение для всех планет.

Это приводит к более общему выводу: физические свойства пространства вокруг Солнца таковы, что какая-нибудь масса m, помещенная на некотором расстоянии r от Солнца, испытывает с его стороны действие притягивающей силы (центральной), по величине равной

$$\frac{km}{r^2},$$

где коэффициент k оказывается таким же, как и в случае планет.

Теперь общеизвестно, что различные планеты имеют по одному и более спутников (Земля, Нептун, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран); Ньютон впервые (для известных тогда спутников) прямыми наблюдениями установил, что также и для движения всякого спутника вокруг соответствующей планеты приблизительно выполняются законы Кеплера. Допустим, что в первом приближении движение спутника вокруг своей планеты можно рассматривать как абсолютное (в обычном смысле, приписываемом этому слову в механике).

Кроме того, можно отвлечься от того, что планета и спутник притягиваются Солнцем. Если законы Кеплера сохраняют свое значение для движения спутника и планеты, как и в случае планеты и Солнца, то можно принять, что любая планета P_i притягивает спутника с массой m', находящегося на расстоянии r', с силой

$$\frac{k_i m'}{r'^2}, \tag{35}$$

где k_i обозначает некоторый коэффициент, который в силу третьего закона Кеплера остается одним и тем же в случае, если планета P_i имеет несколько спутников.

Но законы Кеплера ничего не говорят относительно соотношений между различными коэффициентами k, k_i, которые входят в определенные таким образом выражения для притяжения планет Солнцем и спутников соответствующими планетами.

Чтобы итти дальше, обратимся к Земле, которую примем за планету P_1 (с массой m_1 на расстоянии r_1 от Солнца); она притягивает Луну, масса которой пусть будет m' и расстояние от Земли r', с силой

$$\frac{k_1 m'}{r'^2}.$$

С другой стороны, она притягивается Солнцем с силой

$$\frac{km_1}{r_1^2}. \tag{36}$$

Но по третьему закону Ньютона этой силе притяжения Солнцем Земли соответствует равная ей по величине сила притяжения Солнца Землей; а так как решительно нет никаких оснований рассматривать эту силу отличной по природе от силы (35), с которой Земля притягивает Луну, то нам приходится принять, что если мы через m_0 обозначим массу Солнца, то величина этого притяжения Солнца Землей будет

$$\frac{k_1m_0}{r_1^2}.$$

Если мы приравняем эту величину величине (36) прямо противоположной силы, то получим

$$km_1 = k_1m_0$$

или же

$$\frac{k}{m_0} = \frac{k_1}{m_1};$$

поэтому если обозначить через f общую величину этих двух отношений, то можно написать

$$k = fm_0, \quad k_1 = fm_1.$$

Имея в виду равенства (35) и (36) и применяя третий закон Ньютона также и к паре Земля — Луна, мы видим, что Солнце и Земля взаимно притягиваются с силой (направленной по соединяющей их прямой)

$$f\frac{m_0m_1}{r_1^2},$$

а Земля и Луна с силой

$$f\frac{m_1m'}{r'^2}.$$

Подобные рассуждения можно повторить и для любой другой планеты, имеющей спутника; распространяя путем обычной индукции этот результат также и на планеты без спутников и вообще на все небесные тела, заключаем: *два каких угодно небесных тела, рассматриваемые как материальные точки, взаимно притягиваются с силой, направленной по соединяющей их прямой, по величине прямо пропорциональной их массам m, m' и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними r, т. е. с силой*

$$f\frac{mm'}{r^2}, \tag{37}$$

где f обозначает постоянную всемирного тяготения.

Таким образом, в отношении небесных тел, рассматриваемых как материальные точки, мы приходим к тому закону действия силы, который под названием *ньютонианского притяжения* мы приняли в виде априорной гипотезы в гл. XI т. I.

15. В процессе индукции Ньютона остается сделать последний, может быть, еще более смелый шаг, тот самый, о котором народное предание сохранило память в известном анекдоте из жизни Ньютона.

Возвращаясь к притяжению Землей Луны и сопоставляя с ним силу тяжести, которая в пределах наших прямых опытов проявляется в виде притяжения Землей всякого тела, как бы оно ни было мало, естественно будет принять, что притяжение, которым, так сказать, Земля удерживает Луну на ее орбите, является не чем иным, как земной силой тяжести, ослабленной для единицы массы вследствие большого расстояния, но способной к столь большому действию вследствие значительной величины лунной массы по сравнению с массой тел, над которыми мы можем непосредственно производить опыты.

Отсюда и название *тяготения*, которое обыкновенно дают ньютонианскому притяжению.

С другой стороны, так как частица P притягивается Землей, как бы она мала ни была, то в свою очередь в силу третьего закона Ньютона она должна притягивать Землю с силой, прямо противоположной.

Отсюда естественно сделать вывод, что ньютонианское притяжение не является исключительно свойством больших небесных масс, а представляет собой естественное и элементарное свойство материи. Здесь приходят на помощь математические выкладки только что упоминавшейся гл. XI т. I. Действительно, там мы видели, что если допустить для всякой пары материальных элементов существование взаимного ньютонианского притяжения, то небесное тело, имеющее форму огромного материального шара, состоящего из однородных концентрических слоев, притягивает всякую внешнюю материальную точку с силой, с которой притягивала бы ту же самую материальную точку масса сферы, целиком помещенная в ее центре.

Таким образом, оказывается оправданным распространение закона действия силы (37) на любую возможную пару материальных точек.

В заключение предыдущих индуктивных выводов можно сформулировать следующий закон, известный под названием *закона Ньютона, или закона всемирного тяготения: всякие две материальные точки во Вселенной взаимно притягиваются с силой, направленной по прямой, их соединяющей, прямо пропорциональной их массам m, m' и обратно пропорциональной квадрату рас-*

стояния между ними r (37):

$$f\frac{mm'}{r^2}.$$

Как уже упоминалось раньше (т. I, гл. XI, п. 3), *постоянную* f *тяготения* (или *постоянную Гаусса*), измеряющую взаимное притяжение двух единичных масс на единичном расстоянии, впервые определил лабораторным путем Кэвендиш (1797). Впоследствии было выполнено много других определений этой величины все более точными способами, и все они в согласии друг с другом приводят к одному и тому же численному значению f в единицах CGS, равному $6{,}7 \cdot 10^{-8}$ (уже упоминавшееся место из п. 3).

§ 4. Проверка закона всемирного тяготения по его следствиям

16. Индуктивный процесс открытия закона всемирного тяготения, схематически изложенный в предыдущих пунктах, опирается на совокупность данных наблюдения и, кроме того, на законы Кеплера (для планет относительно Солнца, для спутников относительно соответствующих планет). Но очевидно, что, если допустить справедливость закона Ньютона, согласно которому небесные тела взаимно притягиваются друг к другу, то, даже рассматривая эти тела как материальные точки, нельзя считать законы Кеплера вполне точными. Эти законы, выполняются только тогда, когда имеется только два взаимно притягивающихся тела и центральное тело неподвижно (относительно звезд).

Поэтому прежде чем принять гипотезу Ньютона как закон, необходимо проверить, допускает ли она в пределах соответствующего приближения справедливость законов Кеплера и других экспериментальных результатов, уже полученных ранее.

17. Справедливость в первом приближении законов Кеплера для планет. Все тела планетной системы (Солнце, планеты, спутники) не только притягиваются друг к другу попарно, но и испытывают также притяжение звезд. Однако среднее расстояние звезд от Солнца так велико по сравнению с размерами планетной системы (ближайшая звезда отстоит от Солнца круглым числом в 300 000 раз дальше Земли), что действием звезд на планетную систему можно пренебречь.

При таком приближении остается принять во внимание только взаимные притяжения тел планетной системы. Будем рассматривать определенную планету, например Землю, которую обозначим через P. Земля притягивается Солнцем и остальными телами солнечной системы; как Солнце, так и эти остальные тела находятся от Земли на расстояниях, сравнимых между собой. Но масса Солнца (что подтвердится потом и что теперь мы можем предположить лишь интуитивно на основании только грубой оценки ее действия) далеко превосходит массу каждой из планет, так что можно считать, что притяжение Земли Солнцем будет преобладающим. Пренебрегая остальными силами притяжения, нам придется рассматривать пару Солнце — Земля как изолированную во Вселенной.

Солнце и Земля, притягивая друг друга, сообщают одно другому (по отношению к звездам, к которым мы всегда должны будем относить движение) некоторое ускорение; но так как оба притяжения (Солнцем Земли и Землею Солнца) в силу третьего закона Ньютона равны по величине, то эти ускорения Солнца и Земли обратно пропорциональны их массам, так что ускорение, испытываемое Землей, превосходит во столько раз ускорение Солнца, во сколько раз масса Солнца превосходит массу Земли. Пренебрегая этим очень маленьким ускорением Солнца, происходящим от притяжения его Землей, мы можем рассматривать Солнце как неподвижное или имеющее прямолинейное равномерное движение относительно звезд. Мы приходим к схематическому рассмотрению движения Земли вокруг Солнца, как материальной точки P, притягиваемой неподвижным центром S силой, по величине равной

$$f\frac{m_0 m}{r^2},$$

где m_0 и m обозначают массы Солнца и Земли, r — расстояние между ними.

Таким образом, мы пришли к задаче, полностью изученной в § 2. Результаты, полученные там, можно перенести сюда, если положить

$$fm_0 = k \tag{38}$$

и принять во внимание то несущественное обстоятельство, что здесь движущаяся точка P имеет массу m (вместо 1). Из всех орбит, рассмотренных там и вообще возможных для точки, здесь в случае пары точек Солнце — Земля (или Солнце — планета) возможна только эллиптическая орбита. Отсутствие столкновений и тот очевидный факт, что движение происходит на конечном расстоянии от Солнца, позволяют прямо заключить, что орбита Земли (как и всякой другой планеты) есть эллипс, имеющий фокус в Солнце и описываемый согласно закону площадей.

Мы видим, таким образом, что при том приближении, которому соответствует постановка задачи, закон Ньютона для движения Земли (и вообще всякой другой планеты) вокруг Солнца заключает в себе два первых закона Кеплера. Что же касается третьего, то из соотношения (17), п. 9 и из равенства (38) следует

$$4\pi^2\frac{a^3}{T^2} = fm_0 \tag{39}$$

или

$$\frac{a^3}{T^2}=\frac{fm_0}{4\pi^2},$$

т. е., что отношение куба большой полуоси планетной орбиты к квадрату продолжительности обращения соответствующей планеты не зависит от элементов планеты, а только от постоянной Гаусса и массы Солнца. Поэтому, какова бы ни была рассматриваемая планета, для указанного отношения всегда получится одно и то же значение. Это и выражает как раз третий закон Кеплера.

18. Справедливость в первом приближении законов Кеплера для движения спутников планет. Обратимся, например, к Солнцу S, Земле P и Луне P' и обозначим массы их соответственно через m_0, m, m'. При указанном в предыдущем пункте приближении мы можем рассматривать Солнце как неподвижное (или движущееся прямолинейно и равномерно) относительно звезд и систему Солнце—Земля—Луна как изолированную во Вселенной.

Обозначим теперь через A, A' силы притяжения, с которыми единица массы Солнца действует на единицу массы Земли P и соответственно Луны P', так что m_0A и m_0A' будут полными солнечными притяжениями, действующими на единицу массы Земли и соответственно Луны. Если аналогично обозначим через Φ притяжение единичной массой Земли единичной массы Луны, то $m\Phi$ будет полным притяжением Землей единичной массы Луны и, обратно, $-m'\Phi$ — полным притяжением Луной единичной массы Земли.

Если обозначим теперь через α, α' ускорения (абсолютные, т. е. относительно галилеевых осей) точек P и P', то соответствующие уравнения движения (оба отнесенные к единичной массе движущегося тела) примут вид

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=m_0A-m'\Phi,\\ \alpha'&=m_0A'+m\Phi.\end{aligned}\right\}\tag{40}$$

Если теперь отнесем движение точки P' (Луна) к движущимся осям с началом в точке P (Земля) и с неизменными направлениями, то ускорение (относительное) a точки P' относительно точки P определится по теореме Кориолиса (поскольку переносное движение здесь поступательное, т. I, гл. IV, п. 4) равенством

$$a=\alpha'-\alpha,$$

откуда на основании уравнений (40) заключаем, что

$$a=m_0(A'-A)+(m+m')\Phi.\tag{41}$$

Но среднее расстояние SP Солнце—Земля равно почти 400-кратному расстоянию PP' Земля—Луна (эти расстояния приблизительно равны 23 000 и, соответственно, 60 земным экваториальным радиусам), так что единичные солнечные притяжения A, A', действующие на единицу земной и лунной массы, приблизительно равны между собой (по величине и направлению); с другой стороны, массой Луны m' по сравнению с массой Земли m в первом приближении можно пренебречь (отношение этих двух масс равно $1:81$).

Принимая это во внимание, в качестве уравнения относительного движения Луны по отношению к Земле вместо уравнения (41) можно взять уравнение

$$a = m\Phi. \tag{41'}$$

Это уравнение можно рассматривать как уравнение движения точки P', притягиваемой неподвижным центром P с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния.

Поэтому достаточно перенести сюда без существенных изменений рассуждения предыдущего пункта, чтобы заключить, что при том приближении, при котором уравнение (41') может представлять относительное движение Луны по отношению к Земле, для этого движения сохраняют свою силу законы Кеплера.

Если, в частности, введем большую полуось a' лунной орбиты и период (или продолжительность соответствующего *звездного*, т. е. отнесенного к неизменным по направлению осям, обращения) T', то для коэффициента пропорциональности земного притяжения (отнесенного к единице массы) будем иметь выражение (аналогичное выражению (39), относящемуся к солнечному притяжению)

$$fm = 4\pi^2 \frac{a'^3}{T'^2}. \tag{42}$$

Все это с теми же самыми заключениями можно распространить и на всякую другую пару планета — спутник.

19. То, что из закона Ньютона вытекают как следствия (в первом приближении) законы Кеплера во всех случаях, в которых они были проверены наблюдениями, составляет очень внушительное доказательство законности гипотезы, выражаемой этим законом.

Другим классическим доказательством мы займемся в следующем пункте, здесь же покажем, как из рассуждений предыдущих пунктов можно получить три замечательных следствия, из которых первые два иллюстрируют большую важность закона тяготения, а третье можно истолковать как дальнейшее экспериментальное доказательство этого закона.

а) Астрономическое определение отношения между массой планеты, имеющей спутника, и массой Солнца. Обозначая через m_0, m массы Солнца S и планеты P, через a, a' — большие полуоси орбит планеты P и спутника P'

и, наконец, через T, T' — соответствующие времена обращения, возьмем снова формулы (39) и (42), дающие коэффициенты пропорциональности полного притяжения Солнцем единицы массы планеты P и полного притяжения планетой P единицы массы спутника P', т. е.

$$fm_0 = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}, \quad fm = 4\pi^2 \frac{a'^3}{T'^2}.$$

Отсюда, деля почленно второе равенство на первое, для отношения масс планеты и Солнца получим значение

$$\frac{m}{m_0} = \frac{a'^3 T^2}{a^3 T'^2},$$

вычисление которого требует только знания элементов a, a', T, T', которые легко получить из наблюдения.

Так, например, обращаясь к Солнцу—Земле—Луне, найдем, что масса Солнца в 333 000 раз больше массы Земли.

б) Средняя плотность Земли. Массу m Земли (а следовательно, и ее плотность) можно определить только приближенно, исходя из величины ускорения силы тяжести g, предполагаемой известной на основании прямых гравиметрических исследований.

Мы знаем, что вес единицы массы g в какой-нибудь точке земной поверхности есть равнодействующая земного притяжения и центробежной силы (та и другая отнесены к единице массы). Но преобладающей составляющей является первая, и если Землю приближенно рассматривать как сферу с радиусом R, с концентрическими однородными слоями, и принять величину fm в качестве коэффициента k земного притяжения, то на поверхности Земли этой составляющей придется приписать величину

$$\frac{fm}{R^2}.$$

Поэтому (предполагая приближенно, что центробежная сила, действующая на единицу массы на поверхности Земли, рассматривается как ничтожная величина) можно положить

$$g = \frac{fm}{R^2}, \tag{43}$$

откуда для массы Земли получается значение

$$m = \frac{gR^2}{f}.$$

Предполагая, что поверхность Земли сферична, и разделив массу ее на объем, получим для средней плотности Земли значение

$$\mu = \frac{3g}{4\pi R f}.$$

Но так как $g = 9{,}8$ *м/сек*$^{-2}$, а по определению метра $2\pi R = 4 \cdot 10^7$ *м*, то имеем

$$\frac{g}{4\pi R} = \frac{9{,}8}{8 \cdot 10^7};$$

отсюда, так как в единицах CGS $f = 6{,}7 \cdot 10^{-8}$, заключаем, что средняя плотность Земли (в *г* $\cdot$ *см*$^{-3}$) равна

$$\frac{3 \cdot 9{,}8 \cdot 10}{8 \cdot 6{,}7},$$

т. е. приблизительно 5,5.

Так как средняя плотность горных пород на поверхности колеблется около 2,5, то необходимо допустить, что внутри Земли материя является более плотной, чем на поверхности.

в) Определение величины g по движению Луны. С этой целью достаточно принять во внимание формулы (42) и (43), т. е. формулы

$$fm = 4\pi^2 \frac{a'^3}{T'^2}, \qquad g = \frac{fm}{R^2}, \tag{44}$$

где, как обычно, a' и T' обозначают большую полуось лунной орбиты и соответствующий период, R — земной радиус. Исключая fm, получим для g величину

$$g = 4\pi^2 \frac{a'^3}{R^2 T'^2} = 2\pi R \left(\frac{a'}{R}\right)^3 \frac{2\pi}{T'^2}. \tag{44'}$$

Вспомним, что среднее значение отношения a'/R равно 60, а время (звездного) обращения Луны равно 27 *сут* 7 *час* 45 *мин*, или 39 345 *мин* $= 39\,345 \cdot 60$ *сек*. Принимая, кроме того, во внимание определение метра, найдем (в *м* $\cdot$ *сек*$^{-2}$)

$$g = \frac{4 \cdot 6^3 \cdot 10^{10} 2\pi}{(39\,345 \cdot 60)^2},$$

т. е. приблизительно 9,74.

Это значение немного отличается от 9,80 — среднего значения g, вычисленного прямым путем на поверхности Земли. Несмотря на эту разницу, результат, полученный таким образом, можно принять за доказательство справедливости закона тяготения, поскольку ошибку, оставаясь в области той же ньютонианской теории, можно объяснить, тем, что две формулы (44) были выведены с различной степенью точности. Вторую из них мы получили, предполагая, что Земля имеет сферическую форму и состоит из однородных концентрических слоев, а также пренебрегая центробежной силой, происходящей от вращения (см. т. I, гл. XVI, п. 36). В действительности за численное значение величины fm/R^2 следовало бы принять не ускорение силы тяжести g, а земное притяжение G, которое превосходит g (на экваторе на 3,5 *см/сек*^{2}), в силу чего разница была бы уменьшена.

Важно также заметить, что при выводе первого из равенств (44) и, следовательно, равенства (44′), вытекающего из равенств (44), мы, во-первых, считали равными полные притяжения Солнцем единицы массы планеты и спутника, во-вторых, мы пренебрегали массой спутника по сравнению с массой планеты. В случае Земли—Луны нетрудно убедиться, что ошибка в большей части зависит от этого последнего предположения, на основании которого и был получен результат вышеуказанного вычисления g.

20. Кометы. Дальнейшее экспериментальное доказательство закона тяготения, которое уже во времена Ньютона казалось по справедливости решающим, было получено из наблюдений над движением комет. До Ньютона астрономы не рассматривали движения комет; Кеплер, например, принимал их за временные метеоры, порождаемые эфиром. Но Ньютон математическим путем (см. § 2) убедился в том, что точка, притягиваемая неподвижным центром с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния, может описывать не только орбиты с небольшим эксцентриситетом (каковыми в первом приближении являются орбиты планет), но также и эллипсы, как угодно вытянутые, или даже дуги парабол или гипербол. Принимая это во внимание, он пытался объяснить движение комет, которые обычно появляются на огромных расстояниях от Солнца, приближаются к нему, а затем удаляются и исчезают.

С этой целью производились прямые наблюдения кометы, которая появилась 14 ноября 1680 г.; немного спустя, 5 декабря, она скрылась в лучах Солнца. По истечении нескольких дней, именно 22 декабря, появилась комета с противоположной стороны от Солнца; она быстро двигалась, удаляясь от него, пока не исчезла.

После математической обработки результатов полученных таким образом двух рядов наблюдений, Ньютон установил, что в действительности речь шла об одной и той же комете, описавшей дугу параболы с фокусом в Солнце.

Впоследствии наблюдались многочисленные кометы; одни из них двигались по параболическим орбитам, другие — появлявшиеся периодически — по эллипсам с большим эксцентриситетом. Во всяком случае было установлено при удивительном согласии со следствиями из гипотезы Ньютона, что Солнце является фокусом кометных орбит, и при движении приблизительно выполняются закон площадей и третий закон Кеплера (независимость коэффициента солнечного притяжения от какого-либо характеристического элемента отдельных комет).

Это доказательство станет еще более убедительным, если мы обратим внимание на то, что в то время как планеты движутся все в плоскостях, мало наклоненных к плоскости эклиптики (т. е. к плоскости земной орбиты), плоскости кометных орбит относительно этой плоскости имеют значительно более разнообразные наклонения: кометы приходят, так сказать, из всякой области неба.

§ 5. Строгие следствия из закона тяготения

21. Задача двух тел. На основании закона Ньютона основной задачей небесной механики является задача о движении скольких угодно тел (рассматриваемых как материальные точки), попарно притягивающихся силами, пропорциональными произведению масс и обратно пропорциональными квадрату расстояния. Рассмотрим сначала наиболее простой случай, в котором число тел сводится к двум.

В астрономии этот случай осуществляется приблизительно всякий раз, когда рассматриваются такие два небесных тела, для которых можно пренебречь действиями на них всех остальных тел: типичным примером являются так называемые *двойные звезды*.

Если пренебречь действием на систему Солнце—планета или планета—спутник других небесных тел, то к этой задаче двух тел можно будет отнести также и задачу о движении систем Солнце—планета или планета—спутник, которую мы уже рассмотрели в предыдущем параграфе, приводя ее при помощи соответствующих предположений к случаю движения точки, притягиваемой неподвижным центром. Как мы увидим из последующего изложения, эта новая постановка указанных задач, являясь менее схематичной, чем постановка, изложенная в предыдущем параграфе, приводит к приближению, несколько лучшему, чем то, которое было достигнуто при изучении движения точки, притягиваемой неподвижным относительно звезд центром (или центром, находящимся в прямолинейном и равномерном движении).

Итак, пусть P_0 и P будут два тела с массами m_0 и m, которые мы будем рассматривать как изолированные во Вселенной. Аналогично тому, как это делалось в п. 18, обозначим через $\boldsymbol{A}$ притяжение единицей массы P_0 единицы массы P, через $\boldsymbol{\alpha}_0$, $\boldsymbol{\alpha}$ — абсолютные ускорения точек P_0 и P и через $\boldsymbol{a}$ — ускорение (относительное) $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_0$ точки P относительно осей с неизменными направлениями и началом в точке P_0.

Так как по третьему закону Ньютона притяжение единицей массы тела P единицы массы тела P_0 есть $-\boldsymbol{A}$, то будем иметь

$$\boldsymbol{\alpha}_0 = -m\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{\alpha} = m_0\boldsymbol{A} \tag{45}$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{a} = (m_0 + m)\boldsymbol{A}.$$

Это уравнение *относительного движения* одного из двух тел по отношению к другому (в нашем случае тела P относительно тела P_0) тождественно, как мы видим, с движением, которое имело бы тело P, если бы тело P_0 было неподвижным (или находящимся в равномерном и прямолинейном движении относительно звезд) и, притягивая тело P по закону Ньютона, имело бы вместо фактической массы m_0 массу m_0+m. Другими словами, в относительном движении все происходит так, как если бы речь шла о ньютонианском притяжении неподвижным центром с единственным отличием, что коэффициент притяжения k вместо того, чтобы быть равным fm_0 (ср. п. 17), определялся бы равенством

$$k=f(m_0+m). \tag{38'}$$

В случае, когда масса m ничтожна по сравнению с m_0 (Солнце—планета, планета—спутник), мы снова возвращаемся к рассуждениям и результатам пп. 17, 18.

Но во всяком случае, т. е. каков бы ни был порядок величины m по сравнению с m_0, речь идет о задаче, непосредственно интегрируемой (§ 2), и орбита (относительная) точки P относительно точки P_0 является коническим сечением, имеющим фокус в P_0; она может принадлежать к какому-нибудь одному из трех типов (и, в частности, может также быть вырожденной).

Поэтому в случае эллиптической орбиты для движения точки P относительно точки P_0 остаются в силе два первых закона Кеплера (см. п. 9).

Далее, если в этом случае введем большую полуось a орбиты и время обращения T, то в силу формул (17), п. 9 и (38') будет существовать соотношение

$$4\pi^2\frac{a^3}{T^2}=f(m_0+m). \tag{39'}$$

Для другого тела P' с массой m', описывающего, как и P, орбиту (относительную) под действием исключительно тела P_0, при обычном значении символов, будем иметь

$$4\pi^2\frac{a'^3}{T'^2}=f(m_0+m'). \tag{39''}$$

Правые части равенств (39'), (39''), вообще говоря, будут неравны; если же они совпадают или по крайней мере приблизительно равны, как это будет в том случае, когда m и m' обе ничтожны по сравнению с m_0, то, приравнивая левые части равенств (39'), (39''), мы увидим (по крайней мере приблизительно), что для движения двух тел P и P' относительно P_0 будет справедлив и третий закон Кеплера.

В заключение добавим, что когда при ньютоновой трактовке движения небесных тел мы приводим изучаемую задачу к задаче о двух телах, то, вообще говоря, остаются в силе только два первых закона Кеплера. Третий будет справедлив (точно или приближенно) только в том случае, если будут выполняться указанные выше условия.

22. Задача $(n+1)$ тел. Перейдем теперь к случаю любого числа тел. Имея в виду выяснить не абсолютное движение этих тел, а относительное по отношению к одному из них, которое будем называть *центральным* (таким в случае солнечной системы будет Солнце), обозначим это последнее через P_0, а остальные через $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Через $m_0, m_1, m_2, \ldots, m_n$ обозначим соответствующие массы, и для любой пары тел P_i, P_j через $\boldsymbol{A}_{ij}$ обозначим ньютонианское притяжение, с которым единица массы тела P_j действует на единицу массы тела P_i, в силу чего направление вектора $\boldsymbol{A}_{ij}$ будет направлением от P_i к P_j; с другой стороны, по третьему закону Ньютона имеем

$$\boldsymbol{A}_{ji}=-\boldsymbol{A}_{ij}.$$

Если временно введем абсолютное ускорение $\boldsymbol{\alpha}_i$ отдельных тел P_i, то путем обычного обобщения уравнений (45) предыдущего пункта будем иметь

$$\boldsymbol{\alpha}_i=\sum_{j=0}^{n}{}^{i}\, m_j\boldsymbol{A}_{ij} \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ldots,n), \tag{46}$$

где через $\sum\limits_{j=0}^{n}{}^{i}$ обозначено суммирование, распространенное на все значения $0,\ 1,\ 2,\ldots,n$ индекса j, за *исключением значения* i.

Перепишем уравнение (46), изолируя уравнение, относящееся к центральному телу, и выделяя в остальных в отдельное слагаемое притяжение, происходящее от этого тела. Таким образом, получим

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_0&=\sum_{i=1}^{n}{}^{i}\, m_j\boldsymbol{A}_{0j}\\
\boldsymbol{\alpha}_i&=m_0\boldsymbol{A}_{i0}+\sum_{j=1}^{n}{}^{i}\, m_j\boldsymbol{A}_{ij} \qquad (i=1,2,\ldots,n).
\end{aligned}\right\} \tag{46'}$$

Отсюда аналогично тому, как это делалось в случае задачи двух тел, получим относительные ускорения $\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{\alpha}_i-\boldsymbol{\alpha}_0$ отдельных тел $P_i\,(i=1,\ 2,\ldots,n)$ по отношению к центральному телу P_0. С этой целью заметим, что, фиксируя какой-нибудь индекс i, можно написать первое из уравнений (46′) в виде

$$\boldsymbol{\alpha}_0=m_i\boldsymbol{A}_{0i}+\sum_{i=1}^{n}{}^{i}\, m_j\boldsymbol{A}_{0j}.$$

Вычитая его почленно из уравнения с индексом i системы (46′) и вспоминая, что $\boldsymbol{A}_{0i} = -\boldsymbol{A}_{i0}$, мы получим уравнения движения n тел $P_1, P_2, \ldots, P_n$ (отнесенные к единицам массы движущихся тел) относительно центрального тела

$$a_i = (m_0 + m_i)\boldsymbol{A}_{i0} + \sum_{j=1}^{n}{}' m_j(\boldsymbol{A}_{ij} - \boldsymbol{A}_{0j}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{47}$$

Отсюда следует, что относительное движение любого тела P_i по отношению к центральному телу происходит так, как если бы речь шла об абсолютном движении под действием равнодействующей, стоящей в правой части. Она складывается из двух составляющих: 1) из ньютонианской центральной силы $(m_0 + m_i)\boldsymbol{A}_{i0}$, которая является той же самой, какая действовала бы на тело P_i, если бы оно подвергалось исключительно ньютонианскому притяжению центрального тела P_0 (задача двух тел, предыдущий пункт); 2) и из другой силы, называемой *возмущающей* силой, которая в свою очередь является суммой $n-1$ составляющих, каждая из которых происходит от одного из $n-1$ тел системы (исключаются центральное тело и рассматриваемое тело P_i).

Сила или отдельное *возмущение*, действующее на тело P_i со стороны другого тела P_j, т. е.

$$m_j(\boldsymbol{A}_{ij} - \boldsymbol{A}_{0j}), \tag{48}$$

есть, очевидно, *разность притяжений, с которыми возмущающее тело P_j действует на единицу массы возмущающего тела P_i и на единицу массы центрального тела P_0.*

23. Элементарные замечания о возмущениях[1]. Из векторного выражения (48) возмущающей силы, с которой всякое тело P_j действует на единицу массы другого тела P_i системы, непосредственно вытекают некоторые заслуживающие внимания следствия.

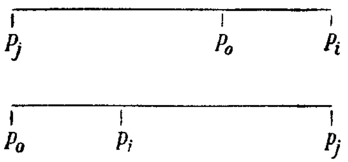
а) Предположим, что возмущающее тело P_j (фиг. 14) в заданный момент находится на одной прямой с возмущаемым телом P_i и центральным телом P_0 вне отрезка P_0P_i, независимо от того, находится ли P_j в *соединении* с центральным телом (т. е. с той же стороны от P_i, что и центральное тело) или в оппозиции (т. е. с противоположной стороны относительно P_i).

Так как оба единичных притяжения $\boldsymbol{A}_{ij}$, $\boldsymbol{A}_{0j}$ точки P_j отнесены к единице массы (тел P_i и P_0 соответственно), то их величины обратно пропорциональны квадратам расстояний P_jP_i, P_jP_0, т. е.

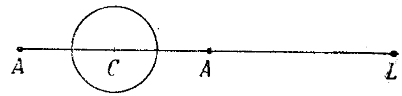
$$A_{ij} : A_{0j} = P_jP_0^2 : P_jP_i^2.$$

[1]) Ср. G. B. Airy, Gravitation, 1893.

Так как, далее, силы $\boldsymbol{A}_{ij}$, $\boldsymbol{A}_{0j}$ действуют по одной и той же прямой, то направление вектора $\boldsymbol{A}_{ij}-\boldsymbol{A}_{0j}$ в первом случае ($P_jP_0<P_jP_i$) совпадает с направлением вектора $-\boldsymbol{A}_{0j}$, т. е. с направлением от P_j к P_0 или же от P_0 к P_i; во втором случае ($P_jP_0>P_jP_i$) совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{A}_{ij}$, т. е. с направлением от P_i к P_j



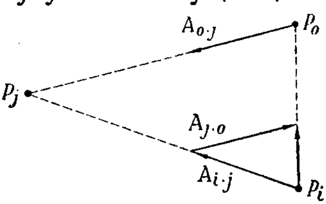
Фиг. 14.



Фиг. 15.

или же с направлением от P_0 к P_i. *В результате возмущающая сила в обоих этих случаях действует в направлении, противоположном направлению притяжения центральным телом возмущаемого тела.*

Будем рассматривать, например, Землю как центральное тело, Луну как возмущающее тело и каплю морской воды как возмущаемое тело, расположенное на прямой, соединяющей центры Земли C и Луны L (фиг. 15). Находится ли капля в A (в соединении с Луной) или в A' (в оппозиции с ней), лунное притяжение действует на каплю в направлении, обратном земному притяжению, т. е. по вертикали места снизу вверх. В этом и заключается объяснение *морских приливов и отливов* в его наиболее элементарной форме.



Фиг. 16.

б) Предположим, что возмущающее тело P_j находится (точно или приближенно) на одном и том же расстоянии от возмущаемого тела P_i и от центрального P_0 (фиг. 16). В таком случае единичные силы притяжения имеют равную величину, поэтому единичная возмущающая сила $\boldsymbol{A}_{ij}-\boldsymbol{A}_{0j}=\boldsymbol{A}_{ij}+\boldsymbol{A}_{j0}$ будет направлена по прямой P_iP_0 от P_i к P_0; т. е. *возмущающая сила усиливает притяжение центральным телом.*

24. Задача двух тел, как мы видели, непосредственно интегрируема, но уже случай $n+1=3$ представляет аналитические трудности значительно более высокого порядка. Этот случай (*задача трех тел*), начиная с XVII в. до наших дней, является предметом многочисленных исследований, осветивших его с различных точек зрения[1]). В известном смысле можно даже сказать, что теперь

[1]) Ср. Marcolongo, Il problema dei tre corpi, Milano, Hoepli, 1919.

мы имеем ее аналитическое решение, принадлежащее Зундману (1912)[1]. Но в отношении этой классической задачи еще не сказано последнего слова[2].

25. Понятие об эллиптических элементах. В § 2 для изучения общего решения уравнений движения точки, притягиваемой неподвижным центром по закону Ньютона, мы пользовались частной системой координат, подсказанной, так сказать, природой самой задачи (плоскость xy совпадала с плоскостью движения, полюс находился в центре силы и в эллиптическом случае полярная ось была направлена вдоль большой оси орбиты в сторону перигелия). Но иногда удобнее пользоваться общей системой координат; это становится прямо необходимым, когда имеется в виду совместное изучение нескольких решений задачи, например изучение (эллиптических) движений двух или нескольких планет вокруг Солнца.

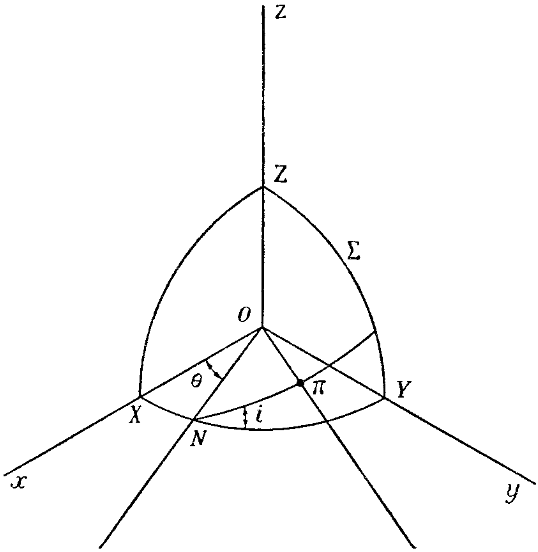
Чтобы получить формулы, представляющие общее решение относительно каких угодно осей, очевидно, достаточно выполнить в уравнениях, полученных в п. 6 и относящихся к специальной системе осей, произвольную замену координат. Но так как на основании прямого исследования мы уже знаем геометрическую природу траектории и закон движения по ней, то будет более наглядно и более полезно для целей дальнейшего изложения заранее выбрать систему параметров (геометрических и кинематических), которые были бы удобны прежде всего для определения формы и размеров орбиты, затем положения, занимаемого ею в пространстве, отнесенном к любым осям, и, наконец, закона движения по орбите.

В эллиптическом случае, которым мы здесь ограничимся, форма и размеры орбиты некоторой точки P определяются постоянными a и e (большая полуось и эксцентриситет). Что же касается положения, занимаемого орбитой в пространстве, то небходимо прежде всего отметить, что начало осей выбирается во всех случаях, как это подсказывается самой задачей, в центре силы (в центре Солнца, если речь идет о движении планет), где орбита будет иметь свой фокус. Плоскость xy можно задать произвольно, но в случае планет теперь уже стало общепринятым принимать ее совпадающей с плоскостью эклиптики на 1 января 1850. Оси x, y принимают направленными к точке весеннего равноденствия и к точке летнего солнцестояния в это время, а ось z — направленной к северному полюсу эклиптики; в силу этого система осей будет правой. По отношению к этой системе осей (или какой-нибудь другой, заданной как угодно) остается еще определить положение плоскости

[1] Sundmann, Mémoire sur la problème des trois corps, *Acta Mathematica*, т. 36, 1912, стр. 105—179.

[2] Ср. Levi-Civita, Sur la régularisation du problème des trois corps, *Acta Mathematica*, т. 42, 1918, стр. 99—144.

орбиты (проходящей через начало) и на этой плоскости направление фокальной оси (которую мы будем предполагать ориентированной в сторону перигелия). Для первой цели, очевидно, необходимы два параметра и для второй — один параметр. Для выяснения смысла задаваемых параметров рассмотрим сферу Σ (фиг. 17) с центром в начале координат O и с радиусом, равным единице, на которой координатные плоскости определяют сферический треугольник



Фиг. 17.

с тремя прямыми углами XYZ. Плоскость орбиты точки P пересекает экваториальную плоскость сферы (т. е. плоскость $z=0$) по прямой, которая называется *линией узлов*, так как две ее точки пересечения с экватором сферы называются узлами.

Та точка экватора, через которую будет проходить полупрямая OP, когда небесное тело P переходит из южного полушария в северное, называется восходящим узлом.

Плоскость орбиты, очевидно, будет определена, когда будут указаны *долгота восходящего узла* N, т. е. аномалия $\theta = \widehat{XN}$ узла N относительно оси x (отсчитываемая в правом направлении относительно оси z) и *наклонение орбиты*, т. е. угол i, который большой круг сечения сферы Σ плоскостью орбиты (рассматриваемой в направлении движения) образует с экватором (рассматриваемым в правом направлении относительно оси z): θ изменяется от 0 до 2π, i от 0 до π. Этот последний угол для планет всегда мал и значительно меньше $\pi/2$; он превосходит этот предел только для некоторых комет (называемых *попятными*).

Для определения фокальной оси, направленной к перигелию, рассмотрим точку П, в которой она пересекает сферу Σ со стороны перигелия; примем за параметр сумму (двух некомпланарных углов)

$$\bar{\omega} = \theta + \widehat{NO\pi} = \widehat{XN} + \widehat{N\pi}$$

и назовем этот угол ***долготой перигелия.***

Теперь нам остается только определить соответствие между последовательностью моментов времени и положениями, занимаемыми точкой P на своей орбите. С этой целью фиксируем время t_0 ***прохождения через перигелий.*** Но заметим при этом, что часто бывает удобнее вместо t_0 подставлять некоторый параметр уже не постоянный, а переменный, линейно связанный с временем, так называемую ***среднюю аномалию*** (п. 10)

$$l = n(t - t_0).$$

Эти шесть параметров: a, e, i, θ, $\bar{\omega}$, l (или t_0), первые пять из которых геометрические (и постоянные), последний же кинематический (постоянный или переменный, смотря по тому, идет ли речь о t_0 или об l), называются ***элементами эллиптического движения,*** или, более просто, эллиптическими элементами.

26. Так как первые пять эллиптических элементов однозначно определяют орбиту по форме, размерам и положению, а параметр l (или t_0) определяет изменение с течением времени положения на орбите, то очевидно a priori, что координаты x, y, z движущейся точки будут выражаться в функции от этих шести элементов. Мы не будем здесь останавливаться на изложении явного определения этих выражений, а только покажем, что, для того чтобы их найти, достаточно присоединить к чисто геометрическому рассмотрению уравнение Кеплера (п. 10).

Действительно, так как a, e, i, θ, $\bar{\omega}$ определяют эллипс (с фокусом в начале координат, центре силы), описываемый при движении точкой P, то мы можем выразить прежде всего координаты x, y, z точки P в функции от постоянных a, e, i, θ, $\bar{\omega}$ и от любого параметра, при помощи которого можно определить положение точки P на ее орбите, например от эксцентрической аномалии u; в результате мы придем к уравнениям вида

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u \mid a, e, i, \theta, \bar{\omega}), \\ y &= y(u \mid a, e, i, \theta, \bar{\omega}), \\ z &= z(u \mid a, e, i, \theta, \bar{\omega}). \end{aligned}\right\} \qquad (49)$$

Если теперь примем во внимание, что P описывает свою орбиту по закону ньютонианского притяжения (который приводит к закону площадей), то, так как речь идет об эллиптической орбите, аномалию u нужно считать связанной с временем или, лучше, со средней аномалией $l = n(t - t_0)$ уравнением Кеплера (22), (ср. п. 10)

$$u - e\sin u = l.$$

Поэтому после вычислений окончательные выражения интегралов эллиптического движения будут определяться уравнениями (49), в которых вместо аномалии u подставлено ее выражение через l и e, неявно определяемое из уравнения (22).

Составляющие $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ скорости получатся дифференцированием по времени уравнений (49), если принять во внимание, что только u зависит от этой переменной и что зависимость эта определяется уравнением (22). Так как при помощи простого дифференцирования из этого уравнения получится

$$\frac{du}{dt} = \frac{n}{1 - e\cos u},$$

то таким образом в конце концов придем в общем случае к шести интегральным формулам типа

$$x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z} = \text{функциям от } l,\ a,\ e,\ i,\ \theta,\ \bar{\omega}. \tag{50}$$

Можно доказать, что шесть функций, стоящих в правой части, являются независимыми по отношению к их шести аргументам, так что уравнения (50) разрешимы относительно этих функций. Другими словами, формулы (50) можно рассматривать как формулы преобразования между шестью декартовыми элементами x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ и шестью эллиптическими элементами l, a, e, i, θ, $\bar{\omega}$.

27. Возмущенное движение. Метод вариации произвольных постоянных. Предположим теперь, что на тело P действует сила ньютонианского притяжения от неподвижного центрального тела; пусть, кроме этой силы, имеющей преобладающее влияние на движение тела P, на него действует также возмущающая сила. Если через $\boldsymbol{A}$ и Φ обозначим это притяжение и эту возмущающую силу, отнесенные к единичной массе тела P, и через $\boldsymbol{a}$ — ускорение точки P, то движение (возмущенное) этой точки определится уравнением

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{A} + \Phi. \tag{51}$$

Это единственное векторное дифференциальное уравнение второго порядка эквивалентно, очевидно, системе двух векторных уравнений первого порядка:

$$\frac{dP}{dt} = \boldsymbol{v}, \quad \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{A} + \Phi. \tag{51'}$$

Следовательно, три уравнения второго порядка, которые получатся после проектирования уравнения (51) на оси координат (произвольно заданные с началом в точке O), будут эквивалентны шести уравнениям первого порядка, получающимся из уравнений (51′) аналогичным образом.

При изучении возмущенного движения выгодно рассмотреть как раз эти шесть последних дифференциальных уравнений первого порядка и подставить в них вместо неизвестных x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ при помощи уравнений (50) новые неизвестные l, a, e, i, θ, $\bar{\omega}$. В этом и состоит *метод вариации произвольных постоянных*. Причина названия сделается очевидной, если представим себе, что при невозмущенном движении, т. е. при отсутствии возмущающей силы Φ, параметры l, a, e, i, θ, $\bar{\omega}$ были бы все постоянными, за исключением лишь первого, который был бы линейной функцией времени. Таким образом, мы приходим к следующему истолкованию этих новых неизвестных по отношению к действительному возмущенному движению: они в любой момент дают элементы того гипотетического эллиптического движения точки P, которое получилось бы, если бы в рассматриваемый момент прекратилось всякое возмущающее влияние, и точка P, начиная с того состояния движения, которое она имела в этот момент в действительном движении, двигалась бы исключительно под действием ньютонианского притяжения точки A центром O.

Поэтому орбита этого фиктивного эллиптического движения (соприкасающаяся, очевидно, с действительной орбитой) называется *оскулирующей орбитой* и значения, принимаемые параметрами l, a, e, i, θ, $\bar{\omega}$ в любой момент, называются *оскулирующими элементами* (возмущенного движения в рассматриваемый момент).

Шесть уравнений первого порядка, которые получаются после преобразования уравнений (51′) посредством уравнений (50), можно представить себе разрешенными относительно производных (по времени) от оскулирующих элементов; после этого правые части (выражения скоростей изменения тех же элементов) составят так называемые *специальные возмущения*.

Главное преимущество указанного только что способа (замена уравнения (51) уравнениями (51′), введение новых неизвестных l, a, e, i, θ, $\bar{\omega}$ и решение уравнений относительно производных от них) состоит в том, что во многих весьма важных для астрономии случаях возмущающие влияния незначительны, так что производные от оскулирующих элементов, только что названные специальными возмущениями, будут близки к значениям (одно постоянно и равно n, а остальные равны нулю), которые имели бы производные по времени от l, a, e, i, θ, $\bar{\omega}$ в невозмущенном движении; а при наличии таких обстоятельств указанные выше дифференциальные уравнения оказываются удобными для численного интегрирования путем последовательных приближений [1]).

---

[1]) H. Andoyer, Mécanique céleste, Paris, 1923; C. L. Charlier, Die Mechanik des Himmels (2 тома), Leipzig, 1902—1907; Мультон, Введение в небесную механику, ОНТИ, 1935. H. Poincaré, Leçons de mécanique céleste (3 тома), Paris, 1905—1910.

28. Замечания. Мы уже говорили в п. 26, что не имеем в виду выводить формулы (50) преобразования переменных $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ к эллиптическим элементам. Однако для иллюстрации предыдущего стоит показать две простые комбинации уравнений (50), приводящие к непосредственным и наглядным выводам для некоторых типов возмущений.

С этой целью, с одной стороны, вспомним, что в эллиптическом невозмущенном движении энергию E и постоянную площадей c можно выразить через эллиптические элементы благодаря формулам (16), (14) в виде

$$E = -\frac{k}{2a}, \quad c = \sqrt{k}\ \sqrt{p}, \tag{52}$$

где p, как обычно, обозначает параметр орбиты.

С другой стороны, обозначая через T живую силу движущегося тела P и через $U = \frac{k}{r}$ — потенциал притяжения A центральным телом, будем иметь

$$T - U = E. \tag{53}$$

Если оси координат выбраны таким образом, что плоскость xy совпадает с плоскостью оскулирующей орбиты, то, кроме того, будем иметь еще

$$x\dot{y} - y\dot{x} = c. \tag{54}$$

Формулы (53) и (54), если в них E и c выражены через эллиптические элементы согласно уравнениям (50), и являются теми двумя комбинациями уравнений (50), на которые мы ссылались вначале.

Для их истолкования рассмотрим движение, возмущаемое добавочной силой Φ. По теореме живых сил имеем

$$dT = dL = dU + \Phi \cdot dP;$$

на основании уравнения (53) вместо $dT - dU$ можно подставить дифференциал от E, который по существу может быть назван дальнейшим эллиптическим элементом, поскольку согласно первому из уравнений (52) он зависит исключительно от элемента a. После подстановки найдем

$$dE = \frac{k}{2a^2}\, da = \Phi \cdot dP. \tag{55}$$

Если затем, все еще имея в виду невозмущенное движение, возьмем производную по времени от уравнения (54), то будем иметь

$$\frac{dc}{dt} = x\ddot{y} - y\ddot{x},$$

где $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ можно заменить соответствующими проекциями результирующей силы $A + \Phi$. В правой части появится (скалярный) момент результирующей силы относительно оси z (перпендикулярной в точке O к плоскости оскулирующей орбиты).

Так как к этому моменту сила A, как центральная по отношению к O, ничего не добавит, то остается только момент M_z возмущающей силы Φ; и наряду с равенством (55) будем иметь

$$\frac{dc}{dt} = M_z. \tag{56}$$

Равенство (55) показывает, что размеры орбиты стремятся увеличиться или уменьшиться, смотря по тому, будет ли элементарная работа положительной или отрицательной. В частности, если бы возмущающая сила представляла собой пассивное сопротивление, возникающее, например, благодаря возможному наличию сопротивляющейся среды, наполняющей межпланетное пространство, то работа была бы всегда отрицательной, и размеры орбиты непрерывно уменьшались бы. Отсюда следует, что всякое пассивное сопротивление стремится вызвать падение движущегося тела на центральное.

Равенство (56) показывает, что направление изменения величины c и, следовательно, параметра P характеризуется знаком момента M_z возмущающей силы [1]).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть в кеплеровом движении $[r]$ и $[r^2]$ будут средними значениями за период времени T расстояния $r = SP$ и его квадрата.

Найти значения двух интегралов

$$\frac{1}{T}\int_0^T r\,dt, \quad \frac{1}{T}\int_0^T r^2\,dt.$$

Вычисление становится особенно простым, если за переменную интеграции вместо времени взять среднюю аномалию u, для которой в силу уравнения Кеплера имеем

$$(1 - e\cos u)\,du = n\,dt,$$

а в силу формул (20), (21)

$$r = a(1 - e\cos u).$$

Принимая во внимание (п. 10), что $T = 2\pi/n$, найдем

$$[r] = a\left(1 + \frac{1}{2}e^2\right), \quad [r^2] = a^2\left(1 + \frac{3}{2}e^2\right).$$

2. Допуская, что излучение Солнца при любом положении планеты P обратно пропорционально квадрату расстояния $r = SP$, доказать, что в

[1]) Полную иллюстрацию этой формулы и других, аналогично связывающих производные от эллиптических элементов с возмущающей силой, см., кроме уже упоминавшихся сочинений по небесной механике и томика Эри (Airy), заметку E. Almansi, Sopra i moti ellitici perturbati, *Rend. Lincei*, т. 31, 1922, стр. 277—282. См. также Lazzarino, Sopra alcune formole della teoria dei moti ellitici perturbati, *Atti Acc. Gioenia di Catania*, т. 13, 1923.

кеплеровом движении планеты средняя величина солнечного излучения, падающего на планету в течение одного периода, обратно пропорциональна площади орбиты.

Достаточно вычислить среднее значение величины $1/r^2$.

3. В кеплеровом движении при $r^2\dot{\theta}=c$ и $r=\dfrac{p}{1+e\cos\theta}$ явное выражение истинной аномалии θ в функции времени определяется дифференциальным уравнением

$$(1+e\cos\theta)^{-2}\dot{\theta}=\frac{c}{p^2}.$$

Поскольку

$$p^2=a^2(1-e^2)^2=ab(1-e^2)^{3/2},$$

оно в силу формулы (19), п. 10, может быть написано в виде

$$ndt=(1-e^2)^{3/2}(1+e\cos\theta)^{-2}\,d\theta.$$

Разлагая правую часть в ряд по степеням e и интегрируя, на основании определения (23) средней аномалии l найдем

$$l=\theta-2e\sin\theta+\frac{3}{4}e^2\sin 2\theta+\ldots,$$

где опущенные члены будут по крайней мере третьего порядка относительно e. Отсюда, с точностью до членов первого порядка относительно e, найдем, что $\theta=l$, а с точностью до членов второго порядка относительно e^2, —

$$\theta=l+2e\sin l.$$

Эти последовательные приближения можно продолжить и до членов третьего порядка; тогда найдем

$$\theta=l+2e\sin l+\frac{5}{4}e^2\sin 2l \text{ и т. д.}$$

Разность $\theta-l$ называется в астрономии *уравнением центра.*

Принимая во внимание дифференциальное уравнение, связывающее θ и l,

$$\frac{d\theta}{dl}=(1-e^2)^{-3/2}(1+e\cos\theta)^2,$$

определить *максимальную абсолютную величину $\mathscr{E}$ уравнения центра.*

Ее надо искать между значениями θ, для которых $\dfrac{d\theta}{dl}=1$, или же

$$(1+e\cos\theta)^2=(1-e^2)^{3/2};$$

она соответствует тем возможным положениям на орбите, в которых

$$\cos\theta=-\frac{1-(1-e^2)^{3/4}}{e} \tag{1}$$

и, следовательно,

$$r=a(1-e^2)^{1/4}.$$

Показать, что при $e<1$ дробь $\frac{[1-(1-e^2)^{3/4}]}{e}$ будет всегда положительна и меньше единицы, так что действительно существуют два угла θ_1 и $2\pi-\theta_1$ (при $\theta_1<\pi$), удовлетворяющие соотношению (1). В этих двух положениях уравнение центра имеет максимум и минимум, равные по абсолютной величине. Это и будет как раз искомой величиной $\mathscr{E}$. Показать, что по крайней мере до членов порядка выше третьего будем иметь

$$\mathscr{E}=2e+\frac{11}{48}e^3.$$

4. Пусть орбита точки, притягиваемой неподвижным центром по закону Ньютона, будет параболической. Определить закон движения, принимая во внимание, что орбита описывается согласно закону площадей с полюсом в фокусе.

Сопоставляя формулы

$$r=\frac{p}{1+\cos\theta}=\frac{q}{\cos^2\frac{\theta}{2}}, \quad r^2\dot{\theta}=c,$$

придем к алгебраическому соотношению между t и $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2}=\frac{c(t-t_0)}{\sqrt{2}\,q^{3/2}},$$

где t_0 обозначает момент прохождения движущейся точки через перигелий.

5. В случае гиперболической орбиты (ср. с предыдущим упражнением) в ньютонианском движении закон движения можно представить в виде

$$n(t-t_0)=e\operatorname{sh}v-v,$$

где согласно обозначениям п. 8 $n=\frac{k}{a^{3/2}}$ и v связано с r уравнением

$$r=e\operatorname{ch}v-a.$$

6. **Задачи Бертрана, Альфана и Дарбу.** Речь идет об определении таких позиционных сил с линией действия, проходящей постоянно через неподвижную точку, которые заставляют движущуюся точку описывать коническое сечение при любых начальных условиях. Бертран[1]) предложил эту задачу в 1873 г., после того как решил другие, связанные с ней задачи. В указанной форме эта задача была решена в том же году (Comptes Rendus, т. 84)

---

[1]) Жозеф Бертран (Joseph Bertrand) родился в Париже в 1832 г. умер там же в 1900 г. Был профессором в Политехнической школе и в Collège de France больше 50 лет, а с 1874 г. до конца жизни — непременным секретарем Академии наук в Париже. Тонкий и блестящий математик, он был весьма известен, кроме того, как выдающийся механик. Помимо большого курса анализа и широко распространенных учебников по элементарной математике, опубликовал некоторые из своих курсов, читанных в Collège de France (по термодинамике, по теории вероятностей, по математической теории электричества). Во всех его произведениях, вместе с оригинальностью мысли, блещет его исключительное педагогическое дарование.

Дарбу[1]) и Альфаном[2]), которые указали два a priori возможных закона для силы.

Если добавим еще условие, что рассматриваемые траектории не только конические, но и имеют один и тот же фокус, то мы опять придем к закону Ньютона (Бертран, там же). Ср., например, П. Аппелль, Руководство теоретической механики, т. I, гл. XI, пп. 232—233.

7. Показать, что средние орбитальные скорости планет (na согласно п. 10) при движении по орбите обратно пропорциональны корням квадратным из полуосей соответствующих орбит.

8. Планета (сферическая однородная) имеет спутника, среднее расстояние которого (под средним расстоянием будем понимать большую полуось орбиты) равно λR, где R есть радиус планеты. Доказать, что продолжительность одного обращения спутника есть

$$T = \sqrt{3\pi}\,\frac{\lambda^{3/2}}{\sqrt{f\mu}},$$

где μ обозначает плотность планеты.

9. У Юпитера известны девять спутников, четыре из которых, так называемые медицейские планеты, открыты Галилеем в 1610 г. Один из них, называемый Ио, совершает свое обращение вокруг Юпитера приблизительно в 1,77 суток, полуось же его орбиты приблизительно равна 5,91 радиуса Юпитера (радиус Юпитера равен 11,14 радиуса Земли). Полуось орбиты Юпитера равна 5,20 среднего расстояния Солнце—Земля, т. е. 5,20 · 23 000 земных радиусов; он обращается вокруг Солнца в течение 11 лет 314,84 суток.

Из этих данных вывести, что масса Юпитера приблизительно в 318 раз больше массы Земли, а средняя плотность равна $^1/_4$ плотности Земли.

10. Найти величину силы тяжести на поверхности Солнца и Луны, зная что радиусы их соответственно равны 109 и 0,27 радиуса Земли, а массы соответственно равны 333 000 и $^1/_{81}$ массы Земли.

---

[1]) Гастон Дарбу (Gaston Darboux) родился в Ниме в 1842 г., умер в Париже в 1917 г. Преподавал около 40 лет в Сорбонне и после смерти Бертрана был непременным секретарем Академии наук в Париже. Его „Лекции по общей теории поверхностей“ (Leçons sur la théorie générale des surfaces) (4 тома) представляют собой классическое произведение. Он не только обогатил дифференциальную геометрию новыми существенными результатами, но и оставил глубокий след в теории дифференциальных уравнений и разрешил важные задачи анализа и механики, постоянно показывая с непогрешимым изяществом, насколько драгоценным оказывается соединение геометрической интуиции с тонким использованием анализа.

[2]) Жорж Анри Альфан (George Henri Halphen) родился в Руане в 1844 г., умер в Версале в 1899 г. Офицер-артиллерист, некоторое время занимал должность экзаминатора в Политехнической школе; был членом Академии наук в Париже. Он был прежде всего алгебраистом и этой своей способностью с большим искусством пользовался для углубления различных вопросов не только в вычислительной и алгебраической геометрии, но также и в анализе. В своей диссертации на тему о дифференциальных инвариантах, представленной Парижскому математическому факультету в 1878 г., он построил такое дифференциальное уравнение конических сечений, которое существенным образом входит в указанные выше механические вопросы. Оставил большой трактат по эллиптическим функциям и их приложениям в трех томах, третий из которых не был закончен вследствие преждевременной смерти автора.

Для искомой величины силы тяжести, отнесенной к единице массы, найдем 28 g на поверхности Солнца и 0,16 g на поверхности Луны.

11. Рассмотрим планету, орбиту которой можно рассматривать приблизительно круговой, и предположим, что в заданный момент абсолютная величина v_0 скорости планеты подвергается мгновенному увеличению, после которого она становится равной $\sqrt{2}\, v_0$.

Доказать, что, начиная с этого момента, орбита должна сделаться гиперболической.

12. Применить теорию спутника к снаряду.

Надо принять во внимание, что если считать Землю за сферу, состоящую из однородных слоев, то притяжение во внешних ее точках будет изменяться обратно пропорционально квадрату расстояния r от центра и что в месте выстрела (расстояние, равное радиусу Земли R) притяжение равно g. Пусть k — есть коэффициент притяжения; тогда для величины силы притяжения на расстоянии r имеем $F=\frac{k}{r^2}$, а для потенциала $U=\frac{k}{r}$. В положении, где произведен выстрел, будем иметь

$$k=gR^2, \quad U=gR.$$

Обозначая через v^0 абсолютную величину начальной скорости и через α — угол наклона к горизонту, под которым сделан выстрел, будем иметь для секториальной скорости относительно центра Земли абсолютную величину, равную $Rv_0 \cos\alpha$, так что две постоянные E и c (гл. II, § 2) определяются равенствами

$$E=\frac{1}{2}v_0^2-gR, \quad c^2=R^2v_0^2\cos^2\alpha.$$

После определения знака E и применения формулы (15), п. 6, т. е.

$$e=\sqrt{1+\frac{2Ec^2}{k^2}}=\sqrt{1+\frac{2Ev_0^2\cos^2\alpha}{g^2R^2}},$$

можно окончательно установить решение и исследовать его.

Принимая для R величину в 6,371 *км*, показать сначала, что если начальная скорость снаряда превосходит величину $\sqrt{2gR}=11{,}174$ *км/сек*, то он не упадет на Землю, а будет описывать гиперболическую (или прямолинейную) орбиту.

Разобрать далее (начиная с более простого случая горизонтального выстрела $\cos\alpha=1$) круговые или эллиптические орбиты, принимая во внимание, что наименьшее расстояние от центра должно быть больше R, без чего снаряд упал бы на Землю. Ср. Charbonnier, Balistique ext. rat., Paris, 1907 г., гл. IV.

13. В задаче двух тел S и P (п. 21) пусть в начальный момент будет r_0 расстояние SP и v_0 — абсолютная величина относительной скорости точки P по отношению к S. Показать на основании формулы (16), п. 8, что, если постоянная

$$a=\frac{r_0}{2-\dfrac{v_0^2 r_0}{f(m+m_0)}}$$

положительна, то орбита, каково бы ни было направление начальной скорости v_0, будет эллиптической, и большая полуось ее будет как раз равна a.

14. Выбрав значения величин r_0, v_0 так, чтобы они удовлетворяли начальному условию, указанному в предыдущем пункте, рассмотреть все возможные направления для начальной скорости в заданной плоскости, проходящей через S. Каждому из них для точки P (планета) в заданной плоскости будет соответствовать относительно S (Солнце) некоторая эллиптическая орбита, в одном из фокусов которой будет находиться Солнце. Показать, что геометрическим местом центров C этих ∞^1 эллиптических орбит будет окружность с центром в одной из точек на прямой, соединяющей S с начальным положением P_0 точки P.

Можно взять систему осей с началом в S и осью x, проходящей через P_0 и направленной от S к P_0. Если для любой из рассматриваемых эллиптических орбит θ_0 будет угол между осью Sx и большой осью орбиты, направленной к перигелию, то, естественно, будем иметь

$$r_0 = \frac{p}{1 + e\cos\theta_0},$$

и так как (предыдущее упражнение) постоянная $\frac{r_0}{a}$ не зависит от направления начальной скорости, то мы видим, что для всех орбит, о которых здесь идет речь, эксцентриситет e и угол θ_0 будут связаны соотношением

$$\frac{1 - e^2}{1 + e\cos\theta_0} = \lambda,$$

где λ обозначает постоянную $\frac{r_0}{a}$.

С другой стороны, полярные координаты центра C любой из рассматриваемых орбит относительно указанных осей определяются равенствами

$$\rho = ae, \quad \theta = \pi - \theta_0 \text{ и т. д.}$$

15. Для эллиптических орбит, указанных в предыдущих упражнениях, определить геометрические места перигелия, афелия и концов малой оси.

16. Треугольные решения задачи трех тел. Если три массы: m_0, m_1, m_2 занимают вершины P_0, P_1, P_2 равностороннего треугольника, то результирующая ньютонианского притяжения, которому подвергается одна какая-нибудь из них, например m_i, со стороны двух других проходит через центр тяжести и имеет величину

$$m_i f \frac{m_0 + m_1 + m_2}{\Delta^2} \frac{\rho_i}{\Delta} \qquad (i = 0, 1, 2),$$

где Δ обозначает сторону треугольника и ρ_i — расстояние точки P_i от центр тяжести этих трех масс.

Это простое замечание (к нему можно прийти прямым геометрическим путем, принимая во внимание элементарные свойства центра тяжести) позволяет установить существование класса частных решений задачи трех тел. К этому классу можно прийти, замечая вместе с Лапласом, что достаточно заставить вращаться равносторонний треугольник в его плоскости вокруг центра тяжести трех масс с подходящей угловой скоростью ω, чтобы центробежная сила для каждой из трех масс уравновесила притяжение этой массы двумя другими.

Показать, что

$$\omega^2 = f\frac{m_0 + m_1 + m_2}{\Delta^3}$$

К этим решениям мы вернемся в § 10, гл. X и укажем наиболее общее исследование этого вопроса Лагранжем, от которого эта задача и ведет свое начало.

17. Прямолинейные решения задачи трех тел. Другой класс частных решений задачи трех тел (см. предыдущий пункт) найдем, исследуя условие, при котором для трех масс: m_0, m_1, m_2, расположенных в трех точках: P_0, P_1, P_2, лежащих на одной прямой, результирующая притяжения, которое одна из них испытывает со стороны двух других, пропорциональна ее расстоянию от центра тяжести системы.

Выбрав начало абсцисс в центре тяжести, будем иметь $\sum_{i=0}^{2} m_i x_i = 0$.

Если предположим, как это всегда можно сделать, что P_0 заключено между P_1 и P_2, и положим $A = \frac{x_2 - x_0}{x_0 - x_1}$, то требуемое условие выразится уравнением пятой степени (Лагранжа)

$$(m_0 + m_1) A^5 + (2m_0 + 3m_1) A^4 + (m_0 + 3m_1) A^3 - (m_0 + 3m_2) A^2 - \\ - (2m_0 + 3m_2) A - (m_0 + m_2) = 0.$$

18. Если в задаче двух тел сумма масс изменяется в отношении, обратном линейной функции времени, то движение можно определить путем подходящей замены переменных.

Обращаясь к п. 21, положим $f(m_0 + m) = \frac{1}{\tau}$, причем по предположению τ должна быть линейной функцией времени. Если P_0 и P — два тела, то векторное уравнение относительного движения P по отношению к P_0 можно написать в виде

$$\frac{d^2 P}{dt^2} = -\frac{1}{\tau r^3}(P - P_0),$$

где r обозначает расстояние $P_0 P$.

Это уравнение, как заметил Армеллини (в работе, упоминавшейся на стр. 165), приводится к обычной ньютонианской задаче (п. 2), в которой τ есть постоянная, если положить

$$P - P_0 = \tau (P_1 - P_0), \quad dt = \tau^2 dt_1;$$

в силу этого получим

$$\frac{d^2 P_1}{dt_1^2} = -\frac{1}{r_1^3}(P_1 - P_0),$$

где через r_1 обозначена длина вектора $P_1 - P_0$.

19. Общее исследование *задачи двух тел с массами* произвольно изменяющимися было сделано Р. Армеллини. См. *Mem. della Soc. dei* XL, т. XIX, 1915, стр. 75—96; *Rend. Lincei*, т. XXIV, 1915_2, стр. 300—306; т. XXXI, стр. 170—173, т. I (серия 6^a), 1925, стр. 617—622.

20. В т. I, гл. VIII, § 7 мы видели, что две системы, геометрически подобные и имеющие в соответствующих точках одну и ту же плотность, оказываются также и материально подобными. Для динамического подобия требуется далее, чтобы отношение φ соответствующих сил было постоянным.

Показать, что это условие выполняется тогда, когда действуют исключительно ньютонианские силы, и что в этом случае будем иметь $\varphi = \lambda^4$, где λ обозначает коэффициент линейного геометрического подобия. Показать также, что отношение соответствующих времен равно единице.

21. В каком направлении изменяется параметр оскулирующей орбиты, когда масса центрального тела возрастает (если, например, на него падают метеориты)?

Принять во внимание формулу (14) п. 16, замечая, что в задаче двух тел сохраняет свое значение закон площадей, даже если массы и изменяются каким-либо образом.

22. Можно указать закон так называемых косвенных возмущений (т. е. относящихся к узлу и к наклонению), происходящих от возмущающей силы, нормальной к плоскости невозмущенной орбиты. Как увидим далее, мы придем к более определенному заключению, если эта возмущающая сила имеет характер восстанавливающей силы, направленной к плоскости первоначальной орбиты.

Из определения долготы узла θ и наклонения i (п. 25) следует, что направляющие косинусы секториальной скорости $V = \overrightarrow{OP} \times v/_2$ при возмущенном каким-либо образом движении, как обычно, будут равны

$$\sin i \sin \theta, \quad -\sin i \cos \theta, \quad \cos i.$$

В частности, если речь идет о малых наклонениях, т. е. о таких, которые можно рассматривать как величины первого порядка, направляющие косинусы примут вид

$$\xi = i \sin \theta; \quad \eta = -i \cos \theta, \quad \zeta = 1;$$

это означает, что величина вектора V приблизительно равна его проекции $\frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{2}$ на ось z. Далее, если, в частности, рассмотрим действие возмущающей силы Φ, нормальной к плоскости невозмущенной орбиты и, следовательно, имеющей составляющие 0, 0, Z, то мы сможем ее оценить, исходя из тождества

$$2\frac{dV}{dt} = \overrightarrow{OP} \times \Phi,$$

где в правой части вместо полной силы $A + \Phi$ (п. 27) поставлена только возмущающая сила, так как A является центральной силой.

Проектируя на ось z, получим

$$2\frac{dV_z}{dt} = 0$$

и, следовательно, $2V_z = c$; в силу предыдущего замечания, эту постоянную можно принять за длину вектора $2V$.

Отсюда, проектируя на две другие оси и подставляя вместо V_x, V_y их значения $\frac{c\xi}{2}$, $\frac{c\eta}{2}$, получим

$$\dot{\xi} = yZ, \quad \dot{\eta} = -xZ; \tag{2}$$

так как координаты x, y умножаются на величину первого порядка Z, то вместо них можно подставить их выражения, относящиеся к невозмущенному движению, которые полностью известны. Поэтому только что написанные уравнения могут служить в указанных выше предположениях для определения величин ξ и η, а следовательно, и для определения i и θ. Из этих уравнений получим

$$\xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta = -(x\xi + y\eta) Z,$$

где левая часть будет равна $i^2\dot\theta$, если принять во внимание приближенные выражения — $i\sin\theta$, $i\cos\theta$ для ξ и η; что же касается правой части, то, вспоминая, что $c\xi$, $c\eta$ суть составляющие вектора $2V$ по осям x, y, будем иметь

$$c\xi = y\dot z - \dot y z, \quad c\eta = z\dot x - \dot z x$$

и, следовательно,

$$x\xi + y\eta = -z.$$

Поэтому заключаем, что

$$i^2\dot\theta = zZ.$$

Отсюда видим, что знак у $\dot\theta$ будет всегда такой же, как и у произведения zZ; поэтому в случае возмущающей силы Z, имеющей характер восстанавливающей силы, направленной к плоскости первоначальной орбиты, узел совершает всегда попятное движение.

Другой комбинацией уравнений (2), определяющих $\dot\xi$, $\dot\eta$, будет

$$\frac{di}{dt} = \sin\theta\,\dot\xi - \cos\theta\,\dot\eta = (x\cos\theta + y\sin\theta)\,Z.$$

Если введем угол v, который радиус-вектор планеты образует с линией узлов (оскулирующей орбиты) в любой момент, то будем иметь уравнение

$$\frac{di}{dt} = rZ\cos v,$$

показывающее, что направление, в котором изменяется наклонение, в любой момент зависит от знака произведения $Z\cos v$.