Глава IV

ДИНАМИЧЕСКИЕ И КИНЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ

1. От динамики материальной точки, которой мы занимались в трех предыдущих главах, перейдем теперь к динамике системы; чтобы упростить последующее изложение, рассмотрим в этой вводной главе некоторые производные механические понятия, относящиеся к изолированной точке (т. I, гл. VII), и распространим их на материальные системы, в частности на твердое тело, к которому в дальнейшем мы часто будем обращаться.

При этом, как и вообще во всей динамике системы, мы будем считать, как в т. I и, в частности, в геометрии масс (гл. X), что *всякую материальную систему какой угодно сложности можно рассматривать как совокупность материальных точек или, когда речь идет о непрерывном распределении материи, как совокупность материальных элементов.*

В общих рассуждениях этой и следующих глав мы будем обычно обращаться к материальной системе S какой угодно природы, но состоящей из конечного числа N материальных точек P_i $(i=1, 2, \ldots, N)$. Необходимо, однако, раз навсегда заметить, что, рассматривая материальные элементы (одного, двух или трех измерений) как точки и применяя классические методы анализа бесконечно малых, мы можем считать все, что в дальнейшем будет говориться об этой системе S, имеющим силу также и для системы с непрерывным распределением материи, потому что в формулах, которые мы установим прямым путем, вместо сумм, распространенных на N точек дискретной системы S, можно подставить аналогичные интегралы по области (одного, двух или трех измерений), распространенные на все материальные элементы непрерывной системы (ср. т. I, гл. X, пп. 4, 15).

§ 1. Элементарная работа

2. Общее выражение. Рассмотрим систему S какой угодно природы из N материальных точек P_i $(i=1, 2, \ldots, N)$, на которые наложены связи. Пусть эта система движется под действием определенных заданных сил. Сосредоточив внимание на всех силах (прямо приложенных и реакциях), действующих на систему, или же только на какой-нибудь части сил, механически вполне определенной (например, на действующих силах, или реакциях, или внешних силах и т. д.), обозначим через $\boldsymbol{F}_i$ равнодействующую сил рассматриваемого вида, действующих на одну из точек P_i.

Если в какой-нибудь момент t вектор $\boldsymbol{v}_i$ есть скорость точки P_i, так что $dP_i = \boldsymbol{v}_i dt$ есть перемещение, которое она испытывает за время dt, непосредственно следующее за этим моментом t, то элементарная работа, совершенная силой $\boldsymbol{F}_i$ за это время, будет равна $\boldsymbol{F}_i \cdot dP_i = \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{v}_i dt$ (т. I, гл. VIII, п. 3).

Далее, полной *элементарной работой* системы сил $\boldsymbol{F}_i$ от момента времени t до момента $t + dt$ называется сумма элементарных работ

$$dL = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot dP_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{v}_i dt. \tag{1}$$

Заметим еще, что так как перемещение системы зависит от принятой системы отсчета, то этот относительный характер перемещения отразится и на элементарной работе.

3. Случай твердого тела. а) Свободное твердое тело. К этому определению элементарной работы в общем случае мы не можем пока ничего добавить; но если система S представляет собой твердое тело, то скорости $\boldsymbol{v}_i$, а следовательно, и элементарные перемещения dP_i отдельных точек P_i можно выразить в любой момент посредством двух *характеристических векторов*, т. е. посредством скорости $\boldsymbol{v}_0$ какой-нибудь точки O, неизменно связанной с системой, и мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ самой системы. Таким образом, мы будем иметь (т. I, гл. III, п. 22)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_i &= \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP_i}, \\ dP_i &= dO + \boldsymbol{\omega}\, dt \times \overrightarrow{OP_i} \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Подставляя в равенство (1) и принимая во внимание векторное тождество

$$\boldsymbol{F}_i \cdot [\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP_i}] = \boldsymbol{\omega} \cdot [\overrightarrow{OP_i} \times \boldsymbol{F}_i],$$

получим

$$dL = dO \cdot \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{\omega}\, dt \cdot \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP} \times \boldsymbol{F}_i.$$

Две векторные суммы в правой части суть результирующая $\boldsymbol{R}$ (главный вектор) и результирующий момент (главный момент) $\boldsymbol{M}$ относительно точки O системы сил $\boldsymbol{F}_i$; таким образом мы получаем весьма замечательную формулу

$$dL = \boldsymbol{R} \cdot dO + \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\omega} dt = (\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\omega})\, dt. \tag{2}$$

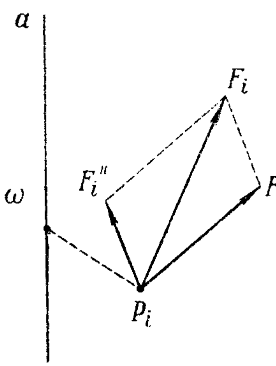
Если бы тело двигалось поступательно ($\omega = 0$), то выражение элементарной работы имело бы такой же вид, как и для одной силы $\boldsymbol{R}$, приложенной в точке O.

Далее, если речь будет итти о работе только всех внутренних сил, которые в силу своей природы составляют (т. I, гл. XII, п. 3) систему, векторно эквивалентную нулю ($\boldsymbol{R} = \boldsymbol{M} = 0$), то, очевидно, можно сказать, что *во время движения твердого тела при каких угодно связях и действующих силах сумма элементарных работ внутренних сил за любой элемент времени тождественно равна нулю.*

б) Твердое тело, имеющее неподвижную точку или ось. Если твердое тело закреплено в какой-нибудь точке и эта точка выбирается за центр приведения, то имеем $\boldsymbol{v}_0 = 0$, так что формула (2) сведется к равенству

$$dL = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\omega}\, dt, \tag{3}$$

представляющему собой точную формальную аналогию с выражением элементарной работы одной только силы, причем роль силы играет результирующий момент рассматриваемых сил относительно закрепленной точки, а роль скорости выполняет угловая скорость твердого тела.



Фиг. 18.

Далее, если твердое тело вращается около закрепленной оси a (фиг. 18), то достаточно выбрать полюс O в какой-нибудь точке этой оси, как тотчас же будет применима формула (3), а так как мгновенная ось вращения постоянно совпадает с a, то вектор $\boldsymbol{\omega}$, изменяясь, вообще говоря, по величине в зависимости от времени, будет постоянно направлен по прямой a. Отсюда следует, что если эта ось ориентирована в ту сторону, которая в рассматриваемый момент указывается направлением вектора $\boldsymbol{\omega}$, то вместо скалярного произведения $\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\omega}$ можно подставить алгебраическое произведение величины ω угловой скорости на проекцию M_a момента $\boldsymbol{M}$ на ось (*результирующий момент сил F_i относительно оси a*).

Формула

$$dL = M_a \omega\, dt, \tag{4}$$

которая получается таким образом, очень важна для приложений. Она позволяет, например, вычислить мощность (или работу в единицу времени, т. I, гл. VIII, п. 12) вала двигателя, когда известно преодолеваемое сопротивление (а следовательно, и результирующий момент M_a относительно геометрической оси вала) и число n оборотов в единицу времени. Так как тогда угол поворота, пробегаемый в единицу времени, т. е. ω, есть $2\pi n$, то из равенства (4) следует, что мощность вала измеряется числом $2\pi n M_a$.

К равенству (4) можно прийти, между прочим, еще проще. Элементарное перемещение любой точки P_i, расстояние которой от оси вращения a есть δ_i, перпендикулярно к плоскости $P_i a$ и измеряется произведением $\delta_i \omega\, dt$; поэтому, если F'_i есть составляющая силы $\boldsymbol{F}_i$, приложенной в точке P_i, по направлению dP_i, то элементарная работа силы $\boldsymbol{F}_i$ будет равна $F'_i \delta_i \omega\, dt$. Но $F'_i \delta_i$ есть как раз момент $M_i|_a$ силы $\boldsymbol{F}_i$ относительно оси a. Действительно, если разложим силу $\boldsymbol{F}_i$ на две составляющие, из которых одна $\boldsymbol{F}'_i$ направлена по dP_i, а другая $\boldsymbol{F}''_i$ есть проекция этой силы на плоскость $P_i a$, то увидим, с одной стороны, что момент силы $\boldsymbol{F}''_i$ относительно оси a (компланарной с $\boldsymbol{F}''_i$) равен нулю. С другой стороны, момент силы $\boldsymbol{F}'_i$ есть как раз $F'_i \delta_i$, потому что $\boldsymbol{F}'_i$ перпендикулярна к плоскости $P_i a$, а δ_i измеряет кратчайшее расстояние линии действия силы $\boldsymbol{F}'_i$ от оси a и, кроме того, F'_i будет положительной или отрицательной в зависимости от того, будет ли сила проектироваться в направлении перемещения или в противоположном, или же, если ось a ориентирована в направлении вектора ω, в зависимости от того, будет ли сила $\boldsymbol{F}_i$ правовращающей или левовращающей относительно a. Отсюда на основании теоремы Вариньона (т. I, гл. I, п. 31) заключаем, что $F'_i \delta_i$ есть момент $M_i|_a$ силы $\boldsymbol{F}_i$ относительно оси a, так что элементарную работу силы $\boldsymbol{F}_i$ можно выразить в виде

$$M_i|_a \omega dt;$$

после этого достаточно просуммировать по всем точкам системы, чтобы вновь получить формулу (4).

4. Голономные системы. Для дальнейшего изложения необходимо вывести уже встречавшееся в аналитической статике для виртуальных перемещений (т. I, гл. XV, § 6) выражение элементарной работы системы сил $\boldsymbol{F}_i$ $(i=1, 2, \ldots, N)$, приложенных к N материальным точкам P_i голономной системы. Если эта система имеет n степеней свободы и положения ее точек определяются N параметрическими уравнениями

$$P_i = P_i(q_1, q_2, \ldots, q_n | t) \qquad (i=1, 2, \ldots, N), \tag{5}$$

где q_h $(h=1, 2, \ldots, n)$ — независимые лагранжевы координаты[1]), то любое бесконечно малое (действительное) перемещение системы определяется равенством

$$dP_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} dq_h + \frac{\partial P_i}{\partial t} dt \qquad (i=1, 2, \ldots, N).$$

[1]) См. т. I, гл. VI.

Поэтому для соответствующей элементарной работы системы из N сил $\boldsymbol{F}_i$, выраженных через обобщенные координаты q_h, лагранжевы скорости $\dot{q}_h$ (т. I, гл. VI, п. 10) и время, мы получим выражение

$$dL = \sum_{h=1}^{n} dq_h \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} + dt \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial t},$$

которое можно переписать в виде

$$dL = \sum_{h=1}^{n} Q_h dq_h + dt \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial t}, \tag{6}$$

где, как и в аналитической статике, положено

$$Q_h = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. через Q_h обозначена так называемая составляющая системы сил $\boldsymbol{F}_i$ по лагранжевой координате q_h или, иначе, обобщенная сила, соответствующая координате q_h.

В правой части равенства (6) вторая сумма тождественно исчезает, когда голономные связи не зависят от времени ($\partial P_i/\partial t = 0$).

5. Виртуальная работа и некоторые замечательные тождества. Если вспомним, что при любом виртуальном перемещении выражения δP_i отличаются от только что названных действительных перемещений dP_i только тем, что в виртуальных перемещениях во всяком случае (т. е. зависят ли, или не зависят связи от времени) отсутствует член с dt, то для виртуальной элементарной работы

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta P_i$$

придем к выражению

$$\delta L = \sum_{h=1}^{n} Q_h \delta q_h, \tag{7}$$

уже полученному в п. 28, гл. XV, т. I.

Если, далее, силы $\boldsymbol{F}_i$ являются производными от потенциала U, где U есть функция декартовых координат точек системы в смысле, указанном в п. 28 гл. XV т. I, то этот потенциал, выраженный в лагранжевых координатах посредством параметрических уравнений (5), вообще говоря, будет функцией от q, а также и от времени, если связи зависят от времени. Во всяком случае мы знаем уже (упомянутое место), что $\delta L = \delta U$, где δU

обозначает полный дифференциал от функции U, рассматриваемой как функция от q, т. е.

$$\delta U = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_h} \delta q_h;$$

поэтому, приравнивая правые части этого равенства и равенства (6) и принимая во внимание произвольность δq_h, мы получим следующие выражения для обобщенных сил в случае консервативной системы

$$Q_h = \frac{\partial U}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

К этим выводам, которые будут полезны в последующем изложении, здесь можно прибавить некоторые интересные замечания, относящиеся к случаю твердого тела. Предполагая, что речь идет о свободном твердом теле, примем за его обобщенные координаты декартовы координаты α, β, γ какой-нибудь точки O, неизменно связанной с телом относительно заданных неподвижных осей $\Omega\xi\eta\zeta$, и обычные углы Эйлера θ, φ, ψ, определяющие положение тела по отношению к этим осям. Для виртуальной работы в этом случае будем иметь выражение

$$\delta L = Q_\alpha \delta\alpha + Q_\beta \delta\beta + Q_\gamma \delta\gamma + Q_\theta \delta\theta + Q_\varphi \delta\varphi + Q_\psi \delta\psi, \tag{8}$$

где обобщенные силы Q имеют обычное формальное определение (предыдущий пункт) относительно принятой системы координат.

Обобщенные силы Q в рассматриваемом здесь частном случае допускают интересное механическое истолкование, к которому мы придем, сравнивая выражение (8) с другим выражением той же величины δL, которое можно получить прямо. С этой целью вспомним из кинематики (т. I, гл. VI, п. 15), что любое виртуальное перемещение твердого тела определяется равенством

$$\delta P_i = \delta O + \boldsymbol{\omega}' \times \overrightarrow{OP_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

где δO обозначает виртуальное перемещение точки O и $\boldsymbol{\omega}'$ — соответствующее виртуальное вращение. Эти выражения δP_i получаются из аналогичных выражений dP_i действительного элементарного перемещения (п. 3) путем подстановки δO и ω' вместо dO и ωdt, так что, выполняя эту подстановку в равенстве (2), найдем

$$\delta L = \boldsymbol{R} \cdot \delta O + \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\omega}',$$

где $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{M}$ обозначают главный вектор и главный момент относительно точки O сил $\boldsymbol{F}_i$.

Замечая теперь, что составляющие δO по осям $\Omega\xi\eta\zeta$ суть $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, и обозначая через R_ξ, R_η, R_ζ аналогичные составляющие главного вектора $\boldsymbol{R}$, вместо первого слагаемого будем иметь выражение

$$R \cdot \delta O = R_\xi \delta\alpha + R_\eta \delta\beta + R_\zeta \delta\gamma.$$

Что же касается второго слагаемого $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\omega}'$, то вспомним из кинематики (т. I, гл. III, п. 34), что при действительном элементарном перемещении элементарное вращение $\boldsymbol{\omega}dt$ определяется равенством

$$d\theta\boldsymbol{N}+d\varphi\boldsymbol{k}+d\psi\boldsymbol{\varkappa},$$

где $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\varkappa}$, как обычно, обозначают единичные векторы линии узлов, оси Oz, неизменно связанной с твердым телом, и оси $\Omega\zeta$ неподвижной системы координат. Поэтому элементарному виртуальному вращению можно придать вид

$$\boldsymbol{\omega}'=\delta\theta\boldsymbol{N}+\delta\varphi\boldsymbol{k}+\delta\psi\boldsymbol{\varkappa},$$

после чего, обозначая через M_N, M_z, M_ζ составляющие момента $\boldsymbol{M}$ по линии узлов и осям Oz, $\Omega\zeta$, найдем

$$\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\omega}'=M_N\delta\theta+M_z\delta\varphi+M_\zeta\delta\psi.$$

Таким образом, заключаем, что

$$\delta L=R_\xi\delta\alpha+R_\eta\delta\beta+R_\zeta\delta\gamma+M_N\delta\theta+M_z\delta\varphi+M_\zeta\delta\psi,$$

и достаточно отождествить это выражение с выражением (8) для δL, чтобы получить следующие шесть уравнений, дающих упоминавшееся выше механическое истолкование для обобщенных сил Q:

$$Q_\alpha=R_\xi,\qquad Q_\beta=R_\eta,\qquad Q_\gamma=R_\zeta,$$
$$Q_\theta=M_N,\qquad Q_\varphi=M_z,\qquad Q_\psi=M_\zeta.$$

Если имеется в виду твердое тело с одной закрепленной (относительно $\Omega\xi\eta\zeta$) точкой, и мы выберем эту точку за полюс O, то останутся в силе уравнения второй тройки; в том случае, когда силы $\boldsymbol{F}_i$ являются производными от потенциала U, предыдущие равенства дадут механическое истолкование частных производных от U по α, β, γ, θ, φ, ψ.

§ 2. Кинетическая энергия или живая сила

6. Рассмотрим снова какую-нибудь материальную систему S, состоящую из N точек, и обозначим через m_i массу любой точки P_i $(i=1, 2, \ldots, N)$. Если для системы S задано движение (относительно определенной системы ориентировки), то мы будем называть *кинетической энергией или живой силой* системы в любой момент сумму

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_iv_i^2 \tag{9}$$

кинетических энергий или живых сил в этот момент составляющих систему материальных точек. Кинетическая энергия системы есть скалярная величина, всегда существенно положительная, за исключением случая мгновенной остановки всех точек системы, когда эта величина сводится к нулю. Очевидно, что кинетическая энергия, как и движение, для которого она определяется, имеет относительный характер и зависит от выбора системы осей. Но из того же определения (9) ясно, что T не изменится, когда первоначальная система координат будет заменена другой системой отсчета, неподвижной относительно первой.

В динамике, когда говорят о живой силе, не уточняя дальше этого понятия, принято подразумевать, что движение отнесено к неподвижной или, лучше сказать, к галилеевой системе отсчета.

7. Движение системы S, о котором мы говорили в предыдущем определении, задавалось относительно определенной системы отсчета $\Omega\xi\eta\zeta$, которую мы будем называть *неподвижной*, хотя в настоящем изложении она может также и не быть таковой в механическом смысле слова. Иногда случается, что для того, чтобы лучше охватить ход явления, приходится ввести в виде вспомогательной системы отсчета, наряду с системой $\Omega\xi\eta\zeta$, систему $Oxyz$, начало которой O движется по выбранному закону, а оси сохраняют неизменные направления относительно осей неподвижной системы, например остаются параллельными и одинаково направленными с осями ξ, η и ζ. Движение системы S относительно $Oxyz$ называется движением системы *относительно точки* O. Причина такого названия будет ясна, если мы обратим внимание на то, что заданное движение S относительно $\Omega\xi\eta\zeta$ можно рассматривать как абсолютное движение, получающееся в результате только что определенного относительного движения и переносного чисто поступательного движения осей $Oxyz$ относительно осей $\Omega\xi\eta\zeta$ (т. I, гл. IV, § 1).

Если обозначим через $\boldsymbol{v}'$ скорость точки O относительно системы осей $\Omega\xi\eta\zeta$ и через $\boldsymbol{v}_i^{(r)}$ — скорость любой точки P_i в ее движении относительно точки O (т. е. относительно системы осей $Oxyz$), то в силу теоремы об относительном движении (т. I, гл. IV, п. 2) будем иметь

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_i^{(r)};$$

поэтому, замечая, что формулу (9) можно написать в виде

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i,$$

заключаем, что

$$T = \frac{1}{2} m v'^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^{(r)2} + \boldsymbol{v}' \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i^{(r)}, \tag{10}$$

где через m обозначена полная масса системы.

Равенство (10) представляет живую силу системы в ее движении относительно осей $\Omega\xi\eta\zeta$ в виде суммы трех членов: живой силы, которую имела бы точка O, если бы она была материальной точкой с массой, равной полной массе системы, живой силы системы в ее движении относительно точки O и, наконец, количества, не имеющего более формы живой силы и которое можно назвать *составным*, поскольку оно зависит как от движения точки O, так и от относительного движения.

8. Теорема Кёнига [1]. Формула (10), замечательная сама по себе, становится особенно важной, когда за точку O вспомогательной системы принимается центр тяжести G системы, и, следовательно (это полезно повторить), движение системы S рассматривается относительно системы с началом в G, оси которой сохраняют неизменными направления относительно осей $\Omega\xi\eta\zeta$. В этом предположении третий член равенства (10) принимает вид

$$\boldsymbol{v}_G \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i^{(r)}, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{v}_G$ обозначает (абсолютную) скорость центра тяжести, а $\boldsymbol{v}_i^{(r)}$ — скорость любой точки P_i относительно самого центра тяжести. Но векторное тождество, определяющее положение центра тяжести (т. I, гл. X, п. 8), имеет вид

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{GP_i} = 0.$$

Если вспомогательная точка O совпадает с G, то достаточно взять производную по времени относительно осей $Gxyz$, чтобы заметить, что

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i^{(r)} = 0.$$

Отсюда находим, что в формуле (10) третий член (11) при этих условиях тождественно равен нулю. Таким образом, имеем

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^{(r)2} \tag{12}$$

или словами (теорема Кёнига):

---

[1] Самуил Кёниг (Samuel König), голландец, родился в княжестве Изенбург в 1712 г., умер в синьории Цуилештейн в 1757 г. Ученик Иоганна Бернулли, сперва преподавал математику, потом был библиотекарем принца Оранского и, наконец, профессором философии и естественного права в Айа.

Живая сила какой угодно системы, находящейся в движении, в любой момент равна сумме живой силы, которую в этот момент имел бы центр тяжести, если бы он был материальной точкой, в которой сосредоточена вся масса системы, и живой силы, которую в тот же момент имеет вся система в ее движении относительно центра тяжести.

Формула (10) и теорема Кёнига имеют особую важность для твердых тел. Однако выражению для живой силы твердого тела можно придать особый вид, благодаря чему этот случай заслуживает того, чтобы рассмотреть его независимым путем.

9. Живая сила твердого тела. Обозначим в случае движения твердого тела S, как обычно, через $\boldsymbol{v}_0$ и $\boldsymbol{\omega}$ скорость какой-либо точки O, неизменно связанной с телом S, и угловую скорость движения вокруг оси, проходящей через эту точку; обозначим, далее, через u, v, w, p, q, r — характеристические величины состояния движения, т. е. проекции векторов $\boldsymbol{v}_0$ и $\boldsymbol{\omega}$ на оси некоторой системы $Oxyz$, неизменно связанной с твердым телом.

Возьмем опять известные выражения

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

для скоростей отдельных точек P_i твердого тела и подставим их в формулу (9), определяющую живую силу T, а квадраты скоростей отдельных точек представим в виде скалярных произведений вектора $\boldsymbol{v}$ на самого себя, т. е. $\boldsymbol{v}_i^2 = \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i$.

Полагая

$$\left.\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2} v_0^2 \sum_{i=1}^{N} m_i, \\ T'' &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \{\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP_i}\}^2, \\ T''' &= \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_0 \cdot \{\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP_i}\}, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

будем иметь

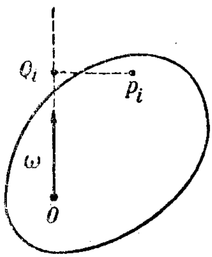
$$T = T' + T'' + T'''. \qquad (14)$$

Следует отметить, что это разложение T воспроизводит для случая твердого тела и для точки, неизменно связанной с ним, три члена, на которые в случае любой материальной системы разбивается живая сила в формуле (10), п. 7. Теперь мы выразим T' T'' и T''' через шесть характеристических величин.

Для первого слагаемого T', которое давало бы полную живую силу твердого тела, если бы движение было чисто поступательным, имеем непосредственно

$$T' = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m (u^2 + v^2 + w^2), \tag{13$_1$}$$

где, как обычно, через m обозначена полная масса твердого тела.



Фиг. 19.

Для того чтобы найти явное выражение второго слагаемого T'', которое давало бы полную живую силу, если бы точка O, неизменно связанная с твердым телом, была неподвижной, надо найти длину δ_i расстояния P_iQ_i (фиг. 19) любой точки P_i твердого тела от мгновенной оси вращения относительно системы осей с началом в точке O, т. е. от прямой, проходящей через O в направлении ω. Так как модуль вектора $\omega \times \overrightarrow{OP_i}$ равен $\delta_i\omega$, то, вынося ω^2 как общий множитель за скобки, найдем, что

$$T'' = \frac{1}{2} I\omega^2,$$

где

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i \delta_i^2$$

есть момент инерции твердого тела относительно мгновенной оси вращения, проходящей через O (т. I, гл. X, п. 18). Если α, β, γ суть направляющие косинусы этой оси, то момент инерции I определяется (упомянутое выше место, п. 22) равенством

$$I = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2A'\beta\gamma - 2B'\gamma\alpha - 2C'\alpha\beta,$$

где через A, B, C и A', B', C' обозначены моменты инерции и произведения инерции (центробежные моменты) твердого тела относительно осей $Oxyz$, неизменно связанных с ним. Если через x_i, y_i, z_i обозначим координаты точки P_i, то эти величины представятся в виде

$$A = \sum_{i=1}^{N} m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad B = \sum_{i=1}^{N} m_i (z_i^2 + x_i^2),$$

$$C = \sum_{i=1}^{m_i} m_i (x_i^2 + y_i^2),$$

$$A' = \sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i, \quad B' = \sum_{i=1}^{N} m_i z_i x_i, \quad C' = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i.$$

Так как направляющие косинусы мгновенной оси вращения определяются равенствами

$$\alpha = \frac{p}{\omega}, \quad \beta = \frac{q}{\omega}, \quad \gamma = \frac{r}{\omega},$$

то будем иметь

$$T'' = \frac{1}{2} I\omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2A'qr - 2B'rp - 2C'pq\} \qquad (13)_2$$

Переходя, наконец, к третьему слагаемому T''', заметим, что по известному свойству смешанного произведения (т. I, гл. I, п. 25) его можно написать в виде

$$T''' = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OP_i} \cdot (\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}).$$

После этого, вводя радиус-вектор $\overrightarrow{OG}$ центра тяжести G твердого тела, удовлетворяющий соотношению

$$m\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OP_i},$$

мы получим

$$T''' = m\overrightarrow{OG} \cdot (\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}) = m \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ u & v & w. \\ p & q & r \end{vmatrix}, \qquad (13)_3$$

где через x_0, y_0, z_0 обозначены координаты центра тяжести.

Из равенства (14) и из формул $(13)_1$, $(13)_2$, $(13)_3$ следует, что живая сила твердого тела в общем случае выражается в виде квадратичной формы от характеристических величин состояния движения u, v, w, p, q, r.

Важно обратить внимание на некоторые частные случаи установленных ранее общих формул.

Если центр приведения O (который в то же время является началом координат) выбирается в центре тяжести, а за оси координат принимаются соответствующие главные оси инерции, то будут равны нулю координаты x_0, y_0, z_0 центра тяжести, а вместе с ними и три произведения инерции (центробежные моменты): A', B', C', тогда как A, B, C будут теперь тремя главными центральными моментами инерции; поэтому для живой силы мы получим очень простое выражение

$$T = \frac{1}{2} m(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \qquad (15)$$

которое в согласии с теоремой Кёнига (п. 8) дает разложение T на сумму живой силы, которую имел бы центр тяжести, если бы в нем была сосредоточена вся масса m системы S, и живой силы твердого тела в его движении относительно центра тяжести.

10. Твердое тело, имеющее неподвижную точку или неподвижную ось. Если тело S закреплено в одной из своих точек, то достаточно выбрать эту точку O за центр приведения неизменяемой системы (и за начало осей, неизменно связанных с твердым телом), чтобы исчезли u, v, w и, следовательно, T' и T'''; тогда живая сила тела определится равенством

$$T = T'' = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2A'qr - 2B'rp - 2C'pq). \quad (16)$$

Если подвижные оси (неизменно связанные с твердым телом) совместить с главными осями инерции в закрепленной точке, то будем иметь еще более простое выражение:

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2). \quad (17)$$

Равенство (16), естественно, сохраняет свое значение также и в случае твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси a (лишь бы начало O подвижной системы было взято на этой прямой), но поскольку в этом случае угловая скорость ω неизменно сохраняет направление оси a, то, если совместить с этой осью вращения одну из неподвижных осей, например ось x, кроме величин u, v, w, будут равны нулю также q и r, так что равенство (16) получит вид

$$T = \frac{1}{2}Ap^2 \quad (18)$$

или же, так как $|\boldsymbol{\omega}| = p$,

$$T = \frac{1}{2}A\omega^2, \quad (18')$$

где A обозначает момент инерции твердого тела относительно оси вращения.

К этой формуле (18'), широко применяемой в приложениях, легко можно прийти и прямым элементарным путем. Достаточно припомнить, что для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси a с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, скорость точки P_i, расстояние которой от оси есть δ_i, по абсолютной величине определяется произведением $\delta_i\omega$ (п. 4), так что живая сила этой точки будет равна

$$\frac{1}{2}m_i\delta_i^2\omega^2;$$

отсюда, суммируя по всем точкам системы, получим для живой силы тела выражение

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{N} m_i \delta_i^2,$$

очевидно, совпадающее с выражением (18′).

11. Живая сила голономной системы в лагранжевых координатах. В динамике голономных систем существенная роль принадлежит выражению живой силы в лагранжевых координатах. Пусть дана голономная система из N точек $P_i (i = 1, 2, \ldots, N)$, имеющая n степеней свободы, тогда мы можем предположить (т. I, гл. VI, п. 1), что положения точек системы определяются параметрическими уравнениями вида (5)

$$P_i = P_i(q_1, q_2, \ldots, q_n | t), \quad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Взяв производную по времени, получим отсюда выражения для скоростей (возможных) $\boldsymbol{v}_i$ отдельных точек P_i (в функциях от координат q, лагранжевых скоростей $\dot{q}$ и времени t)

$$\boldsymbol{v}_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial P_i}{\partial t}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, N); \tag{19}$$

достаточно подставить эти выражения в равенство

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i,$$

чтобы видеть, что *живая сила голономной системы есть целая рациональная функция второй степени от $\dot{q}$ с коэффициентами, зависящими только от q и t.* Поэтому можно написать

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \tag{20}$$

где через T_2, T_1, T_0 обозначены соответственно совокупность членов второй степени относительно $\dot{q}$, совокупность членов первой степени относительно $\dot{q}$ и, наконец, совокупность членов, не зависящих от $\dot{q}$.

Если связи не зависят от времени, то выражения (19) скоростей $\boldsymbol{v}_i$ сводятся к их линейной однородной части относительно $\dot{q}$

$$\boldsymbol{v}_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \dot{q}_h, \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{19'}$$

и не будут больше содержать t в коэффициентах, поэтому T будет *квадратичной формой* относительно $\dot{q}$ с коэффициентами, зависящими только от координат q. Явное выражение T будет иметь вид

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\dot{q}_h \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_k}\dot{q}_k=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\frac{\partial P_i}{\partial q_k}\dot{q}_h\dot{q}_k;$$

достаточно изменить порядок суммирования и положить

$$a_{hk}=\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\frac{\partial P_i}{\partial q_k}=\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial q_h}\frac{\partial \xi_i}{\partial q_k}+\frac{\partial \eta_i}{\partial q_h}\frac{\partial \eta_i}{\partial q_k}+\frac{\partial \zeta_i}{\partial q_h}\frac{\partial \zeta_i}{\partial q_k}\right), \qquad (21)$$

чтобы заключить, что

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k, \qquad (22)$$

где коэффициенты a_{hk} зависят только от координат q.

Эта форма поэтому является общим выражением *живой силы голономной системы со связями, не зависящими от времени, и с n степенями свободы.*

Важно отметить, что эта квадратичная форма (22) в переменных $\dot{q}$ по своей природе является *определенной положительной*, т. е. остается большей нуля при каком угодно выборе аргументов $\dot{q}$, за исключением случая, когда исчезают все обобщенные скорости $\dot{q}$ и когда она становится равной нулю. Чтобы в этом убедиться, заметим, что живая сила T в силу своего определения (9) в функции от скоростей v_i остается всегда положительной, за исключением случая, когда исчезают все v_i; в этом случае форма (22) будет равна нулю. Остается поэтому только показать, что все $\dot{q}$ будут нулями тогда и только тогда, когда нулями будут и все v.

На основании соотношений (19′) мы непосредственно видим, что, когда $\dot{q}_h=0\ (h=1, 2, \ldots, n)$, то также и $v_i=0\ (i=1, 2, \ldots, N)$, а с другой стороны, мы видим, что равенство $v_i=0\ (i=1, 2, \ldots, N)$ может иметь место только в том случае, когда все скорости $\dot{q}$ удовлетворяют линейной однородной системе

$$\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial \xi_i}{\partial q_h}\dot{q}_h=0, \quad \sum_{h=1}^{n}\frac{\partial \eta_i}{\partial q_h}\dot{q}_h=0, \quad \sum_{h=1}^{n}\frac{\partial \zeta_i}{\partial q_h}\dot{q}_h=0 \quad (i=1, 2, \ldots, N),$$

из которой как раз и следует, что $\dot{q}_h=0\ (h=1, 2, \ldots, n)$, поскольку якобиева матрица от ξ, η, ζ по q вследствие предположения о независимости этих лагранжевых координат при любых значениях их должна иметь ранг n (т. I, гл. VI, п. 2). Заметим еще, что если в противоположность тому, что предполагалось ранее, связи зависят от времени, то те вычисления, которые только что привели нас к выражению для кинетической энергии T, дадут ее однородную квадратичную часть T_2.

Действительно, чтобы получить T_2, достаточно подставить в формулу (9) вместо каждого $\boldsymbol{v}_i$ не полное выражение (19), а только его однородную часть, которая формально тождественна с (19′), с той только разницей, что коэффициенты зависят, кроме q, еще и от t. Отсюда следует, что если мы и в этом случае введем обозначения (21), то сможем написать

$$T_2 = \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k, \tag{22'}$$

где, как и в только что указанной формуле, коэффициенты суть вполне определенные функции от q и времени.

Тем же путем, каким мы пришли к выражению (22), доказывается, что квадратичная форма T_2 также всегда будет определенной положительной.

Заметим еще, кроме того, что как в том, так и в другом случае определитель $\|a_{hk}\|$ из n коэффициентов a_{hk}, как дискриминант определенной (положительной) формы, не может обращаться в нуль тождественно. Действительно, если бы этот определитель был тождественно равен нулю, то существовало бы n значений $\dot{q}$, не исчезающих одновременно и удовлетворяющих n линейным однородным уравнениям

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{k=1}^{n} a_{hk}\dot{q}_k = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Умножая предыдущее равенство на $\dot{q}_h$ и суммируя почленно по h от 1 до n, мы для такой системы значений $\dot{q}$ имели бы

$$\sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = 0.$$

Это соотношение согласно теореме Эйлера сведется либо к равенству $T = 0$, если связи не зависят от времени, либо к равенству $T_2 = 0$ в случае связей, зависящих от времени. Это заключение противоречит характеру определенной (положительной) формы, который мы установили выше для T и T_2.

§ 3. Количество движения и момент количеств движения системы

12. Количество движения системы. *Количеством движения* (или также *импульсом*) системы в любой момент называется векторная сумма

$$\boldsymbol{Q} = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i \tag{23}$$

количеств движения, которые имеют в рассматриваемый момент отдельные точки P_i системы.

Если возьмем производную по времени от векторного равенства, определяющего положение центра тяжести G системы относительно некоторой *неподвижной* точки O (т. I, гл. X, п. 8)

$$m\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OP}_i,$$

то, обозначая через $\boldsymbol{v}_G$ скорость точки G, получим

$$m\boldsymbol{v}_G = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i$$

или же в силу определения (23)

$$\boldsymbol{Q} = m\boldsymbol{v}_G. \tag{24}$$

Поэтому имеем теорему:

Количество движения какой угодно материальной системы в любой момент равно количеству движения центра тяжести системы в этот момент, если бы он был такой материальной точкой, в которой сосредоточена вся масса системы.

13. Момент количеств движения системы. *Моментом количеств движения (или кинетическим моментом)* относительно какой-нибудь точки O какой угодно материальной системы S в любое мгновение называется результирующий момент относительно O всех количеств движения отдельных точек P_i системы (приложенных в соответствующих точках), т. е. векторная величина

$$\boldsymbol{K} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i. \tag{25}$$

Кинетической *парой* системы иногда называется всякая пара с моментом $\boldsymbol{K}$ (ср. т. I, гл. I, п. 48).

Так как количество движения $\boldsymbol{Q}$ и момент количеств движения $\boldsymbol{K}$ суть не что иное, как результирующая и результирующий момент относительно любой точки O системы векторов $m_i\boldsymbol{v}_i$, каждый из которых приложен в соответствующей точке P_i, то момент $\boldsymbol{K}'$ количеств движения относительно какой-нибудь другой точки O' определится равенством (т. I, гл. I, п. 33)

$$\boldsymbol{K}' = \boldsymbol{K} + \overrightarrow{O'O} \times \boldsymbol{Q}.$$

К другому результату, который не только интересен сам по себе, но и будет использован в дальнейшем (гл. V, п. 10), мы придем, если за центр приведения моментов возьмем центр тяжести G системы.

Если введем скорости $\boldsymbol{v}_i^{(r)}$ движения точек системы относительно G, то (согласно п. 7) будем иметь

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{v}_i^{(r)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Если теперь примем во внимание, что по самому определению центра тяжести

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{GP}_i = 0,$$

то, принимая за центр приведения центр тяжести, получим из формулы (25)

$$\boldsymbol{K} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{GP}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i^{(r)}.$$

Так как в правой части стоит результирующий момент относительно точки G *относительных* количеств движения $m_i\boldsymbol{v}_i^{(r)}$ отдельных точек системы, то заключаем, что *как бы система ни двигалась, момент (абсолютный) количеств движения относительно центра тяжести совпадает с аналогичным относительным моментом количеств движения по отношению к самому центру тяжести.*

14. Производная по времени от момента количеств движения системы. Для последующего важно иметь явное выражение производной по времени от момента количеств движения $\boldsymbol{K}$. Если через $\boldsymbol{v}'$ обозначить скорость точки O и через $\boldsymbol{a}_i$ — ускорение точки P_i, то из равенства (25) следует, что

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP}_i \times m_i \boldsymbol{a}_i + \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}') \times m_i \boldsymbol{v}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP}_i \times m_i \boldsymbol{a}_i + \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}' \times \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i;$$

Отсюда, замечая, что $\boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{v}_i$ тождественно равно нулю и принимая во внимание равенство (24), получим

$$\frac{dK}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP}_i \times m_i \boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{v}' \times Q. \tag{26}$$

Это и есть искомая формула.

Если центр приведения неподвижен ($\boldsymbol{v}' = 0$), то формула (26) упрощается и принимает вид

$$\frac{dK}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP}_i \times m_i \boldsymbol{a}_i. \tag{27}$$

Здесь особенно важно заметить, что формула (27) сохраняет свое значение даже и тогда, когда центр приведения O (не будучи, вообще говоря, неподвижным) в любой момент совпадает с центром тяжести системы. Действительно, в этом случае член $\boldsymbol{v}' \times Q$, появляющийся в общей формуле (26), будет тождественно равен нулю, потому что скорость $\boldsymbol{v}'$ центра приведения совпадает со скоростью $\boldsymbol{v}_G$ центра тяжести и вектор количества движения Q на основании формулы (24) коллинеарен с вектором $\boldsymbol{v}'$.

15. Количество движения и момент количеств движения твердого тела. Если движущаяся система S представляет собой твердое тело и за центр приведения O принимается точка, неизменно связанная с системой, то два вектора Q и K очень просто выражаются через характеристики u, v, w, p, q, r состояния движения системы, относящиеся к каким-нибудь подвижным (неизменно связанным с телом) осям $Oxyz$. Точнее можно сказать, *проекции векторов Q и K на оси $Oxyz$ равны частным производным от живой силы T твердого тела по переменным u, v, w и p, q, r соответственно.*

Действительно, возьмем равенство

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (v_i^2|_x + v_i^2|_y + v_i^2|_z)$$

и примем во внимание соотношения

$$\left.\begin{aligned} v_i|_x &= u + qz_i - ry_i, \\ v_i|_y &= v + rx_i - pz_i, \\ v_i|_z &= w + py_i - qx_i, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

которые получаются путем проектирования на оси векторного равенства $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}_i$. Рассматривая теперь T как функцию от u, v, w, p, q, r, составляющуюся при помощи выражений (28), возьмем от нее частную производную сначала по u. Так как согласно формулам (28) от u зависит только $v_i|_x$ и мы имеем

$$\frac{\partial v_i|_x}{\partial u}=1,$$

то получим тождество

$$\frac{\partial T}{\partial u}=\sum_{i=1}^{N} m_i v_i|_x,$$

правая часть которого есть не что иное, как проекция Q_x вектора Q на ось x. Поэтому, принимая во внимание результаты, которые получатся после круговой перестановки букв x, y, z и u, v, w, будем иметь:

$$Q_x=\frac{\partial T}{\partial u},\quad Q_y=\frac{\partial T}{\partial v},\quad Q_z=\frac{\partial T}{\partial w}. \tag{29}$$

Далее, если возьмем производную от T по p, то так как $v_i|_x$ не зависит, а $v_i|_y$ и $v_i|_z$ зависят от p, будем иметь

$$\frac{\partial v_i|_y}{\partial p}=-z_i,\quad \frac{\partial v_i|_z}{\partial p}=y_i.$$

Таким образом, приходим к тождеству

$$\frac{\partial T}{\partial p}=\sum_{i=1}^{N} m_i(-z_i v_i|_y+y_i v_i|_z)=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}(y_i m_i v_i|_z-z_i m_i v_i|_y),$$

в котором правая часть есть проекция K_x вектора K на ось x; при помощи круговой перестановки букв x, y, z и p, q, r получим

$$K_x=\frac{\partial T}{\partial p},\quad K_y=\frac{\partial T}{\partial q},\quad K_z=\frac{\partial T}{\partial r}. \tag{30}$$

Если мы не добавим никакого частного предположения ни о движении твердого тела, ни о его материальной структуре, ни о выборе подвижных осей, то для T необходимо принять общее выражение, даваемое равенствами (13) и (14) п. 9, и тогда для проекции векторов Q и K получатся следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} Q_x&=m(u+z_0q-y_0r),\\ Q_y&=m(v+x_0r-z_0p),\\ Q_z&=m(w+y_0p-x_0q),\end{aligned}\right\} \tag{29'}$$

$$\left.\begin{aligned} K_x&=Ap-C'q-B'r+m(y_0w-z_0v),\\ K_y&=-C'p+Bq-A'r+m(z_0u-x_0w),\\ K_z&=-B'p-A'q+Cr+m(x_0v-y_0u).\end{aligned}\right\} \tag{30'}$$

Заметим еще, что, применяя теорему Эйлера об однородных функциях к выражению живой силы T, рассматриваемому, как квадратичная форма от шести величин, характеризующих кинематическое состояние тела, и принимая во внимание уравнения (29), (30), мы получим для живой силы замечательное выражение

$$T=\frac{1}{2}\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{Q}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{K}.$$

Если полюс O совпадает с центром тяжести ($\boldsymbol{Q}=m\boldsymbol{v}_0$), то это выражение можно написать в виде

$$T=\frac{1}{2}mv_G^2+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{K}.$$

16. Канонические формы для проекции векторов $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{K}$. Твердое тело с закрепленной точкой или отнесенное к системе осей с началом в центре тяжести. Если за центр O приведения моментов (и начала подвижных осей) возьмем центр тяжести твердого тела, так что одновременно исчезнут x_0, y_0, z_0, то формулы (29′) приведутся к каноническому виду

$$Q_x=mu,\quad Q_y=mv,\quad Q=mw \tag{29″}$$

и будут выражать уже известное тождество вектора $\boldsymbol{Q}$ с количеством движения, которое имел бы центр тяжести, если бы в нем была сосредоточена вся масса m твердого тела (п. 12).

Что же касается проекций (30′) вектора $\boldsymbol{K}$, то очевидно, что в каждой из них последние члены сведутся к нулю как в том случае, когда центр приведения O совпадает с центром тяжести ($x_0=y_0=z_0=0$), так и в том случае, когда точка O тела закреплена в пространстве ($u=v=w=0$). Как в том, так и в другом случае равенства (30′) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} K_x&=Ap-C'q-B'r,\\ K_y&=-C'p+Bq-A'r,\\ K_z&=-B'p-A'q+Cr;\end{aligned}\right\} \tag{30″}$$

достаточно принять за подвижные оси три главные оси инерции относительно точки O (центр тяжести или закрепленная точка, неизменно связанная с телом), чтобы привести, наконец, проекции момента количеств движения к канонической форме:

$$K_x=Ap,\quad K_y=Bq,\quad K_z=Cr, \tag{30‴}$$

где A, B, C обозначают главные моменты инерции.

Формулы (30‴) и (29″) будут справедливы всякий раз, когда центр приведения совпадает с центром тяжести, но не в том случае, когда точка O будет закреплена в пространстве, так как тогда наряду с формулами (30''') для составляющих $\boldsymbol{Q}$ получатся выражения

$$Q_x = z_0 q - x_0 r, \quad Q_y = x_0 r - z_0 p, \quad Q_z = y_{0p} - x_0 q. \qquad (29''')$$

Важно отметить, что в этом последнем предположении (центр приведения закреплен) живая сила может быть представлена в виде

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{K},$$

тогда как в том случае, когда центр приведения совпадает с центром тяжести, это выражение даст живую силу T'' твердого тела, движущегося относительно своего центра тяжести.

17. Твердое тело гироскопической структуры относительно какой-либо его точки и гироскопы. В динамике твердых тел мы часто будем иметь случай обращаться к таким телам, для которых существует некоторая точка O, относительно которой эллипсоид инерции будет эллипсоидом вращения. Всякое такое твердое тело мы будем называть телом с *гироскопической структурой* относительно точки O, а ось симметрии соответствующего эллипсоида инерции будет называться *гироскопической осью*.

Если такое твердое тело отнесем к системе $Oxyz$, ось z которой совпадает с гироскопической осью, и обозначим, как обычно, через A, B, C (главные) моменты инерции твердого тела относительно осей x, y, z, то характеристическое условие гироскопической структуры определится равенством

$$A = B; \qquad (31)$$

отсюда, если введем моменты инерции относительно трех (главных) плоскостей:

$$yz, \; zx, \; xy,$$

т. е. суммы

$$s_1 = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i^2, \quad s_2 = \sum_{i=1}^{N} m_i y_i^2, \quad s_3 = \sum_{i=1}^{N} m_i z_i^2,$$

следует, что

$$s_1 = s_2 = \frac{1}{2} C, \quad s_3 = A - \frac{1}{2} C.$$

Предположим теперь, в частности, что точка O, относительно которой твердое тело имеет гироскопическую структуру, совпадает с его центром тяжести. Если на гироскопической оси z возьмем какую-нибудь другую точку O_1, для которой будет $OO_1 = z_0$, и рассмотрим систему $O_1 x_1 y_1 z$, в которой оси x_1, y_1 параллельны и одинаково направлены с осями x, y, то моменты инерции A_1, B_1,

C_1 твердого тела относительно новых осей в силу теоремы Гюйгенса (т. I, гл. X, п. 21) определятся равенствами

$$A_1 = A + mz_0^2, \quad B_1 = B + mz_0^2, \quad C_1 = C,$$

где m обозначает полную массу тела, так что мы будем иметь

$$A_1 = B_1. \tag{31'}$$

С другой стороны, если мы примем во внимание, что точка O есть центр тяжести, и, следовательно, статические моменты

$$\sum_{i=1}^{N} m_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{N} m_i y_i, \quad \sum_{i=1}^{N} m_i z_i$$

твердого тела относительно плоскостей yz, zx, xy равны нулю, то немедленно убедимся в том, что будут также равны нулю вместе с произведениями инерции A', B', C' относительно осей x, y, z аналогичные произведения A'_1, B'_1, C'_1 *) относительно осей x_1, y_1, z_1. Таким образом, мы видим, что x_1, y_1, z суть главные оси инерции твердого тела, которое на основании равенства (31') имеет поэтому гироскопическую структуру не только относительно центра тяжести, но также и относительно всякой другой точки O_1 его оси.

Иначе говоря, если центральный эллипсоид инерции есть эллипсоид вращения, то эллипсоиды инерции относительно всякой другой точки на его оси симметрии будут также эллипсоидами вращения.

И наоборот, достаточно, чтобы твердое тело имело гироскопическую структуру относительно какой-нибудь точки и чтобы ось симметрии соответствующего эллипсоида инерции проходила через центр тяжести, для того чтобы и центральный эллипсоид был эллипсоидом вращения.

Всякое тело, центральный эллипсоид инерции которого есть эллипсоид вращения, мы будем называть *гироскопом*.

Гироскопом, конечно, будет однородное тело вращения или вообще твердое тело, представляющее полную симметрию относительно некоторой оси, не только геометрическую, но и материальную. Ради краткости мы будем говорить в этих случаях, что речь идет о „гироскопах в узком смысле".

Вернемся к предположению, что твердое тело имеет гироскопическую структуру относительно одной своей точки O. Если эта

---

*) Действительно, эти величины представятся в виде

$$A'_1 = \sum m_i y_i (z_i - z_0) = \sum m_i y_i z_i - z_0 \sum m_i y_i = A' = 0,$$

$$B'_1 = \sum m_i (z_i - z_0) x_i = \sum m_i z_i x_i - z_0 \sum m_i x_i = B' = 0,$$

$$C'_1 = C' = 0,$$

так как статические моменты $\sum m_i y_i$ и $\sum m_i x_i$, как только что было сказано, равны нулю. *(Прим. ред.)*

точка неподвижна (или совпадает с центром тяжести), то уравнения (30′) на основании условия $A=B$ приведутся к следующим:

$$K_x=Ap,\quad K_y=Aq,\quad K_z=Cr,$$

так что если обозначим через $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{H}$ экваториальные составляющие векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{K}$, т. е. их составляющие в плоскости, перпендикулярной к гироскопической оси, то эти формулы можно будет заменить двумя равенствами (первое из которых векторное, второе — скалярное):

$$\boldsymbol{H}=A\boldsymbol{e},\quad K_z=Cr.$$

Далее, если обозначим через $\boldsymbol{k}$ единичный вектор гироскопической оси z (направленной в сторону, которая выбирается произвольно при выборе осей $Oxyz$), то для векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{K}$ будем иметь выражения

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{e}+r\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{K}=A\boldsymbol{e}+Cr\boldsymbol{k},$$

а отсюда, после исключения экваториальной составляющей $\boldsymbol{e}$ вектора $\boldsymbol{\omega}$, получатся два эквивалентных друг другу равенства, каждое из которых выражает один из двух векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{K}$ в функции от другого (и единичного вектора $\boldsymbol{k}$ гироскопической оси):

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{A}\boldsymbol{K}+\frac{A-C}{A}r\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{K}=A\boldsymbol{\omega}+(C-A)r\boldsymbol{k}.$$

Полученными выше формулами для какого угодно твердого тела гироскопической структуры мы будем неоднократно пользоваться в динамике твердого тела (гл. VII, VIII, IX). Важно отметить, что на основании того обстоятельства, что *всякая* пара взаимно перпендикулярных прямых, расположенных в экваториальной плоскости, вместе с гироскопической осью составляет тройку главных осей инерции, все эти формулы останутся в силе даже тогда, когда вместо осей $Oxyz$, неизменно связанных с твердым телом, будут выбраны оси Ox_1y_1z, вращающиеся по какому-нибудь закону вокруг гироскопической оси z (стереокинетическая система отсчета для тела с гироскопической структурой).

18. Геометрическое соответствие между векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{K}$. Обращаясь теперь к какому угодно твердому телу, отнесенному к одной из троек главных осей инерции $Oxyz$, возьмем снова скалярное произведение

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{K}=\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2), \tag{32}$$

которое, как мы знаем, дает живую силу твердого тела в его абсолютном движении или в его движении относительно центра тяжести, смотря по тому, будет ли центр O приведения моментов количеств движения закрепленной точкой (неизменно связанной с твердым телом), или центром тяжести твердого тела (п. 16). Обозначая эту живую силу в обоих случаях через T (в п. 9 во втором случае мы ее обозначали через T'') и принимая во внимание, что она по отношению к величинам p, q, r является определенной положительной формой, заключаем, что (кроме возможных моментов, когда исчезает $\boldsymbol{\omega}$ и, следовательно, в силу формул (30''), исчезает также и $\boldsymbol{K}$) *угол между двумя векторами* $\boldsymbol{\omega}$ *и* $\boldsymbol{K}$ *будет всегда острым.* Но наряду с этим чисто качественным результатом легко можно найти геометрическое построение, позволяющее определить направление одного из двух векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{K}$, когда известно направление другого.

С этой целью рассмотрим эллипсоид инерции твердого тела относительно точки O и заметим, что в соответствующем уравнении (отнесенном к главным осям инерции)

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1, \tag{33}$$

левая часть даст удвоенную живую силу $2T$, если вместо величин x, y, z подставить величины p, q, r.

Если величины p, q, r рассматривать как однородные координаты (пропорциональные направляющим косинусам) прямой, параллельной вектору $\boldsymbol{\omega}$, и принять во внимание полярные свойства эллипсоида инерции, то из соотношений (30)

$$K_x = \frac{\partial T}{\partial p}, \quad K_y = \frac{\partial T}{\partial q}, \quad K_z = \frac{\partial T}{\partial r}$$

будет видно, что проекции вектора $\boldsymbol{K}$ на оси x, y, z являются коэффициентами при x, y, z в уравнении диаметральной плоскости, сопряженной с направлением $\boldsymbol{\omega}$, или, другими словами, угловыми коэффициентами (пропорциональными направляющим косинусам) нормали к этой плоскости.

Поэтому можно сказать, что кинетический ***момент*** $\boldsymbol{K}$ ***всегда перпендикулярен к диаметральной плоскости эллипсоида инерции, сопряженной с направлением угловой скорости*** $\boldsymbol{\omega}$.

Если вспомним, что касательная плоскость к эллипсоиду (так же как и к какой угодно поверхности второго порядка) в любой точке сопряжена с диаметром, проходящим через точку касания, то можно сказать также, что ***момент*** $\boldsymbol{K}$ ***перпендикулярен к двум касательным плоскостям*** (друг другу параллельным) ***к эллипсоиду инерции в двух точках, в которых эллипсоид пересекается с диаметром, параллельным вектору*** $\boldsymbol{\omega}$.

Отсюда, в частности, следует, что векторы $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{\omega}$ будут параллельны тогда и только тогда, когда оба они имеют направление одной из главных осей или, в другом выражении, когда мгновенное вращение с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ происходит вокруг одной из главных осей инерции.

Установленное выше геометрическое свойство и качественная оценка, произведенная вначале, позволяют всегда определить направление и сторону какого-нибудь одного из двух векторов $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{\omega}$, если известны направление и сторона другого. Для того чтобы иметь линию действия (ориентированную) вектора $\boldsymbol{K}$, достаточно рассмотреть касательную плоскость к эллипсоиду инерции в какой-нибудь одной из двух точек, в которых он пересекается линией действия вектора $\boldsymbol{\omega}$ (приложенного в точке O) и провести из точки O перпендикуляр к этой плоскости в ту сторону, которая с $\boldsymbol{\omega}$ образует острый угол. И обратно, мы получим линию действия вектора $\boldsymbol{\omega}$, если возьмем какую-нибудь одну из касательных плоскостей к эллипсоиду, перпендикулярных к вектору $\boldsymbol{K}$, и направим прямую, соединяющую O с точкой касания в ту сторону, которая составляет с $\boldsymbol{K}$ острый угол.

Остается показать, что когда известна величина ω угловой скорости, можно вычислить величину K кинетического момента и обратно.

Если задана угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$, а следовательно, также и живая сила T, и требуется вычислить K, то достаточно обратиться к формуле (32), чтобы получить

$$K\omega\cos\alpha = 2T, \tag{32'}$$

где острый угол α считается известным на основании изложенных выше геометрических соображений.

Далее, если, предполагая известным $\boldsymbol{K}$, мы желаем найти величину ω угловой скорости, то можно прежде всего определить путем геометрического построения (ориентированную) линию действия вектора $\boldsymbol{\omega}$ и, следовательно, величину α (острого) угла между векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{K}$. Если, обозначая через Q точку, в которой эта линия действия в своем положительном направлении пересекает эллипсоид инерции, мы положим $\rho = OQ$ и примем во внимание, что направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{\omega}$ определяются отношениями $\frac{p}{\omega}$, $\frac{q}{\omega}$, $\frac{r}{\omega}$, то для координат точки Q получим выражения

$$\rho\frac{p}{\omega},\quad \rho\frac{q}{\omega},\quad \rho\frac{r}{\omega},$$

а отсюда, учитывая, что эти величины удовлетворяют уравнению (33) эллипсоида инерции, придем к соотношению

$$\frac{\omega^2}{\rho^2} = 2T. \tag{34}$$

Исключив из равенств (32') и (34) живую силу T, получим искомое выражение для ω:

$$\omega = K\rho^2\cos\alpha.$$

Здесь, наконец, имея в виду будущие приложения, полезно также вычислить расстояние δ от центра O эллипсоида до его касательной плоскости в точке Q. Очевидно, имеем

$$\delta = \rho \cos \alpha; \tag{35}$$

исключая ρ посредством равенства (34) и принимая во внимание равенство (32′), получим

$$\delta = \frac{\sqrt{2T}}{K}. \tag{36}$$

19. Векторная гомография инерции. Соответствие между двумя векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{K}$, которое мы только что изучали с геометрической точки зрения и которое по отношению к любым подвижным осям аналитически представляется равенствами (30″), а по отношению к главным осям инерции относительно точки O — равенствами (30‴), является первым примером тех взаимно однозначных соответствий между (переменными) векторами, которые по отношению к какой-нибудь системе отсчета устанавливаются путем определения составляющих одного из двух векторов в виде линейных функций от составляющих другого. Это так называемые *векторные гомографии (или аффинные преобразования)*; это название дал им Бурали-Форти, а Марколонго в последние годы развил их теорию[1]).

Векторные гомографии мы рассмотрим несколько подробнее в III томе, но уже теперь для удобства изложения условимся называть рассматриваемое здесь соответствие между векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{K}$ *(векторной) гомографией инерции* твердого тела *относительно его точки* O, выбранной за центр приведения. Векторную гомографию инерции, если рассматривать ее как однозначную операцию, которая, будучи приложена к вектору $\boldsymbol{\omega}$, даст в результате вектор $\boldsymbol{K}$, удобно выразить символом σ, полагая

$$\boldsymbol{K} = \sigma(\boldsymbol{\omega}).$$

Обратная операция, которая, будучи приложена к вектору $\boldsymbol{K}$, дает вектор $\boldsymbol{\omega}$, так же как и операция σ, однозначна, как мы видели в предыдущем пункте, и может быть выражена символом σ^{-1}, именно

$$\boldsymbol{\omega} = \sigma^{-1}(\boldsymbol{K}).$$

Оба предыдущих символических уравнения выражают в краткой форме, с одной стороны, уравнения (30″), относящиеся к любым подвижным осям, связанным с твердым телом, и уравнения, получающиеся в результате их решения, а с другой стороны, уравнения (30‴), относящиеся к главным осям инерции в точке O, и соответственно уравнения, представляющие собой решения уравнений (30‴).

[1]) См., в частности, Burali—Forti e Marcolongo, *Transformations linéaires*, Pavia, Mattei, 1912.

Уравнения (30''') вместе с их решениями

$$p=\frac{K_x}{A},\quad q=\frac{K_y}{B},\quad r=\frac{K_z}{C}$$

называются *каноническими уравнениями* гомографии; направления главных осей инерции, к которым относятся эти уравнения, называются иногда *главными направлениями гомографии*.

20. Твердое тело, имеющее неподвижную ось. Если твердое тело S вращается вокруг неподвижной прямой a, то удобно принять эту прямую, ориентированную как угодно, за одну из подвижных осей отсчета, например за ось x, и взять в одной из ее точек центр приведения O моментов; эту точку можно затем принять за начало подвижных осей. Благодаря этому обратятся в нуль все величины, характеризующие кинематическое состояние тела, за исключением p $(u=v=w=q=r=0,\ p\neq 0)$, а так как при неподвижном центре приведения O уравнения (29'''), (30'') п. 16 сохраняют свое значение, то для проекций количества движения $\boldsymbol{Q}$ и момента количеств движения $\boldsymbol{K}$ будем иметь выражения:

$$Q_x=0,\qquad Q_y=-z_0p,\qquad Q_z=y_0p; \tag{37}$$

$$K_x=Ap,\qquad K_y=-C'p,\qquad K_z=-B'p. \tag{38}$$

С точки зрения основной задачи динамики (определить движение, когда заданы активные силы) наиболее важным из этих шести элементов (как это мы увидим в гл. VII) является момент $K_a=K_x$ количеств движения относительно оси вращения. Обозначая, как обычно, через ω абсолютную величину угловой скорости, имеем $p=\pm\omega$, причем знак выбирается в зависимости от того, будет ли (в рассматриваемый момент) произвольно выбранное за положительное направление оси совпадать или не совпадать с направлением угловой скорости *).

Первое из уравнений (38) показывает, таким образом, что *момент количеств движения относительно оси вращения выражается произведением* $\pm\omega$ *на* A (момент инерции тела относительно той же оси), где нужно взять знак плюс, если ось вращения ориентирована таким образом, что в рассматриваемый момент вращение твердого тела по отношению к ней оказывается правым.

Не лишним будет показать, как к этому выражению K_a можно прийти элементарным путем.

Действительно, заметим, что если речь идет о вращательном движении вокруг оси a, то скорость точки P_i, расстояние которой от оси есть δ_i, имеет величину $\omega\delta_i$ и направлена перпендикулярно к плоскости P_ia; так как δ_i есть кратчайшее расстояние линии

*) Если под ω подразумевают не модуль вектора ω, а его проекцию на ось, то необходимость постановки двойного знака отпадает. *(Прим. ред.)*

действия скорости от оси, то момент этой скорости относительно оси будет равен $\omega\delta_i^2$, причем не только по абсолютной величине, но и по знаку, если ось ориентирована в ту сторону, с какой вращение в рассматриваемый момент оказывается правым. В силу этого момент относительно оси a количества движения материальной точки P_i при указанном выборе направления оси равен $m_i\omega\delta_i^2$; суммируя по всем точкам системы, найдем снова формулу

$$K_a = \omega \sum_{i=1}^{N} m_i\delta_i^2,$$

которая совпадает с ранее полученной, так как $\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\delta_i^2$ есть момент инерции твердого тела относительно оси вращения. Если направление этой оси меняется на обратное, то в правой части, естественно, надо будет изменить знак.

Если через θ обозначить угол, который полуплоскость, выходящая из a и неизменно связанная с телом, образует с аналогичной полуплоскостью, неподвижной в пространстве (этот угол будем считать положительным при правом вращении вокруг a), то можно будет написать

$$K_a = A\dot{\theta},$$

так как, согласно определению угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, $\dot{\theta}$ есть ее проекция на ось a (т. I, гл. III, п. 8).

§ 4. Система отсчета для какой угодно материальной системы, соответствующая наименьшей кинетической энергии

21. Относительный характер живой силы, уже отмеченный в п. 6, приводит к рассмотрению некоторого особого класса систем отсчета для любой материальной системы.

Предположим, что движение некоторой системы S определено относительно осей $\Omega\xi\eta\zeta$, которые для простоты назовем неподвижными, и поставим себе задачу определить такую систему отсчета, относительно которой живая сила системы будет наименьшей.

Заметим теперь же, что если некоторый триэдр обладает этим свойством, то то же будет иметь место и для всякого другого триэдра, неподвижного относительно первого, так что все сводится к выяснению того, каким должно быть движение искомой системы отсчета $Oxyz$ относительно неподвижной системы $\Omega\xi\eta\zeta$. Для этой цели достаточно указать характеристические векторы $\boldsymbol{v}_0 = d_aO/dt$ и $\boldsymbol{\omega}$ движения осей $Oxyz$, где d_a/dt обозначает (абсолютную) производную, относящуюся к осям $\Omega\xi\eta\zeta$.

Теорема Кёнига позволяет непосредственно заключить, что должно быть

$$\frac{d_aO}{dt}=\frac{d_aG}{dt},$$

где G, как обычно, обозначает центр тяжести системы. Действительно, в силу этой теоремы живая сила системы S относительно системы осей $Oxyz$ состоит из живой силы относительно центра тяжести, увеличенной на *существенно положительное слагаемое*

$$\frac{1}{2}m\left[\frac{d_a\overrightarrow{OG}}{dt}\right]^2,$$

где m обозначает полную массу системы S, так что искомая система отсчета должна иметь начало O неподвижным относительно центра тяжести G, или, несколько точнее, относительно системы $G\xi\eta\zeta$ с началом в G и с неизменными направлениями осей.

Условимся называть *абсолютными* кинематические величины, которые относятся к этим последним осям, и *относительными* кинематические величины, относящиеся к неизвестной системе осей, обладающей указанным выше свойством.

Относительную скорость какой-нибудь точки $P_i\,(i=1,\,2,\,\ldots,\,N)$ системы можно представить в виде $\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{w}_i$, где $\boldsymbol{v}_i$ есть аналогичная абсолютная скорость, которую мы можем считать известной, а

$$\boldsymbol{w}_i=\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{GP_i}\quad(i=1,\,2,\,\ldots,\,N)\tag{39}$$

есть соответствующая переносная скорость. Отсюда для относительной живой силы находим выражение

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i(\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{w}_i)^2.$$

Далее, из анализа известно, что для того, чтобы T, рассматриваемая как функция угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ (или соответствующих абсолютных ее составляющих π, χ, ρ), имела минимум при данном значении $\boldsymbol{\omega}$, необходимо, чтобы при любом бесконечно малом приращении $\delta\boldsymbol{\omega}$ вектора $\boldsymbol{\omega}$ исчезала соответствующая вариация T.

Так как T зависит от $\boldsymbol{\omega}$ только через посредство $\boldsymbol{w}_i$, то эта вариация определяется равенством

$$\delta T=-\sum_{i=1}^{N}m_i(\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{w}_i)\cdot\delta\boldsymbol{w}_i,$$

где в силу соотношения (39)

$$\delta\boldsymbol{w}_i=\delta\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{GP_i}\qquad(i=1,\,2,\ldots,\,N);$$

поэтому, подставляя эти выражения вместо $\delta \boldsymbol{w}_i$ и переставляя множители смешанного произведения, получим

$$\delta T = -\delta \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{GP} \times m_i (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{w}_i).$$

Полученная вариация δT будет равна нулю при любом значении $\delta \boldsymbol{\omega}$ в том и только в том случае, если выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{GP_i} \times m_i (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{w}_i) = 0. \tag{40}$$

Отсюда заключаем, *что искомая система осей должна быть такой, чтобы в движении по отношению к ней кинетический момент материальной системы относительно центра тяжести был равен нулю* [1]).

Следует заметить, что равенство (40) в силу соотношения (39) приводит к трем линейным уравнениям относительно трех неизвестных проекций π, χ, ρ угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, которые определяются из этих уравнений однозначно. Это можно видеть и не производя вычислений, если мысленно спроектировать уравнение (40) на главные оси инерции $G\xi\eta\zeta$, проходящие через центр тяжести.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что если в любой момент движение твердого тела является винтовым, то элементарная работа центробежных сил (отнесенных к мгновенной винтовой оси) равна нулю.

2. Диск произвольного вида (т. е. ограниченный произвольной кривой) движется в своей плоскости, катясь без скольжения по прямой l. Пусть ω есть угловая скорость диска в любой момент и v — абсолютная величина скорости центра тяжести G. Показать, что, обозначая через ρ расстояние от центра тяжести G диска до точки P касания диска с прямой l и через δ радиус инерции диска относительно оси, перпендикулярной к его плоскости и проходящей через центр тяжести, будем иметь

$$v^2 = \frac{\rho^2}{\delta^2 + \rho^2} \omega^2.$$

Достаточно приравнять два выражения, которые получатся для живой силы диска, когда за центр приведения берется точка касания или центр тяжести.

---

[1]) В случае твердого тела это будет иметь место для всякой системы осей, неизменно связанной с телом. Аппелль, пытаясь распространить некоторые свойства, которыми обладают системы осей, неизменно связанные с твердым телом, на какие угодно системы осей, был вынужден исходить из условия (40), выражающего обращение в нуль кинетического момента относительно центра тяжести в относительном движении (*Comptes Rendus*, т. 166, 1918, стр. 513—516). Вывод условия (40), приведенный в тексте, был сообщен авторам устно Альманси.

3. Определить структурные условия, при которых твердое тело, закрепленное в его точке O, при движении около этой точки имеет живую силу, пропорциональную квадрату угловой скорости.

Прежде всего заметим, что кинетическое условие того, что отношение T/ω^2 не должно зависеть от величины угловой скорости и направления мгновенной оси тела, означает, что эллипсоид инерции относительно точки O сводится к шару. Таким образом, мы прямо переходим к вопросу чистой геометрии масс. Для того чтобы существовала такая точка, необходимо и достаточно, чтобы центральный эллипсоид инерции был сплюснутым эллипсоидом вращения. В этом случае существуют две точки O, обе лежащие на оси симметрии эллипсоида на расстоянии c от центра тяжести, связанном с полной массой m и с главными моментами инерции (экваториальным и полярным) A и C соотношением

$$A + mc^2 = C.$$

4. Показать, что всякое твердое тело с двумя плоскостями симметрии есть гироскоп.

5. Когда мгновенная винтовая ось и центральная ось q количеств движения совпадают?

Эти оси соответственно параллельны (при обозначениях пп. 9 и 10) векторам $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{Q} = m\boldsymbol{v}_G$, так что прежде всего вектор $\boldsymbol{v}_G$ должен быть параллелен вектору $\boldsymbol{\omega}$. Это показывает, что при допущенном предположении мгновенная винтовая ось и, следовательно, центральная ось q проходят через центр тяжести G. После этого необходимо и достаточно, чтобы результирующий момент $\boldsymbol{K}$ количеств движения относительно центра тяжести G, взятого за центр приведения, был параллелен вектору $\boldsymbol{Q}$ и, следовательно, вектору $\boldsymbol{\omega}$. А для этого необходимо и достаточно, чтобы три главных центральных момента инерции были равны между собой.

6. Три материальные точки: P, P_1, P_2 с массами m, m_1, m_2 движутся по плоскости; точки P_1 и P_2 связаны с точкой P двумя твердыми стержнями, могущими свободно вращаться вокруг P, длиной l_1, l_2. Мы имеем здесь, очевидно, голономную систему с четырьмя степенями свободы. Определить живую силу системы T, пренебрегая массой стержней и принимая за параметры Лагранжа координаты x, y точки P относительно какой-нибудь декартовой системы Oxy в плоскости движения и углы θ_1, θ_2, образованные прямыми PP_1 и PP_2 с осью Ox.

Ответ:

$$2T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \sum_{i=1}^{2} m_i \{(\dot{x} - l_i \sin\theta_i \dot{\theta}_i)^2 + (\dot{y} + l_i \cos\theta_i \dot{\theta}_i)^2\}.$$

7. Если характеристикам u, v, w, p, q, r состояния движения твердого тела придадим бесконечно малые приращения δu, δv, ..., δr, то живая сила T получит приращение, которое по теореме о полном дифференциале определится равенством

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial u}\delta u + \frac{\partial T}{\partial v}\delta v + \frac{\partial T}{\partial w}\delta w + \frac{\partial T}{\partial p}\delta p + \frac{\partial T}{\partial q}\delta q + \frac{\partial T}{\partial r}\delta r.$$

С другой стороны, обозначив через $\delta\boldsymbol{v}_0$ и $\delta\boldsymbol{\omega}$ соответствующие приращения двух характеристических векторов $\boldsymbol{v}_0$ и $\boldsymbol{\omega}$, для скорости любой точки P_i твердого тела будем иметь

$$\delta\boldsymbol{v}_i = \delta\boldsymbol{v}_0 + \delta\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

После этого, отправляясь от выражения

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i^2$$

и принимая во внимание определение векторов $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{K}$, вычислить выражение приращения δT. Сравнение с предыдущим приведет к формулам (29), (30) п. 15.

8. Рассматривая квадратичную форму T, выражающую живую силу твердого тела через характеристики u, v, w, p, q, r, обозначим через (T) взаимную форму, т. е. квадратичную форму, получающуюся из T, если вместо шести указанных выше аргументов вводятся шесть их линейных комбинаций:

$$Q_x=\frac{\partial T}{\partial u},\quad Q_y=\frac{\partial T}{\partial v},\quad Q_z=\frac{\partial T}{\partial w},\quad K_x=\frac{\partial T}{\partial p},\quad K_y=\frac{\partial T}{\partial q},\quad K_z=\frac{\partial T}{\partial r}.$$

Предполагается, что эти линейные комбинации независимы. Проверить прежде всего, что это условие достаточно и что поэтому произвольным приращениям δu, δv, ..., соответствуют вполне определенные приращения δQ_x, δQ_y, ..., δK_z, и обратно. По теореме Эйлера об однородных функциях имеем

$$2T=\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{\omega}.$$

Отсюда и из соотношения $\delta(T)=\delta T$ получим

$$\delta(T)=\boldsymbol{v}_0\cdot\delta\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{\omega}\cdot\delta\boldsymbol{K},$$

а также выражения для кинетических характеристик $u, v, \ldots r$, которые являются производными от (T).