Глава V

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ О ДВИЖЕНИИ СИСТЕМЫ. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА. НЕГОЛОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Общие сведения

1. Основной задачей динамики является *определение движения какой угодно материальной системы при заданных действующих силах.*

Для уточнения самой формулировки этой задачи необходимы некоторые предварительные сведения. Будем при этом пользоваться аналогией со случаем одной материальной точки, пока это не вызовет противоречий.

Если, как обычно, обратимся к системе S из N материальных точек P_i $(i=1, 2, \ldots, N)$, то всякая система действующих сил будет состоять из сил, приложенных к N точкам системы. Эту систему сил на основании постулата о независимости действия сил (т. I, гл. VII, п. 12) можно свести к N силам, приложенным соответственно к N точкам P_i, заменяя для каждой из них все различные действующие на нее силы их равнодействующей. Имея это в виду, мы будем считать известной систему сил, действующих на материальную систему, всякий раз, как для каждой точки P_i будет задана равнодействующая приложенных к ней сил в функции от конфигурации системы, от скоростей всех N точек в данный момент и от времени (ср. т. I, гл. VII, п. 22).

Если, как в задаче небесной механики для N тел (гл. III, п. 22), эти N точек P_i свободны и задана, в только что указанном смысле, система действующих на них сил, то задачу о движении тотчас же можно будет выразить в уравнениях.

Действительно, применяя к каждой из N точек основное уравнение динамики, мы получим N векторных уравнений

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i \qquad (i=1, 2, \ldots, N), \tag{1}$$

где $\mathbf{F}_i$ обозначает заданную равнодействующую всех сил, приложенных к точке P_i, m_i — массу этой точки и $\mathbf{a}_i$ — ее неизвестное ускорение, отнесенное к галилеевой системе отсчета $\Omega\xi\eta\zeta$ (т. е. к системе, которая относительно звезд неподвижна или движется поступательно и притом прямолинейно и равномерно). Если ξ_i, η_i, ζ_i суть координаты точки P_i и X_i, Y_i, Z_i — составляющие силы $\mathbf{F}_i$ в этой системе, то векторные уравнения (1), если их спроектировать на три оси $\Omega\xi\eta\zeta$, дадут $3N$ скалярных уравнений:

$$m_i \ddot{\xi}_i = X_i, \quad m_i \ddot{\eta}_i = Y_i, \quad m_i \ddot{\zeta}_i = Z_i, \qquad (i=1, 2, \ldots, N), \tag{1'}$$

где X_i, Y_i, Z_i по предположению обозначают некоторые известные функции от $6N+1$ аргументов

$$\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i;\ \dot{\xi}_i,\ \dot{\eta}_i,\ \dot{\zeta}_i;\ t \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Следовательно, речь идет о системе $3N$ обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с $3N$ неизвестными функциями ξ_i, η_i, ζ_i от одной независимой переменной t; задача о движении N свободных точек P_i при заданной системе сил приводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений (1′).

Это интегрирование, как известно, вообще говоря, не может быть выполнено в конечном виде при помощи элементарных способов. Но на основании известных теорем о существовании[1]) можно утверждать, что при достаточно широких условиях для функций X_i, Y_i, Z_i система (1′) имеет общий интеграл, зависящий от $6N$ произвольных постоянных.

Следовательно, можно сказать, что для N свободных точек P_i при заданных силах возможны ∞^{6N} различных движений; из них можно выделить одно, задавая соответствующие начальные условия, например задавая произвольно положение системы и ее кинематическое состояние в начальный момент.

2. Рассмотренный случай системы из N *свободных* точек встречается в физической действительности только в упомянутой выше задаче небесной механики (в которой система сил, как мы знаем, принадлежит не к общему виду, как предположено в предыдущем пункте, а представляет собой систему позиционных сил). В огромном же большинстве конкретных вопросов приходится рассматривать *материальные системы со связями.*

Далее, если система из N материальных точек P_i с какими угодно связями находится под действием системы сил, то, основываясь на постулате о реакциях связей (т. I, гл. VII, п. 10), мы можем принять, что действие, оказываемое связями при заданных силах на каждую точку системы, можно заменить некоторой силой, которую называют реакцией связи.

После этого, на основании только что упомянутого постулата, можно рассматривать систему S как систему, состоящую из N свободных точек, каждая из которых находится под совокупным действием равнодействующей прямо приложенных к ней сил и равнодействующей реакций, которыми заменяется действие связей.

Отсюда следует, что также и в более общем случае систем со связями остаются в силе основные уравнения (1) *при условии, что каждая из сил F_i рассматривается как равнодействующая*

---

[1]) Вспомним подстрочное примечание к п. 18 главы II первого тома русского издания.

активных сил и реакций, под действием которых находится соответствующая точка P_i.

Таким образом, между рассматриваемым случаем и случаем, который был разобран в предыдущем пункте, имеется существенное различие. Здесь, помимо активных сил, оказываются известными только способы реализации связей, но не соответствующие реакции, которые вследствие этого являются *вспомогательными неизвестными*. Эти неизвестные входят в виде явных слагаемых в правые части уравнений (1). Отсюда следует, что уравнения (1) в случае движения системы со связями представляют собой только предварительную постановку задачи; поэтому в динамике приходится отыскивать способы, которые позволили бы исключить из уравнений (1) в наиболее общих возможных случаях реакции и таким образом для определения движения дать дифференциальные уравнения, зависящие только от прямых данных рассматриваемой задачи.

3. В предыдущем пункте в силу логической необходимости нам пришлось разделить действующие на систему силы на *силы прямо приложенные*, или *активные*, и *силы связей*, или *реакции*.

Этой классификации можно противопоставить другую (которая была введена уже в статике и к которой мы возвращались в п. 3 предыдущей главы) классификацию этих же сил: разделение их на *внешние* и *внутренние*. Здесь, имея в виду важность такого различения сил, напомним, хотя это может показаться почти излишним, что *внутренними силами* называются силы, с которыми на каждую отдельную точку системы действуют другие точки той же системы (в частности, точки, соседние с ней), *внешними* же мы называли все остальные силы (происходящие от внешних влияний на систему).

Чтобы избежать опасной путаницы, мы тотчас же условимся, что эта вторая классификация сил не зависит от первой. Для некоторых частных систем, как, например, для свободного твердого тела, находящегося под действием силы тяжести и поверхностных растягивающих или сжимающих сил, обе классификации приводят к одному и тому же распределению сил; в этом случае активные силы (вес и поверхностные силы) являются внешними, а реакции (силы связей твердого тела) — внутренними. Но достаточно подумать о связях, осуществляемых посредством соединений системы с внешними по отношению к ней телами (например, подвешенное или опертое твердое тело), а с другой стороны, о силах, происходящих не от связей, но возбуждаемых искусственными приспособлениями или возникающих в естественных физических условиях (например, ньютонианское притяжение между материальными элементами движущейся системы), чтобы видеть, что, вообще говоря, *и активные силы, и силы реакции могут быть как внешними, так и внутренними.*

4. Две указанные выше классификации сил, действующих на материальную систему, играют важную роль в динамике, поскольку с каждой из них связывается целая группа общих теорем и последующих конкретных приложений. Не будет поэтому лишним вспомнить, что аналогичные обстоятельства имели место в статике, где сначала, разделив силы на внешние и внутренние, мы пришли к *основным условиям равновесия* (т. I, гл. XII), приложимым в качестве необходимых к всевозможным типам материальных систем (например, к стержневым системам, нитям и т. д., гл. XIV) и, в частности, являющимся достаточными для равновесия твердого тела (гл. XIII) затем в общей статике (гл. XV), отправляясь от разделения сил на активные силы и реакции и присоединяя ограничительные предположения о природе связей (отсутствие трения), мы пришли, применяя принцип виртуальной работы, к исключению неизвестных реакций из условий равновесия.

В настоящей главе мы будем придерживаться, применительно к вопросам динамики, того же порядка изложения. В § 2 на основании разделения сил, действующих на какую-нибудь систему, на внешние и внутренние мы установим два векторных уравнения (*основные уравнения движения*), применяя которые к любой возможной системе мы придем к весьма разнообразным выводам и которые в случае твердого тела, как мы это увидим в гл. VII будут *достаточны* для определения движения.

В §§ 3—6, наоборот, мы будем исходить из деления сил на активные силы и реакции связей и покажем, в предположении отсутствия трения, как и в этом динамическом случае принцип виртуальной работы позволит исключить из дифференциальных уравнений движения в самом общем виде неизвестные реакции. Мы придем таким образом к классическим уравнениям Лагранжа (§ 6) и посредством ряда дополнительных выводов и конкретных примеров покажем их огромную важность как в теоретических вопросах, так и для приложений (§§ 7—9).

§ 2. Теоремы о количестве движения и о моменте количеств движения. Основные уравнения движения

5. Теорема о количестве движения. Рассматривая материальную систему S из N точек P_i ($i=1, 2, \ldots, N$) с произвольными связями, находящуюся под действием каких угодно сил, разобьем совокупность *всех* сил, действующих на систему (как прямо приложенных, так и реакций связей), на *внешние* и *внутренние* и обозначим через $\boldsymbol{F}_i$ равнодействующую всех внешних сил, действующих на любую точку P_i, а через $\boldsymbol{f}_i$ — равнодействующую всех внутренних сил. Полная сила, действующая на точку P_i, будет равна $\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{f}_i$, так что уравнения движения системы можно будет написать в виде

$$m_i\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{f}_i \qquad (i=1, 2, \ldots, N). \tag{2}$$

Но внутренние силы f_i вследствие самой природы их составляют на основании принципа о равенстве действия и противодействия (т. I, гл. XII, § 1) систему векторов, эквивалентную нулю (т. е. имеющую равную нулю результирующую и результирующий момент). Отсюда следует, что, складывая почленно N уравнений (2), мы получим

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i$$

или же, обозначая через $\boldsymbol{R}^{(e)}$ результирующую всех внешних сил,

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \boldsymbol{R}^{(e)};$$

достаточно вспомнить определение количества движения (предыдущая глава, п. 12)

$$\boldsymbol{Q} = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i,$$

чтобы придать предыдущему соотношению вид

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \boldsymbol{R}^{(e)}. \qquad (3)$$

Поэтому имеем (теорема о количестве движения или импульса), что *производная от количества движения какой угодно материальной системы в любой момент равна результирующей внешних сил.*

6. Теорема о движении центра тяжести. Если мы примем во внимание (предыдущая глава, п. 12), что

$$\boldsymbol{Q} = m\boldsymbol{v}_G,$$

где m — полная масса системы и $\boldsymbol{v}_G$ — скорость центра тяжести G, то равенство (3), обозначая через $\boldsymbol{a}_G$ ускорение точки G, можно будет написать в виде

$$m\boldsymbol{a}_G = \boldsymbol{R}^{(e)}. \qquad (3')$$

Мы имеем здесь так называемую теорему о движении центра тяжести:

Какова бы ни была рассматриваемая материальная система и каковы бы ни были силы, под действием которых она находится, центр тяжести ее движется так, как если бы он был материальной точкой, в которой сосредоточена вся масса системы и которая находится под действием результирующей всех внешних сил, действующих на систему.

С аналитической точки зрения эта теорема является только другой формой теоремы о количестве движения, но по своему смыслу она более выразительна. В частности, для всякой системы она обнаруживает существование точки (внутренней), т. е. центра тяжести, движение которой строго следует закону движения материальной точки; тем самым оправдывается замена тела с конечными размерами простой материальной точкой не только в тех случаях, когда этими размерами можно пренебречь, но даже и тогда, когда размеры тела значительны, но достаточно принять во внимание движение только одной его точки.

7. В виде простейшего приложения теоремы о движении центра тяжести рассмотрим тело, обладающее *внутренней* структурой, сколь угодно сложной, и находящееся исключительно под действием силы тяжести, например животное, падающее в пустоте. Теорема предыдущего пункта в этом случае показывает, что никакие внутренние приспособления, а в случае животного — никакие мускульные усилия не в состоянии изменить траекторию центра тяжести; действительно, все возникающие при этом силы, как бы они ни были разнообразны и велики, остаются все же только внутренними, и центр тяжести будет описывать параболу, определяемую действием только силы тяжести.

Для избежания недоразумений не лишне подчеркнуть, что это совершенно не исключает возможности полета; действительно, в этом случае существенную роль играет воздух, и посредством крыльев или каких-либо других средств вызывается также и внешнее *воздействие* на рассматриваемую систему.

8. Если для какой-нибудь системы S результирующая $\mathbf{R}^{(e)}$ внешних сил постоянно равна нулю, то из уравнения (3′) следует, что $a_G = 0$, т. е. *центр тяжести движется прямолинейно и равномерно.*

Это и есть так называемая *теорема о сохранении движения центра тяжести.* Она, например, должна иметь силу, по крайней мере приблизительно, для солнечной системы, поскольку можно пренебречь действиями со стороны звезд, так как эти действия вследствие огромных расстояний оказываются ничтожными по сравнению со взаимными притяжениями между Солнцем и планетами. Действительно, на основании оценки среднего движения из большого числа астрономических наблюдений найдено, что центр тяжести солнечной системы, расположенный вблизи от центра Солнца, движется со скоростью 20 *км/сек* к некоторой точке небесной сферы, расположенной вблизи от Веги и называемой *апексом.*

9. Возвращаясь к какой угодно системе, предположим вообще, что составляющая $R_a^{(e)}$ результирующей $\mathbf{R}^{(e)}$ по некоторому определенному направлению a постоянно равна нулю. В таком случае, проектируя на это направление уравнение (3′), получим $a_{G|a}=0$ или $\frac{dv_{G|a}}{dt}=0$; отсюда заключаем, что *во время движения системы проекция $v_{G|a}$ скорости центра тяжести на направление a остается постоянной.*

Эти столь простые и в то же время столь общие результаты очень часто используются для конкретных приложений. Чтобы указать в виде примера на одно следствие из последнего замечания, докажем, что если бы не было трения, то нельзя было бы ходить; точнее, человек, стоящий вертикально на горизонтальном, абсолютно гладком полу, не смог бы ни при каком мускульном усилии перейти в другое место, если бы он вначале был в покое.

Действительно, так как трение отсутствует, то внешние силы (вес и реакция пола) обе вертикальны, так что для любого горизонтального направления a мы имеем $v_{G|a}=\mathrm{const}$, а так как человек вначале предполагается находящимся в покое, то для него постоянно имело бы место равенство $v_{G|a}=0$, т. е. горизонтальная проекция центра тяжести оставалась бы неподвижной. Этот человек, следовательно, никоим образом не смог бы вызвать собственного перемещения в каком нибудь горизонтальном направлении: если он переместит какую-нибудь часть своего тела в одном направлении, то какая-нибудь другая часть его тела необходимо должна будет переместиться в противоположном направлении (что вызвало бы — самое большее — подъем или опускание центра тяжести вдоль вертикали). В действительности это теоретически возможное положение не имеет места, и движение удается начать, используя трение.

10. Теорема о моменте количеств движения. Возьмем снова основное уравнение (2)

$$m_i a_i = F_i + f_i \qquad (i=1,\ 2, \ldots,\ N)$$

и будем рассматривать в качестве центра приведения некоторую точку O, *движущуюся по какому-нибудь определенному закону* или, в частности, *находящуюся в покое* (относительно нашей системы отсчета).

Если, далее, умножим векторно это уравнение (2) на $\overrightarrow{OP_i}$ и просуммируем обе части по i от $i=1$ до $i=N$, помня, что результирующий момент внутренних сил f_i относительно любой точки O постоянно равен нулю, то получим

$$\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP_i} \times m_i a_i = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP_i} \times F_i,$$

где в правой части остается только результирующий момент внешних сил F_i относительно точки O, который мы обозначим через $\boldsymbol{M}^{(e)}$.

Но в п. 14 предыдущей главы было показано, что если обозначить через K результирующий момент количеств движения системы и через v' скорость (относительно нашей системы отсчета) центра приведения O, то будем иметь тождественно

$$\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP}_i \times m_i a_i = \frac{dK}{dt} + v' \times Q.$$

Поэтому предыдущее соотношение можно написать в особенно удобной форме

$$\frac{dK}{dt} + v' \times Q = M^{(e)}; \tag{4}$$

Это уравнение сохраняет свое значение при каком угодно законе движения центра приведения O. Но в общих выводах динамики оно чаще всего применяется для двух частных случаев: 1) когда центр O неподвижен; 2) когда центр O, будучи, вообще говоря, движущимся, совпадает во все время движения с центром тяжести материальной системы. В обоих случаях (так как в первом имеем $v' = 0$, а во втором вектор Q параллелен v') исчезает член $v' \times Q$ (ср. предыдущую главу, п. 14) и уравнение (4) принимает более простой вид

$$\frac{dK}{dt} = M^{(e)}; \tag{4'}$$

в этом виде оно вполне соответствует уравнению (3). Уравнение (4') выражает теорему о моменте количеств движения (или кинетическом моменте):

Как бы ни двигалась материальная система, производная по времени от момента количеств движения относительно какой-нибудь неподвижной точки или точки, совпадающей с центром тяжести, в любой момент равна результирующему моменту всех внешних сил относительно той же точки.

Эта теорема доказана здесь при единственном неявном предположении, что движение системы отнесено к осям, неподвижным относительно неподвижных звезд или, по крайней мере, находящимся относительно их в прямолинейном и равномерном поступательном движении.

Но мы знаем (предыдущая глава, п. 13), что если за центр приведения принять центр тяжести, то момент количеств движения (абсолютный) системы совпадет с моментом количеств движения относительно центра тяжести; поэтому уравнение (4') будет справедливо даже и тогда, когда вместо K берется этот последний момент, лишь бы результирующий момент $M^{(e)}$ внешних сил вычислялся относительно центра тяжести.

Наконец, почти нет необходимости упоминать, что если a есть *какая-нибудь* неподвижная прямая, проходящая через центр приведения, предполагаемый неподвижным, или прямая, проходящая через центр тяжести G и сохраняющая неизменное направление, то равенство (4′) после проектирования на a дает

$$\frac{dK_a}{dt}=M_a^{(e)}, \tag{5}$$

если за центр приведения выбирается центр тяжести G.

Соотношение (5) выражает *теорему о моменте количеств движения относительно оси.*

11. Если действующие на систему силы таковы, что результирующий момент $\boldsymbol{M}^{(e)}$ внешних сил остается постоянно равным нулю, то из равенства (4′) следует, что *во все время движения вектор $\boldsymbol{K}$ остается постоянным* (по величине и направлению).

В этом случае постоянным будет также и положение плоскости, перпендикулярной к $\boldsymbol{K}$ и проходящей через центр приведения O.

Такая плоскость называется *неизменяемой плоскостью* системы, а уравнение

$$\boldsymbol{K}=\mathrm{const}=\boldsymbol{K}_0$$

называется *интегралом момента* (векторного) *количеств движения.*

Как тем, так и другим свойством обладают все системы, находящиеся под действием только внутренних сил; для таких систем обращаются в нуль как $\boldsymbol{R}^{(e)}$, так и $\boldsymbol{M}^{(e)}$, и, следовательно, одновременно остаются постоянными количество движения $\boldsymbol{Q}$ и момент количеств движения $\boldsymbol{K}$. Такой системой, например, по крайней мере приближенно, будет солнечная система, неизменяемая плоскость которой называется также *плоскостью Лапласа.*

Отметим еще как непосредственное следствие равенства (5), что *если результирующий момент внешних сил относительно прямой a, неподвижной или проходящей через центр тяжести и сохраняющей неизменное направление, постоянно равен нулю, то во все время движения (скалярный) результирующий момент K_a количеств движения относительно прямой a будет оставаться постоянным (интеграл скалярного момента количеств движения).*

12. Теорема о моменте количеств движения и ее следствия наравне с теоремой о количестве движения находят многочисленные и разнообразные применения.

Чтобы дать некоторые примеры, начнем с рассмотрения твердого тела, находящегося под действием внешних сил, результирующий момент которых относительно центра тяжести равен нулю, и заметим, что это всегда будет иметь место в случае тяжелого твердого тела, так как веса всех отдельных элементов тела эквивалентны в смысле теории приложенных векторов (а для твердых тел, как увидим, также и в динамическом смысле) одной силе, приложенной в центре тяжести.

Можно утверждать, что если твердое тело под действием внешних сил, удовлетворяющих указанному выше условию, движется, исходя *из состояния покоя*, то его движение необходимо будет поступательным.

Чтобы это доказать, покажем, что угловая скорость, которая по предположению вначале равна нулю, останется равной нулю и в течение всего времени движения.

Для этой цели будем исходить из теоремы о кинетическом моменте, отнесенном к центру тяжести твердого тела. Так как по предположению момент активных сил относительно центра тяжести равен нулю, то аналогичный момент $\boldsymbol{K}$ количеств движения должен быть постоянным по величине и направлению; и так как, кроме того, вначале скорости, а следовательно, и количества движения всех точек системы равны нулю, то будет также равно нулю начальное значение момента $\boldsymbol{K}$, который, оставаясь постоянным, будет равен нулю и в течение всего времени движения.

Но тогда достаточно вспомнить, что относительно главных центральных осей инерции составляющие вектора $\boldsymbol{K}$ равны Ap, Bq, Cr (предыдущая глава, п. 16), где (если исключим тривиальный случай, когда материальные точки системы S все принадлежат одной и той же прямой) величины A, B, C (в силу их определения как моментов инерции) все отличны от нуля, чтобы заключить, что вместе с $\boldsymbol{K}$ постоянно будут равны нулю составляющие p, q, r вектора $\boldsymbol{\omega}$, а значит, и сама угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$.

Отсюда следует, в частности, что тяжелое твердое тело, падающее в пустоте, не может перевернуться, если оно выходит из состояния покоя или же если оно будет брошено таким образом, что угловая скорость вначале равна нулю.

Таким образом мы строго установили возможность сообщить падающему в пустоте тяжелому телу чисто поступательное движение в полном согласии с тем, что мы уже имели случай однажды утверждать на основании интуиции (т. I, гл. XVI, п. 5).

13. Отбросим теперь предположение, что момент $M^{(e)}$ внешних сил относительно центра тяжести равен нулю, и предположим только, что $M_a^{(e)}=0$, где a есть ось, неподвижная или имеющая неизменное направление и проходящая через центр тяжести рассматриваемого твердого тела. Мы сейчас же увидим, что ***невозможно вызвать вращение вокруг оси** a*, если ***исходить из состояния покоя***. Действительно, из равенства (5) следует, что составляющая K_a остается постоянной; а так как составляющая K_a равна $A\dot{\theta}$, где θ — угол, определяющий положение тела, то угловая скорость $\dot{\theta}$ останется равной нулю, если она вначале равна нулю (так как момент инерции A отличен от нуля).

14. В качестве второго примера рассмотрим систему S несколько более общую, именно систему, состоящую из двух частей S_1 и S_2, каждая из которых представляет собой твердое тело, но эти тела не неизменно связаны друг с другом. Предположим, как выше, что $M_a^{(e)}=0$, где $M_a^{(e)}$ обозначает теперь результирующий момент относительно оси a всех внешних сил, действующих как на S_1, так и на S_2. И здесь составляющая K_a момента количеств движения будет все еще постоянной и даже равной нулю, если, как мы и будем предполагать, система выходит из состояния покоя. Если, далее, известно еще, что движение каждого из двух тел сводится к вращению вокруг оси a, то соответствующие моменты количеств движения будут равны $A_1\dot{\theta}_1$, $A_2\dot{\theta}_2$. Следовательно, $A_1\dot{\theta}_1+A_2\dot{\theta}_2$ будет результирующим моментом количеств движения системы, и в любой момент будем иметь

$$A_1\dot{\theta}_1+A_2\dot{\theta}_2=0,$$

или же, интегрируя и предполагая, что для каждой из двух отдельных систем S_1 и S_2 угол отсчитывается от начального положения,

$$A_1\theta_1+A_2\theta_2=0.$$

Отсюда мы видим, что угловые перемещения θ_1 и θ_2 должны иметь противоположные знаки, т. е. если одно из двух твердых тел вращается в одну сторону, то другое необходимо должно вращаться в противоположную сторону; кроме того, углы поворота (описываемые в равные промежутки времени) обратно пропорциональны соответствующим моментам инерции. Поэтому никоим образом не исключено, как это имело место, когда речь шла об одном твердом теле, что если система выходит из состояния покоя, одно из двух тел, например S_1, изменяет ориентацию до достижения некоторого заданного произвольно угла θ_1; однако при указанных условиях нельзя избежать того, чтобы другое тело не вращалось в противоположную сторону, так как необходимо, чтобы выполнялось условие $A_1\theta_1+A_2\theta_2=0$.

15. Применим то, что изложено выше, к примеру, который уже служил нам для иллюстрации сохранения движения центра тяжести, т. е. к человеку, прямо стоящему на горизонтальном, абсолютно гладком полу (п. 9). Пусть a будет вертикаль, проходящая через центр тяжести человека, и пусть человеку требуется, например, сделать полуоборот, т. е. повернуться на 180° вокруг прямой a. Внешними силами в этом случае являются вес и реакция пола в точках опоры; все силы вертикальны, и потому результирующий момент их относительно оси a равен нулю. При этих условиях мы найдем, следовательно, что совокупное вращение, т. е. вращение человека как одной неизменяемой системы, невозможно.

Но замечание, сделанное для случая двух твердых тел, показывает, что если даже оставить в стороне трение, вращение вокруг a было бы вполне осуществимо, если бы была возможность связать с человеком какой-нибудь предмет, способный вращаться в противоположную сторону. Так, в частности, если вокруг талии подвязать пояс с жолобом, по которому может катиться тяжелый шар, то достаточно было бы придать ему рукой движение, чтобы вызвать вращение (пусть хотя бы и малое) всего человека в противоположную сторону; по истечении достаточного времени человек во всяком случае достиг бы желаемого результата.

Аналогичные соображения (когда необходимо вводить некоторые движения двух частей S_1 и S_2, не неизменно соединенных между собой) позволяют отдать себе отчет о так называемом „прыжке кошки". Речь идет о хорошо известном факте, что, как бы ни падала или как бы ни была брошена кошка, даже лапками вверх и из состояния покоя, она успевает повернуться за время падения без всякого вмешательства внешних сил (если для этого имеется достаточное время).

16. Основные уравнения движения какой угодно системы. Два векторных уравнения (3) и (4)

$$\frac{dQ}{dt}=R^{(e)},$$

$$\frac{dk}{dt}+v'\times Q=M^{(e)}$$

или, в частности, уравнение (3) и уравнение (4′)

$$\frac{dK}{dt}=M^{(e)}$$

называются *основными или общими уравнениями движения.*

Они приложимы ко всякой системе, лишь бы только:

а) движение было отнесено к галилеевым осям, т. е. к осям неподвижным или находящимся в поступательном и притом прямолинейном и равномерном движении относительно звезд;

б) векторные производные брались по отношению к тем же самым осям;

в) центр приведения был неподвижен или совпадал с центром тяжести системы, если мы хотим применить эти уравнения в форме (3), (4′).

Необходимо отметить, что эти уравнения в статическом случае ($Q=K=0$) дают как раз условия $R^{(e)}=M^{(e)}=0$, которые мы в статике установили как *необходимые* для равновесия какой угодно материальной системы и которые вследствие этого назвали основными или общими (т. I, гл. XII, п. 4). Как и тогда для статического случая (упомянутое место, п. 5), так и теперь мы можем утверждать, что основные уравнения движения, являясь *необходимыми* для всякой материальной системы, не будут, вообще говоря, достаточными для определения движения. Однако в полном согласии со статическим случаем в гл. VII мы увидим, что для неизменяемых систем они во всяком случае достаточны для полного определения движения и поэтому составляют основу всей динамики твердых тел.

17. Отнесение основных уравнений к осям, движущимся по какому-нибудь закону. В некоторых случаях, как это мы увидим не раз в дальнейшем, бывает выгодно освободиться от абсолютной системы отсчета и отнести основные уравнения к осям, движущимся в пространстве по закону a priori произвольному, который в зависимости от случая будет определяться способом, наиболее пригодным для задачи, подлежащей рассмотрению.

Если мы будем попрежнему рассматривать абсолютное движение (движение относительно неподвижных звезд), но отнесем основные уравнения движения к какой-нибудь подвижной системе осей, движущейся поступательно, то останутся неизменными не только векторы Q и K, которые как абсолютные результирующая и результирующий момент количеств движения не зависят от выбора подвижной системы отсчета, но также и их производные по времени, как это непосредственно ясно из самого определения векторной производной и как на это уже указывалось в п. 10 гл. IV, т. I. В результате основные уравнения должны быть все еще взяты в их первоначальной форме: (3) и (4) или) (3') и (4').

Но если, наоборот, новая система отсчета вращается с угловой скоростью ω' и если производные по времени относительно этой новой системы осей обозначать точками, то будем иметь (т. I, гл. IV, п. 10)

$$\frac{dQ}{dt} = \dot{Q} + \omega' \times Q, \qquad \frac{dK}{dt} = \dot{K} + \omega' \times K;$$

поэтому основные уравнения примут более общую форму

$$\dot{Q} + \omega' \times Q = R^{(e)}, \tag{6}$$

$$\dot{K} + v' \times Q + \omega' \times K = M^{(e)}. \tag{7}$$

В этих уравнениях v', как обычно, есть скорость той a priori произвольной точки, которая принимается за центр приведения. В большинстве случаев удобнее совместить эту точку с началом подвижной системы отсчета, тогда v' и ω' будут представлять собой характеристические векторы кинематического состояния новой системы отсчета по отношению к первоначальной галилеевой системе.

§ 3. Принцип Даламбера и общее соотношение динамики

18. К общим теоремам предыдущего параграфа мы пришли, отправляясь от разделения сил, действующих на систему, на внешние и внутренние. Здесь мы применим другой критерий классификации (п. 3) и разделим эти силы на *активные* (или прямо приложенные) и *реакции связей*. Точнее, обозначим через $\boldsymbol{F}_i$ равнодействующую активных сил, приложенных к любой точке

$$P_i \qquad (i=1, 2, \ldots, N),$$

через $\boldsymbol{R}_i$ — соответствующую равнодействующую реакций. Так как систему S можно рассматривать как систему из N свободных точек, на которые соответственно действуют N сил $\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i$, то в течение всего времени движения (отнесенного к галилеевым осям $\Omega\xi\eta\zeta$) останутся в силе основные уравнения

$$m_i a_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i \qquad (i=1, 2, \ldots, N), \tag{8}$$

которые можно написать в виде

$$\boldsymbol{F}_i - m_i a_i + \boldsymbol{R}_i = 0, \qquad (i=1, 2, \ldots, N). \tag{8'}$$

Если, подобно тому, как это делалось в теории относительного равновесия (т. I, гл. XVI, § 1), мы будем истолковывать каждый из векторов $-m_i a_i$ (имеющих размерность силы) как силу (фиктивную), которую назовем *силой инерции*, относящейся к точке P_i, то из уравнений (8′), поскольку они относятся к N точкам, рассматриваемым как свободные (т. I, гл. VII, п. 16), будет следовать, что *при движении материальной системы с какими угодно связями активные силы, реакции и силы инерции в любой момент находятся в равновесии.*

Если же мы обратим внимание на то, что реакции в их совокупности представляют собой действие связей, то можно также сказать, что *при движении материальной системы с какими угодно связями в любой момент благодаря связям, наложенным на систему, активные силы и силы инерции уравновешиваются.*

Положению, которое мы здесь рассматриваем, можно дать третью эквивалентную форму, воспользовавшись следующим замечанием. Применяя тождество

$$\boldsymbol{F}_i = m_i a_i + (\boldsymbol{F}_i - m_i a_i),$$

можно любую активную силу разложить на две составляющие: $m_i a_i$ и $\boldsymbol{F}_i - m_i a_i$. Первая из них, $m_i a_i$, одна способна сообщить точке, если бы эта точка была свободной, то же самое движение, которое точка имеет при совместном действии силы $\boldsymbol{F}_i$ и связей. Поэтому вторая составляющая $\boldsymbol{F}_i - m_i a_i$ (геометрическая сумма активной силы и силы инерции) представляет собой ту часть силы $\boldsymbol{F}_i$, которая оказывается, в некотором смысле, потерянной благодаря действию связей. Таким образом, оказывается оправданным название *потерянных сил*, которое обычно дается силам $F_i - m_i a_i$. Благодаря этому предыдущий общий результат можно высказать в более сжатой форме:

При движении материальной системы с какими угодно связями потерянные силы вследствие связей, наложенных на систему, в любой момент уравновешиваются.

19. Принцип Даламбера. Результат, полученный в предыдущем пункте, в какой-либо из трех своих эквивалентных форм носит название *принципа Даламбера*[1]; название „принцип" находит свое оправдание в характере интуитивной очевидности, которой обладает это положение механики. С чисто математической стороны этот принцип, по сравнению с постулатами и общими теоремами, уже ранее установленными, не дает чего-либо нового, так как по существу он сводится к номинальному истолкованию основных уравнений (8). Но с теоретической точки зрения и для исследования механических задач принцип Даламбера представляет значительный интерес, поскольку он позволяет свести постановку какого угодно динамического вопроса к статическому вопросу. Составление уравнений движения материальной системы для какой-либо динамической задачи при помощи принципа Даламбера сводится к составлению уравнений равновесия соответствующей статической задачи.

В более определенной форме из этого принципа следует, что уравнения движения можно непосредственно получить из уравнений равновесия, если в них вместо всякой активной силы F_i (или составляющей такой силы) подставить потерянную силу $F_i - m_i a_i$ (или соответствующую составляющую).

Однако при этом следует всегда помнить, что все применения этого правила основаны на предположении, что состояние движения не изменяет поведения действующих сил и реакций связей.

20. Общее соотношение и общее уравнение динамики. С только что указанной точки зрения типичным является случай систем со

---

[1] Ж. Даламбер (Jean Le Rond D'Alembert) родился в Париже в 1717 г., умер там же в 1783 г. После изучения медицины и юриспруденции посвятил себя исключительно математике и быстро достиг блестящих результатов. В 1742 г. был включен в состав Академии наук в Париже. Знаменитый принцип, носящий его имя, находится в его трактате по динамике, изданном в 1743 г. (Traité de Dynamique, Paris, 1743; русский перевод: Ж. Даламбер, Динамика, Москва, 1950), за которым последовал в 1744 г. Traité de l'equilibre et du mouvement des fluides. Даламбер подготовил путь для развития небесной механики. В частности, он впервые рассмотрел уравнение в частных производных для решения задачи о колеблющейся струне. Мыслитель оригинальный и с большим кругозором, он написал Discours préliminaire и многочисленные статьи в Энциклопедии.

связями без трения, для которых на основании принципа виртуальных работ в его наиболее общей принятой нами форме (т. I, гл. XV, п. 2) сумма элементарных работ реакций R_i, *независимо от того, имеется ли равновесие или нет,* при всяком виртуальном перемещении положительна или равна нулю, т. е.

$$\delta\Lambda \equiv \sum_{i=1}^{N} R_i \cdot \delta P_i \geqslant 0. \tag{9}$$

Имея это в виду, можно условия равновесия при отсутствии трения коротко написать в виде символического соотношения (т. I, гл. XV, п. 7)

$$\delta L \equiv \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \delta P_i \leqslant 0.$$

Заменяя в этом выражении на основании принципа Даламбера активные силы F_i потерянными силами $F_i - m_i a_i$, мы непосредственно придем к определению движения системы при помощи соотношения

$$\sum_{i=1}^{N} (F_i - m_i a_i) \cdot \delta P_i \leqslant 0. \tag{10}$$

Это соотношение остается в силе для всех виртуальных и только виртуальных перемещений, которые можно сообщить точками при данной конфигурации системы.

В дальнейшем мы увидим всю важность этого соотношения. А пока заметим, что здесь оно получено как следствие из принципа Даламбера и общего соотношения статики (или принципа виртуальных скоростей в его первоначальной форме, данной Лагранжем).

Важно отметить, что если рассматривать уравнения (8) в форме

$$R_i = -(F_i - m_i a_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

(эти уравнения в сущности коротко выражают основной закон динамики точки и постулат о реакциях связей), то каждое из соотношений (9) и (10) будет непосредственным следствием другого.

Наконец, мы видим, что, допустив постулаты механики, коротко выражаемые уравнениями (8), мы будем иметь совершенную логическую эквивалентность между принципом виртуальных работ в его наиболее общей форме, с одной стороны, и совокупностью общего соотношения статики и принципа Даламбера — с другой.

Это заключение в случае систем со связями без трения объясняет и уточняет замечание, сделанное в общей форме в конце предыдущего пункта. Действительно, мы видим, что с математической стороны замена принципа виртуальных работ совокупностью общего соотношения статики и принципа Даламбера не дает никакого преимущества. Однако если принять во внимание, что вся аналитическая статика (для систем с идеальными связями) основывается на общем соотношении статики, то с точки зрения механики указанная выше замена соответствует разделению принципа виртуальных работ на две части, причем в общем соотношении выражена та часть его содержания, которая необходима и достаточна для развития статики, а принцип Даламбера позволяет рассматривать любую задачу динамики, как задачу статики.

Соотношение (10), поскольку оно характеризует в любой момент состояние движения всякой системы (со связями без трения) по отношению к прямо приложенным силам F_i и к соответствующим виртуальным перемещениям, носит название *общего соотношения динамики,* а когда речь идет о системе со связями только неосвобождающими или двусторонними (т. е. с обратимыми виртуальными перемещениями), оно заменяется соответствующим уравнением

$$\sum_{i=1}^{N} (F_i - m_i a_i) \cdot \delta P_i = 0, \tag{11}$$

которое по аналогии называется *общим уравнением динамики.*

21. Общее соотношение динамики установлено при явном предположении, что система находится исключительно под действием заданных активных сил F_i и заданных связей *без трения,* т. е. реакций, удовлетворяющих принципу виртуальных работ. Но может случиться (и это будет даже более общим случаем), что наряду с этими реакциями действуют другие (в виде пассивных сопротивлений или, в частности, трения, происходящего от шероховатых связей, и т. п.), которые не подчиняются принципу виртуальных работ. В этом предположении способ, посредством которого приходят к общему соотношению динамики, можно повторить с единственным изменением, что в числе сил, прямо приложенных к точке P_i, наряду с результирующей F_i активных сил в собственном смысле рассматривается и результирующая Φ_i указанных выше действий, которые не упоминаются в принципе виртуальных работ. Таким способом приходят к символическому соотношению

$$\sum_{i=1}^{N} (F_i + \Phi_i - m_i a_i) \cdot \delta P_i \leqslant 0, \tag{12}$$

которое нужно рассматривать как соотношение, сохраняющее свое значение для всех виртуальных и только для виртуальных перемещений, допускаемых системой со связями без трения.

Не следует забывать, что в общем случае силы Φ_i, по крайней мере некоторые из них, являются неизвестными, так как самое большее бывают известны только физические условия или механические приспособления, порождающие их; поэтому соотношение (12) далеко от того, чтобы обладать тем свойством краткости и вместе с тем определенности, которым отличается общее соотношение динамики (10) и которое, как это лучше будет видно в ближайших параграфах, составляет его выдающееся и отличительное достоинство. Однако в постановке механических задач даже и наиболее общее символическое соотношение (12) может иногда оказаться полезным; мы дадим один конкретный пример этого в п 53 настоящей главы.

§ 4. Непосредственные следствия из общего уравнения динамики

22. Системы, допускающие поступательные виртуальные перемещения. Рассмотрим материальную систему, не имеющую односторонних (освобождающих) связей, так что для нее при любых силах будет справедливо общее уравнение динамики (11)

$$\sum_{i=1}^{N} (\mathbf{F}_i - m\mathbf{a}_i) \cdot \delta \mathbf{P}_i = 0.$$

Из этого уравнения, при некоторых довольно общих предположениях относительно виртуальных перемещений системы, вытекают очень важные следствия.

Предположим прежде всего, что система, исходя из какой-нибудь возможной для нее конфигурации (а следовательно, также и из таких, которые она действительно принимает во время движения), допускает *виртуальное поступательное перемещение* в некотором заданном направлении r. Обозначим через $\delta\boldsymbol{\tau}$ общее значение N бесконечно малых векторов $\delta \mathbf{P}_i$ в этом виртуальном перемещении; подставляя $\delta\boldsymbol{\tau}$ вместо $\delta \mathbf{P}_i$ в уравнение (11), будем иметь

$$\delta\boldsymbol{\tau} \cdot \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) = 0;$$

если раскроем скобки и положим

$$\mathbf{R}^{(a)} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{Q} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i,$$

т. е. обозначим через $\mathbf{R}^{(a)}$ результирующую всех активных и только активных сил, а через $\mathbf{Q}$ — количество движения системы (предыдущая глава, п. 12), то только что полученному уравнению можно придать вид

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} \cdot \delta\boldsymbol{\tau} = \mathbf{R}^{(a)} \cdot \delta\boldsymbol{\tau}. \qquad (13)$$

Деля обе части этого равенства на длину $\delta\tau$ и припоминая, что составляющая по какому-нибудь направлению (неподвижному относительно системы отсчета) производной от вектора равна производной от его составляющей в этом направлении, мы заключаем на основании уравнения (13), что

$$\frac{dQ_r}{dt} = R_r^{(a)},$$

т. е. при условии, что связи допускают виртуальное перемещение системы в направлении r, для системы оказывается справедливой *теорема о* (скалярном) *количестве движения по отношению только к активным силам* (вместо внешних сил, которые согласно первому основному уравнению (3) принимаются во внимание в этой теореме в общем случае).

Далее, если система во всякой своей конфигурации допускает в качестве виртуальных всевозможные поступательные перемещения (такой системой является, например, твердое тело), то уравнение (13) было бы справедливо при произвольном $\delta\tau$, и мы получаем

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{R}^{(a)}, \tag{14}$$

т. е. для системы справедлива (векторная) *теорема о количестве движения по отношению к одним активным силам.* Естественно, вместе с ней будет справедлива также и аналогичная теорема о движении центра тяжести (п. 6)

$$m\mathbf{a}_G = \mathbf{R}^{(a)}.$$

23. Само собой разумеется, что для только что рассмотренной системы не перестает сохранять свое значение первое из основных уравнений (п. 5)

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{R}^{(e)};$$

поэтому на основании уравнения (14) необходимо будем иметь

$$\mathbf{R}^{(e)} = \mathbf{R}^{(a)},$$

т. е. результирующая внешних сил совпадает для нашей системы с результирующей активных сил. Но так как результирующая внутренних сил равна нулю, то $\mathbf{R}^{(e)}$ дает результирующую всех сил, среди которых наряду с активными содержатся также и силы связей. Поэтому заключаем, что

Если материальная система с двусторонними (неосвобождающими) связями без трения в любой своей конфигурации допускает в качестве виртуальных перемещений всевозможные поступательные бесконечно малые перемещения, то реакции связей, возникающие в ней при действии каких угодно сил, имеют результирующую, постоянно равную нулю.

24. Системы, допускающие виртуальные вращательные перемещения. Предположим сначала, что система S (с двусторонними связями без трения) в любой ее конфигурации допускает виртуальное вращательное перемещение вокруг некоторой прямой r (относительно обычных осей $\Omega\xi\eta\zeta$). При этом виртуальном перемещении любая точка P_i испытывает перемещение вида

$$\delta P_i = \delta\omega \times \overrightarrow{OP_i},$$

где O обозначает точку на оси вращения r и $\delta\omega$ — бесконечно малый вектор, параллельный r.

Если в общее уравнение динамики (11) вместо δP_i подставить его выражение и раскрыть скобки, принимая во внимание тождества (т. I, гл. I, п. 25)

$$m_i\boldsymbol{a}_i \cdot [\delta\omega \times \overrightarrow{OP_i}] = \delta\omega \cdot [\overrightarrow{OP_i} \times m_i\boldsymbol{a}_i],$$

$$\boldsymbol{F}_i \cdot [\delta\omega \times \overrightarrow{OP_i}] = \delta\omega \cdot [\overrightarrow{OP_i} \times \boldsymbol{F}_i],$$

то получим

$$\delta\omega \cdot \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP_i} \times m_i\boldsymbol{a}_i = \delta\omega \cdot \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP_i} \times \boldsymbol{F}_i. \qquad (15)$$

Если положить теперь

$$\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP_i} \times m_i\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{K}, \qquad \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP_i} \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{M}^{(a)},$$

т. е. если обозначить через K момент (относительно центра O) количеств движения системы (гл. IV, п. 11) и через $\boldsymbol{M}^{(a)}$ результирующий момент относительно того же центра *активных сил*, достаточно будет разделить обе части равенства (15) на длину вектора $\delta\omega$ (имеющего направление r), чтобы заключить, что

$$\frac{dK_r}{dt} = M_r^{(a)}.$$

Таким образом, мы видим, что при сделанных предположениях для системы S справедлива *теорема о скалярном моменте количеств движения* (п. 10) *по отношению к одним активным силам*.

Если, далее, предположить, что неподвижная точка O есть *виртуальный полюс вращения*, т. е. что связи в любой момент допускают для системы какое угодно бесконечно малое вращение всей системы в целом вокруг точки O (как это имеет место, например, для твердого тела, закрепленного в точке O), то мы придем к заключению, что уравнение (15) должно остаться в силе, как бы ни выбирался вектор $\delta\omega$; это означает, что

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \boldsymbol{M}^{(a)}. \qquad (16)$$

Поэтому можно сказать, что *относительно виртуального полюса вращения сохраняет свою силу теорема о моменте* (векторном) *количеств движения для одних активных сил.*

Сравнивая этот результат со вторым основным уравнением в его форме (4′)

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt}=\boldsymbol{M}^{(e)}$$

и рассуждая, как в предыдущем пункте, заключаем, что *если система с двусторонними* (неосвобождающими) *связями без трения допускает виртуальный полюс вращения, то реакции, возникающие в ней под действием каких-нибудь сил, имеют относительно этого полюса момент, постоянно равный нулю.*

25. Движение относительно центра тяжести. Рассмотрим снова материальную систему S из N точек P_i с двусторонними связями без трения и обозначим через $\delta^{(r)}P_i (i=1, 2, \ldots, N)$ какое-нибудь виртуальное перемещение системы S *относительно центра тяжести* G (т. е. относительно системы осей с началом в G и с неизменными по отношению к галилеевым осям направлениями) и через $\boldsymbol{a}_i^{(r)}$ ускорение относительно G точки P_i. Будем иметь

$$\delta P_i=\delta G+\delta^{(r)}P_i, \tag{17}$$

$$\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{a}_G+\boldsymbol{a}_i^{(r)} \quad (i=1, 2, \ldots, N), \tag{18}$$

где δP_i, δG, $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{a}_G$ представляют собой абсолютные перемещения и ускорения. Подставляя прежде всего в общее уравнение динамики (11) вместо δP_i их выражения (17) и обозначая, как и в предыдущих пунктах, через $\boldsymbol{R}^{(a)}$ результирующую активных сил, через $\boldsymbol{Q}$ — количество движения (абсолютное) системы, получим

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i-m_i\boldsymbol{a}_i)\cdot\delta^{(r)}P_i+\delta G\cdot\left(\boldsymbol{R}^{(a)}-\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt}\right)=0. \tag{19}$$

Предположим теперь, что (как в п. 22) связи допускают для системы в любой момент произвольное виртуальное поступательное перемещение. Так как тогда для активных сил будет иметь место теорема о количестве движения, то второй член в левой части уравнения (19) будет тождественно равен нулю; если примем во внимание соотношение (18), то можно будет написать

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i-m_i\boldsymbol{a}_i^{(r)})\cdot\delta^{(r)}P_i-\boldsymbol{a}_G\cdot\sum_{i=1}^{N}m_i\delta^{(r)}P_i=0.$$

Но из тождества для центра тяжести G

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\overrightarrow{GP_i}=0$$

вследствие того, что виртуальное перемещение $\delta^{(r)}G$ точки G относительно нее самой тождественно равно нулю, вытекает, что

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \delta^{(r)} P_i = 0; \tag{20}$$

таким образом мы приходим к уравнению

$$\sum_{i=1}^{N} (F_i - m_i a_i^{(r)}) \cdot \delta^{(r)} P_i = 0, \tag{11'}$$

отличающемуся от общего уравнения динамики только подстановкой ускорений $a_i^{(r)}$ и перемещений $\delta^{(r)}P_i$ относительно центра тяжести вместо аналогичных абсолютных величин a_i и δP_i. Его можно назвать общим уравнением динамики, относящимся к центру тяжести; оно выражает, что *для всякой материальной системы с двусторонними связями без трения, которые в любой момент допускают поступательное виртуальное перемещение всей системы в каком угодно направлении, движение относительно центра тяжести следует тем же динамическим законам, которые имели бы место, если бы центр тяжести был неподвижен.*

Для иллюстрации этого результата представим себе прибор с двусторонними связями без трения, для которого допустимы всевозможные виртуальные поступательные перемещения. Пусть этот прибор помещен на каком-нибудь движущемся основании (поезде, корабле, аэроплане и т. п.). Когда движение основания является поступательным, даже неравномерным, то всякая система осей координат с началом в центре тяжести прибора, оси которой имеют неизменные направления в пространстве, будет сохранять неизменными направления осей также и относительно движущегося основания, так что можно сказать, что динамические законы, согласно которым действует прибор (относительно своего центра тяжести) внутри движущегося предмета, будут такими же, как если бы этот предмет был неподвижным.

Обращаясь к какой угодно материальной системе, предположим, что связи в любой момент допускают как поступательное перемещение в каком угодно направлении, так и произвольное виртуальное вращение около центра тяжести. В этом предположении для общего уравнения (11') динамики, относящегося к центру тяжести, допустимы все те рассуждения, которые имели место в предыдущем пункте по отношению к абсолютному движению, так что мы придем к уравнению

$$\frac{dK^{(r)}}{dt} = M^{(a)}, \tag{16'}$$

где $K^{(r)}$ обозначает момент относительно центра тяжести количеств движения, относящихся к центру тяжести, и $M^{(a)}$ есть аналогичный результирующий момент активных сил.

Если примем во внимание тождество $K^{(r)}=K$ (предыдущая глава, п. 13), то увидим, что уравнение (16') есть не что иное, как распространение уравнения (16) предыдущего пункта на случай, когда центр приведения (и виртуальный полюс вращения) совпадает с центром тяжести (вместо того, чтобы быть неподвижным).

Сравнивая затем уравнение (16') со вторым уравнением (4') (отнесенным к центру тяжести) и припоминая еще тождество $K^{(r)}=K$, заключаем, что *если для какой-нибудь материальной системы связи, предполагаемые двусторонними и без трения, допускают произвольное перемещение (виртуальное) ее как неизменяемой системы, то реакции, которые возникают под действием каких угодно сил, имеют относительно центра тяжести результирующий момент, постоянно равный нулю.*

26. Системы, находящиеся под действием силы тяжести. В частном случае, когда активные силы сводятся к силе тяжести отдельных точек P_i и, следовательно, имеем $F_i=m_i g$ (где g есть обычное ускорение силы тяжести), из уравнения (20) предыдущего пункта получим

$$\sum_{i=1}^{N} F_i\cdot\delta^{(r)}P_i=g\cdot\sum_{i=1}^{N} m_i\delta^{(r)}P_i=0;$$

отсюда следует, что та часть элементарной работы в общем уравнении динамики (11'), относящемся к центру тяжести, которая представляет собой работу сил тяжести, равна нулю. Поэтому заключаем, что *для любой системы, находящейся под действием силы тяжести, движение относительно центра тяжести происходит так, как если бы силы веса не действовали.*

27. Общее уравнение динамики для твердого тела. Наконец, здесь полезно дать явный вид общего уравнения динамики для твердого тела с какими угодно связями и под действием каких угодно сил (лишь бы, разумеется, связи были двусторонними и без трения). Любое виртуальное перемещение твердого тела, если обозначим через δG и $\delta\omega$ соответствующие характеристические векторы (бесконечно малые) относительно центра тяжести G (перемещение центра тяжести и поворот около центра тяжести), определится равенством

$$\delta P_i=\delta G+\delta\omega\times\overrightarrow{GP_i}\qquad(i=1,\,2,\,\ldots,\,N);$$

подставляя это выражение для δP_i в уравнение (11) и преобразовывая результат обычным образом, получим

$$\delta G \cdot \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{F}_i - m_i \boldsymbol{a}_i) + \delta\omega \cdot \sum_{i=1}^{N} [\overrightarrow{GP}_i \times \boldsymbol{F}_i - \overrightarrow{GP}_i \times m_i \boldsymbol{a}_i] = 0;$$

теперь достаточно ввести результирующую $\boldsymbol{R}^{(a)}$ и результирующий момент $\boldsymbol{M}^{(a)}$ относительно центра G активных сил и вспомнить известные выражения количества движения $\boldsymbol{Q}$ и момента количеств движения $\boldsymbol{K}$ относительно G, чтобы предыдущему уравнению придать искомый вид

$$\left(\boldsymbol{R}^{(a)} - \frac{d\boldsymbol{Q}}{dt}\right) \cdot \delta G + \left(\boldsymbol{M}^{(a)} - \frac{d\boldsymbol{K}}{dt}\right) \cdot \delta\omega = 0.$$

Эта формула часто применяется в динамике твердого тела (ср., например, гл. IX, п. 3).

28. Понятие об общей кинетостатике[1]). Можно, наконец, связать с общим уравнением динамики ряд задач, имеющих большое значение в технических приложениях; мы сделаем это в очень сжатом виде.

С самого начала (п. 2), разбивая силы, действующие на любую материальную систему, на *силы активные* (обычно задаваемые) и *реакции* (вообще говоря, неизвестные), мы указывали, как на одну из целей теоретической динамики, на систематическое исключение реакций. Но с точки зрения техники нередко бывает интересно определение как раз этих реакций, которые благодаря наличию данных связей действуют на рассматриваемую материальную систему в заданном состоянии движения (или, как предельный случай, в состоянии покоя). Изменяя направление этих реакций на обратное, найдем, в силу закона равенства действия и противодействия, *динамические давления* (или, в частности, статические) на тела, с помощью которых осуществляются связи; точная оценка максимальных давлений необходима для установления и исследования условий, при которых данное устройство может выполнить свое назначение без опасности разрушения. В последнее время эта область исследований получила название *кинетостатики*. Кинетостатические исследования приобретают особый интерес в связи с распространением механизмов с большими скоростями.

Обратимся здесь к системе из N материальных точек P_i, подчиненных заданным связям без трения (двусторонним и односторонним, геометрическим и кинематическим) и находящихся под действием заданных активных сил $\boldsymbol{F}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, N$). В аналитической статике (т. I, гл. XV, пп. 36—40) мы уже видели, как на

---

[1]) Ср. Levi-Civita, Sulla cinetostatica, *Atti e Mem. della. R. Acc. di sc., lett. ed a. in Padova,* т. 18, 1902, стр. 145—150.

основе параметрического решения общего условия равновесия

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \delta P_i \leqslant 0, \tag{21}$$

к которому мы приходим посредством введения множителей Лагранжа, оказывается возможным вычислить реакции R_i, возникающие в различных точках системы, и, более того, различить в каждой из этих реакций составляющие, приходящиеся на каждую связь. Эти реакции или их составляющие после изменения направления на обратное дают аналогичные статические давления.

Теперь, чтобы перейти к динамическому случаю, достаточно заметить, что вместо соотношений $R_i = -F_i$, действительных при равновесии, здесь будут справедливы соотношения

$$R_i = -(F_i - m_i a_i) \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N);$$

эти соотношения можно получить, применяя принцип Даламбера. Таким образом, мы видим, что к вычислению реакций и, следовательно, динамических давлений мы придем, подставляя всюду в только что упомянутых выкладках аналитической статики вместо активных сил F_i соответствующие потерянные силы $F_i - m_i a_i$; другими словами, нам надо только разрешить путем введения множителей Лагранжа, вместо условия (21), общее соотношение динамики

$$\sum_{i=1}^{N} (F_i - m_i a_i) \cdot \delta P_i \leqslant 0.$$

Таким образом, применяя методы, аналогичные методам статики, можно определить не только динамические давления, действующие на различные точки P_i, но в каждой из них различить частичные давления, происходящие от отдельных связей. Более того, вследствие линейной природы задачи a priori очевидно, что всякое давление (полное или частичное) формально должно быть представлено в виде суммы двух слагаемых: одно из этих слагаемых, которое происходит прямо от активной силы F_i, можно назвать статическим, другое слагаемое представляет собой собственно динамическое давление, зависящее от соответствующей силы инерции $-m_i a_i$.

Не задерживаясь на этом, отметим одно существенное обстоятельство. Только что указанный способ для вычисления давлений предполагает знание движения системы; а мы хорошо знаем a priori, что определение этого движения зависит (как это уже отмечалось в пп. 1, 2 и еще лучше будет разъяснено в дальнейшем) от интегрирования дифференциальных уравнений и составляет как раз основную и более трудную задачу динамики. Все же указанная выше постановка задачи кинетостатики имеет интерес, несмотря на то, что для решения ее надо знать движение системы. Во многих конкретных случаях, интересных с технической точки зрения, движение системы заранее бывает задано, поскольку оно должно удовлетворять заранее поставленным целям. Это станет более ясным при разборе типичного примера из кинетостатики неизменяемых систем, который мы будем рассматривать в п. 7 гл. VII.

§ 5. Уравнение и интеграл живых сил

29. Теорема живых сил. Прежде чем выводить другие следствия из общего уравнения динамики, удобно установить здесь еще одну общую теорему о движении системы, формулировка которой не зависит от подразделения сил на внешние и внутренние или активные и реакции связей.

Обозначим поэтому через F_i *полную силу*, действующую на любую точку $P_i (i = 1, 2, \ldots, N)$ движущейся системы, т. е. равнодействующую всех сил (внутренних и внешних, активных и реакций), действующих на эту точку. Мы знаем уже, что во время движения системы приращение, получаемое в любой элемент времени живой силой точки P_i, равно работе, совершенной силой F_i за тот же самый элементарный промежуток времени (т. I, гл. VIII, п. 9); положив

$$T_i = \frac{m_i v_i^2}{2}, \quad dL_i = F_i \cdot v_i dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

будем иметь в любой элемент времени в течение движения

$$dT_i = dL_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Суммируя почленно эти N уравнений, получим

$$dT = dL, \tag{22}$$

где через T обозначена живая сила системы (предыдущая глава, п. 6) и через dL — полная элементарная работа всех сил системы за рассматриваемый элемент времени dt (там же, п. 2), т. е.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2, \qquad dL = \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot v_i dt.$$

Мы получили таким образом теорему живых сил в дифференциальной форме: *во время движения материальной системы с какими угодно связями и под действием каких угодно сил приращение, которое получает живая сила системы за какой-нибудь элемент времени, равно полной работе, совершаемой за тот же самый элемент времени всеми силами, действующими на систему* (внешними и внутренними, активными и реакциями).

Теперь обратим внимание на следующее: в виде основной предпосылки наших механических взглядов все причины, влияющие на движение какой угодно материальной системы, схематически рассматриваются нами как некоторые силы, и, следовательно, всякая форма энергии, которая участвует в движении, рассматривается схематически в виде сообщаемой системе работы, совершаемой силами. Поэтому если, в частности, речь идет об элементе времени dt, то полная элементарная работа dL, так же как и в случае одной материальной точки (т. I, гл. VIII, п. 9), представится как полное приращение энергии, сообщаемое системе обстоятельствами, определяющими ее движение. Уравнение (22) представляет, следовательно, в типичной механической форме основной *физический принцип сохранения энергии.* Оно выражает, что вся энергия, сообщаемая в любой элемент времени системе теми весьма разнообразными обстоятельствами, которые каким бы то ни было образом влияют на ее движение, обнаруживается полностью в той же системе в форме приращения dT ее кинетической энергии.

30. Теорема живых сил, вследствие ее большой общности, находит в механике чрезвычайно разнообразные применения.

Необходимо, однако, отметить, что теорема живых сил в ее общей форме (22) не всегда может быть использована, поскольку она включает в себя выражение элементарной работы, выполняемой (вместе с другими силами) и неизвестными реакциями. Поэтому теорема эта имеет большое значение и оказывается более полезной в тех случаях, когда благодаря каким-нибудь предположениям о природе системы или о свойствах действующих сил удается упростить выражение элементарной работы само по себе и уточнить это выражение с механической точки зрения.

Чтобы дать два примера, в некотором роде типичных, рассмотрим сначала случай *твердого тела.* В этом предположении за любой элемент времени работа внутренних сил (предыдущая глава, п. 3) будет равна нулю, так что уравнение (22) приведется к виду

$$dT = dL^{(e)}, \qquad (22')$$

где $dL^{(e)}$ обозначает полную элементарную работу всех внешних сил, т. е. имеем: *при движении твердого тела с какими угодно связями и под действием каких угодно сил за любой элемент времени приращение живой силы твердого тела равно элементарной работе, одновременно выполняемой всеми внешними силами.*

Другой пример, с некоторой точки зрения более общий, мы имеем, когда речь идет о материальной системе со связями, независящими от времени, без трения и двусторонними. В силу первого предположения всякое из элементарных перемещений, которые испытывает система во время ее движения, является виртуальным перемещением (т. I, гл. VI, п. 13), так что благодаря второму предположению к каждому из этих элементарных перемещений можно применить ***принцип виртуальных работ*** (т. I, гл. XV, п. 2); принимая во внимание третье предположение, заключаем, что за любой элемент времени элементарная работа реакций будет тождественно равна нулю. Поэтому уравнение (22) принимает вид

$$dT = dL^{(a)}, \tag{22''}$$

где $dL^{(a)}$ обозначает элементарную работу всех активных сил, т. е. ***если система со связями, не зависящими от времени, двусторонними и без трения движется под действием каких-либо сил, то приращение, получаемое за любой элемент времени живой силой системы, равно элементарной работе, совершаемой за то же самое время всеми активными силами.***

Далее, если предполагается, что связи системы двусторонние, без трения и не зависят от времени и что, кроме того, они допускают бесконечно малые поступательные перемещения всей системы в целом в каком-нибудь направлении (п. 25), то будет иметь место теорема живых сил для движения относительно центра тяжести, т. е. будет существовать уравнение

$$dT^{(r)} = dL^{(r)},$$

где $dT^{(r)}$ есть приращение, получаемое в течение любого элемента времени живой силой системы в ее движении относительно центра тяжести, $dL^{(r)}$ — полная работа, выполняемая активными силами в течение того же элемента времени благодаря перемещениям *относительно* центра тяжести.

31. Консервативные силы. Потенциал. Для того чтобы подготовить другие выводы из теоремы живых сил, нужно сделать некоторые дальнейшие пояснения понятия о *консервативных силах*, введенного в статике (т. I, гл. XV, п. 28). Для системы из N материальных точек P_i ($i = 1, 2, \ldots, N$) *консервативными* называются такие силы F_i, выражение для полной работы которых на каком угодно элементарном перемещении dP_i системы равно полному дифференциалу функции U от $3N$ декартовых координат ξ_i, η_i, ζ_i точек P_i; при этом функция U предполагается, как обычно, однозначной и правильной в рассматриваемом поле [1]).

Для избежания недоразумений отметим, что здесь, говоря о *каком угодно* элементарном перемещении, мы подразумеваем перемещения безусловно произвольные, и, следовательно, для системы

---

[1]) Иногда может случиться, что поле, в котором рассматриваются действующие силы, выходит за те пределы, в которых функция U остается однозначной и правильной. Для одной материальной точки мы рассмотрели соответствующий пример в т. I (гл. VII, п. 29, г.). В дальнейшем изложении этого тома мы не будем встречаться с такими вопросами, в которых может представиться это обстоятельство.

со связями даже такие, при которых не принимаются во внимание связи (т. е. ни виртуальные, ни возможные для системы).

Функция U, определяемая с точностью до аддитивной произвольной постоянной из равенства

$$dL = \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot dP_i = dU, \tag{23}$$

называется *потенциалом* сил, которые в свою очередь являются *производными* от потенциала U.

Из равенства (23), которое в развернутой форме принимает вид

$$\sum_{i=1}^{N} (X_i\, d\xi_i + Y_i\, d\eta_i + Z_i\, d\zeta_i) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi_i} d\xi_i + \frac{\partial U}{\partial \eta_i} d\eta_i + \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} d\zeta_i \right),$$

приравнивая в обеих частях коэффициенты при составляющих (произвольных и не зависимых друг от друга) $d\xi_i$, $d\eta_i$, $d\zeta_i$ перемещений dP_i, получаем соотношения

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Если система, на которую действуют силы, является голономной, определяемой в лагранжевых независимых координатах q_1, $q_2, \ldots, q_n$ уравнениями

$$P_i = P_i(q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

то из этих уравнений или, лучше, из эквивалентных им уравнений

$$\begin{aligned} \xi_i &= \xi_i(q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t), \\ \eta_i &= \eta_i(q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t), \qquad (i = 1, 2, \ldots N) \\ \zeta_i &= \zeta_i(q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t) \end{aligned}$$

можно видеть, что потенциал U, вообще говоря, зависит не только от q, но также и от t, поэтому *если связи системы не зависят от времени, то потенциал зависит исключительно от лагранжевых координат.*

Для последующего важно вспомнить, что как в том, так и в другом случае *производные от потенциала*, т. е. $\frac{\partial U}{\partial q_n}$, *дают составляющие действующих сил по лагранжевым координатам* q_h, *т. е. количества*

$$Q_h = \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Это вытекает непосредственно из самого определения консервативных сил, которое для виртуального перемещения дает тождество

$$\delta L = \delta U,$$

где δU обозначает полный дифференциал от потенциала, вычисляемый при постоянном значении t, если U зависит явно от t; приравнивая в обеих частях коэффициенты при отдельных δq_h (произвольных и независимых), мы получим для составляющих Q_h выражения

$$Q_h = \frac{\partial U}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Из тождества (23), характерного для консервативных сил, как и в случае одной точки, находящейся под действием таких сил (т. I, гл. VIII, п. 6), мы получим после интегрирования

$$L = U - U_0,$$

т. е. *как бы ни двигалась материальная система от одной своей конфигурации к другой, работа, совершаемая консервативными силами, равна разности значений соответствующего потенциала в начальной и конечной конфигурациях.*

32. Чтобы дать простой пример консервативной силы, рассмотрим действие силы тяжести на систему из N материальных точек P_i с массами m_i, отнесенную к осям, связанным с Землей. В этом случае, если за ось ζ выбирается направленная вниз вертикаль, для силы веса, действующей на любую точку P_i, мы будем иметь составляющие

$$X_i = 0, \; Y_i = 0, \; Z_i = m_i g \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

откуда видно, что потенциал определяется (с точностью до аддитивной произвольной постоянной) равенством

$$U = g \sum_{i=1}^{N} m_i \zeta_i,$$

или, еще проще, если ζ_0 есть высота центра тяжести и m — полная масса системы, равенством

$$U = mg\zeta_0.$$

Он совпадает, следовательно, с потенциалом силы тяжести, приложенной в центре тяжести, как если бы в нем была сосредоточена вся масса системы.

Другим, более общим примером консервативных сил являются ньютонианские силы взаимного притяжения между материальными точками или элементами массы.

Сосредоточим внимание на задаче $n+1$ тел, обращаясь к п. 22 гл. III. Если обозначим через Δ_{ij} расстояние между двумя любыми точками P_i, P_j $(i, j = 0, 1, 2, \ldots, n)$, то, как известно (т. I, гл. XI, п. 4), выражение

$$\frac{f m_i m_j}{\Delta_{ij}}$$

представляет собой потенциал как силы $m_i m_j A_{ij}$ (если P_i рассматривается как притягиваемая точка), с которой P_j действует на P_i, так и силы (прямо противоположной) $m_i m_j A_{ji}$ (если, наоборот, P_j рассматривается как притягиваемая точка), которую P_j испытывает со стороны P_i. Отсюда следует (ср. формулу (46) гл. III), что полное действие, испытываемое точкой P_i системы, является производным от потенциала

$$U_i = fm_i \sum_{j=0}^{n} {}^{(i)} \frac{m_j}{\Delta_{ij}}.$$

Рассмотрим теперь функцию (всех взаимных расстояний точек)

$$U = f \mathop{S}_{0}^{n}{}_{hj} \frac{m_h m_j}{\Delta_{ij}},$$

где $\mathop{S}_{0}^{n}{}_{hj}$ обозначает сумму, распространенную на все сочетания без повторений индексов h, j, которым приписываются все значения от 0 до n.

Функция U содержит все члены, входящие в функцию U_j, а также (при $n > 1$) многие другие, не зависящие от координат точки P_j. Поэтому можно, если угодно, рассматривать U вместо U_i как выражение потенциала силы F_i, действующей на точку P_i. Так как функция U в отличие от U_i симметрично зависит от всех $n+1$ точек, то, составляя от нее полный дифференциал, будем иметь

$$dU = \sum_{i=0}^{n} F_i \cdot dP_i,$$

т. е. как раз равенство (23) для интересующего нас здесь случая.

Таким образом, взаимные ньютонианские притяжения скольких угодно тел P_0, P_1, $P_2, \ldots, P_n$ образуют консервативное силовое поле, потенциал которого определяется предыдущим выражением функции U.

33. Интеграл живых сил. После этого отступления вернемся к теореме живых сил (пп. 29, 30) и рассмотрим снова основной для механики случай материальной системы S со связями, не зависящими от времени, двусторонними и без трения. Если активные силы, действию которых она подвергается, являются производными от потенциала U, то теорема живых сил (22″) принимает вид

$$dT = dU, \tag{24}$$

совершенно аналогичный тому, который имел место для одной свободной материальной точки, находящейся под действием консервативной силы (т. I, гл. VIII, п. 11); после интегрирования получим конечное соотношение

$$T - U = E, \tag{25}$$

где E обозначает постоянную интегрирования. Это соотношение, связывающее в любой момент состояние движения системы с ее конфигурацией, как и в случае одной материальной точки, также носит название *интеграла живых сил.*

Уравнение (24) или эквивалентное ему (25) допускает энергетическое истолкование, данное в общем случае уравнению (22) в п. 29. Это истолкование, как и в случае одной материальной точки, можно выразить здесь в более специальной, особенно замечательной по своему внутреннему содержанию форме. Если количество $-U$, зависящее исключительно от конфигурации системы, рассматривается как форма энергии (потенциальной), которой обладает система в зависимости от своего положения, то уравнение (24) или эквивалентное ему уравнение (25) выражает, что при движении сумма $T - U$ кинетической и потенциальной энергии системы не изменяется. Следовательно, имеет место принцип сохранения энергии в наиболее узком смысле, поскольку материальная система рассматривается изолированной от всего остального мира и обладает только двумя основными формами механической энергии (кинетической и потенциальной энергией или энергией положения), которые в течение движения могут только преобразовываться одна в другую, причем исключается возможность возникновения новой или исчезновения наличной энергии. По этой причине соотношение (25) называется также *интегралом энергии.*

34. Внутренняя энергия. Уравнение (22) живых сил приводит к заключениям, аналогичным заключениям предыдущего пункта, но более полным и общим, если только часть действующих на материальную систему сил будет иметь потенциал. Обозначая через $-\Omega$ этот потенциал, можно написать уравнение (22) в этом случае в виде

$$dT + d\Omega = dL', \tag{26}$$

где dL' обозначает полную элементарную работу тех сил, которые действуют на систему вместе с консервативными.

Уравнение (26) становится наиболее интересным, когда силы, являющиеся производными от потенциала $-\Omega$, будут все внутренними. В этом предположении количество Ω, зависящее только от конфигурации системы, называется *внутренней энергией;* материальные системы, для которых, каковы бы ни были активные действующие силы, внутренние силы являются производными от потенциала, называются *консервативными системами.*

Типичными примерами консервативных систем являются *абсолютно упругие тела* и *идеальные газы* или сжимаемые жидкости, если отвлечься от вязкости и других диссипативных сил (гл. I, § 5). Как доказывается в механике деформируемых тел, внутренние силы, действующие в упругом теле при всякой деформации и в идеальном газе при всяком изменении объема, являются в их совокупности производными от потенциала.

Для идеальных жидкостей, т. е. для жидкостей, строго несжимаемых и без внутреннего трения, внутренняя энергия рассматривается как величина постоянная (в частности, если угодно, равная нулю), потому что молекулярные силы, обеспечивающие несжимаемость, имеют характер реакций, происходящих от связей, и, следовательно, при всяком бесконечно малом (виртуальном) перемещении, совместимом с несжимаемостью, совершают полную работу, равную нулю, а это означает, что речь идет о силах, являющихся производными от постоянного (или просто равного нулю) потенциала.

§ 6. Уравнения Лагранжа

35. Первая форма уравнений Лагранжа. Попытаемся теперь составить уравнения движения материальной системы со связями и предположим, что речь идет о голономной системе, состоящей из N точек P_i и имеющей l независимых связей (без трения)

$$f_k(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \dots, \zeta_N | t) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, l), \tag{27}$$

где ξ_i, η_i, ζ_i обозначают координаты любой точки P_i в галилеевой системе координат $\Omega\xi\eta\zeta$. Отсюда следует, что число степеней свободы системы равно $3N - l$.

Вводя наряду с заданными активными силами $\boldsymbol{F}_i$ неизвестные реакции $\boldsymbol{R}_i$, составляющие которых обозначим через Ξ_i, H_i, Z_i, мы придем к N векторным уравнениям (8)

$$m_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

или к эквивалентным им скалярным уравнениям

$$m_i \ddot{\xi}_i = X_i + \Xi_i, \quad m_i \ddot{\eta}_i = Y_i + \mathrm{H}_i, \quad m_i \ddot{\zeta}_i = Z_i + \mathrm{Z}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Если присоединить эти последние уравнения к уравнениям (27), то получим только $3N + l$ уравнений, а неизвестных (координат точек системы и составляющих реакций) будет $6N$, так что для того, чтобы сделать задачу определенной, необходимо иметь еще $3N - l$ уравнений, т. е. ровно столько, каково число степеней свободы системы.

Можно было бы убедиться, что $3N - l$ недостающих уравнений даст нам принцип виртуальных работ, т. е. уравнение

$$\delta\Lambda = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{R}_i \cdot \delta P_i = 0, \tag{28}$$

имеющее место при всех виртуальных перемещениях системы. Но мы быстрее придадим поставленной задаче определенную форму и в то же время получим то преимущество, что приведем ее к $3N+l$ неизвестным, если вместо уравнений (8) и (28) будем исходить из основного уравнения динамики (11)

$$\sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{F}_i - m_i \boldsymbol{a}_i) \cdot \delta P_i = 0$$

и применять результаты, полученные в аналитической статике (т. I, гл. XV, § 7).

Начнем с замечания, что виртуальные перемещения δP_i системы определяются своими составляющими $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$, $\delta\zeta_i$ из l уравнений

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f_k}{\partial \xi_i} \delta\xi_i + \frac{\partial f_k}{\partial \eta_i} \delta\eta_i + \frac{\partial f_k}{\partial \zeta_i} \delta\zeta_i\right) = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ l),$$

которые, конечно, независимы, поскольку таковыми являются по предположению уравнения связей (27), а потому якобиева матрица от функций f_k для любых значений ξ_i, η_i, ζ_i имеет ранг l. Чтобы не расходиться с обозначениями, применявшимися в аналитической статике, придадим этим l уравнениям следующий более сжатый вид:

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{a}_{ki} \cdot \delta P_i = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ l), \tag{29}$$

где через $\boldsymbol{a}_{ki}$ обозначен вектор с составляющими

$$\frac{\partial f_k}{\partial \xi_i},\ \frac{\partial f_k}{\partial \eta_i},\ \frac{\partial f_k}{\partial \zeta_i} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ l; \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N). \tag{30}$$

Теперь остается выразить, что потерянные силы $\boldsymbol{F}_i - m_i \boldsymbol{a}_i$ должны быть такими, чтобы выполнялось в любой момент равенство (11) для всех виртуальных перемещений, определяемых из уравнений (29). Но это как раз и является задачей, разрешенной нами в аналитической статике, с той только разницей, что вместо сил $\boldsymbol{F}_i$, рассматривавшихся там, здесь входят потерянные силы и что, кроме того, здесь нет односторонних связей, допущенных там для общности. Принимая во внимание, что в настоящем случае число уравнений (29) (двусторонних) связей меньше чем $3N$ и что они независимы между собой, мы непосредственно можем приложить результат п. 33 гл. XV т. I (при $\mu_i = 0$) и заключить, что должны иметь место равенства

$$m_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}_i + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \boldsymbol{a}_{ki} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{31}$$

где λ_k (множители Лагранжа) представляют собой вспомогательные неизвестные; здесь мы принимаем эти множители со знаком, противоположным тому, который был принят в статике.

Эти векторные уравнения (31) после проектирования на оси дадут, если принять во внимание составляющие (30) векторов a_{ki}, $3N$ скалярных уравнений

$$\left.\begin{aligned} m_i\ddot{\xi}_i &= X_i + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial \xi_i} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial \xi_i} + \ldots + \lambda_l\frac{\partial f_l}{\partial \xi_i}, \\ m_i\ddot{\eta}_i &= Y_i + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial \eta_i} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial \eta_i} + \ldots + \lambda_l\frac{\partial f_l}{\partial \eta_i}, \\ m_i\ddot{\zeta}_i &= Z_i + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial \zeta_i} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial \zeta_i} + \ldots + \lambda_l\frac{\partial f_l}{\partial \zeta_i} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N), \qquad (31')$$

которые вместе с уравнениями (27) образуют систему из $3N + l$ уравнений со столькими же неизвестными ξ_i, η_i, ζ_i и λ_k. При помощи этих уравнений можно определить все возможные движения рассматриваемой голономной системы.

Уравнения (31') обычно называются *уравнениями Лагранжа* в первой форме. Они дают естественное обобщение уравнений движения одной точки, удерживаемой на гладкой поверхности (гл. II, п. 42), и замечательны с различных точек зрения. В частности, для отдельных множителей λ_k имеет место истолкование, аналогичное истолкованию, указанному в статике (т. I, гл. XV, п. 36).

Нужно, однако, заметить, что уравнения (31') представляют то неудобство, что вводят слишком большое число лишних неизвестных. Так как конфигурации голономной системы зависят от некоторого числа параметров, равного соответствующему числу степеней свободы (в нашем случае от $3N - l$ параметров), то естественно ожидать, что движение голономной системы возможно определить посредством системы дифференциальных уравнений, заключающей в себе ровно столько неизвестных, каково соответствующее число степеней свободы. Это мы и сделаем в ближайших пунктах.

36. Дифференциальные уравнения движения голономной системы в лагранжевых координатах. Вместо координат ξ_i, η_i, ζ_i предыдущих пунктов, число которых превосходит число степеней свободы, отнесем нашу голономную систему S к n каким-нибудь независимым лагранжевым координатам q_1, q_2, $\ldots$, q_n, где n, как мы знаем, означает число степеней свободы системы, и пусть

$$P_i = P_i(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n|t) = P_i(q|t) \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N). \qquad (32)$$

Дифференцируя уравнения (32) по времени, мы получим для скоростей $\boldsymbol{v}_i$ отдельных точек P_i следующие выражения:

$$\boldsymbol{v}_i = \sum_{h=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial P_i}{\partial t} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N), \qquad (33)$$

тогда как для виртуальных перемещений системы получатся выражения

$$\delta P_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \delta q_h \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{34}$$

где n лагранжевых составляющих δq виртуального перемещения произвольны.

Возьмем теперь снова общее уравнение динамики (11)

$$\sum_{i=1}^{N} (F_i - m_i a_i) \cdot \delta P_i = 0,$$

которое определяет движение системы, поскольку оно справедливо для всех виртуальных перемещений (34), и напишем его в виде

$$\sum_{i=1}^{N} m_i a_i \cdot \delta P_i = \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \delta P_i. \tag{35}$$

В этом уравнении отделены друг от друга члены кинетической природы и члены динамические в более узком смысле, происходящие от активных сил. Значение правой части нам хорошо известно, так как она представляет собой полную работу δL, совершаемую активными силами при любом виртуальном перемещении δP_i системы (гл. IV, п. 5 и п. 31 этой главы), поэтому мы имеем тождественно

$$\sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \delta P_i = \sum_{h=1}^{n} Q_h \delta q_h, \tag{36}$$

где

$$Q_h = \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots n) \tag{37}$$

есть *составляющая активных сил по лагранжевой координате* q_h*).

Что же касается левой части равенства (35), то на основании соотношений (34) ее можно написать в виде

$$\sum_{i=1}^{N} m_i a_i \cdot \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \delta q_h,$$

---

*) В русской литературе принято называть величины Q_h обобщенными силами. *(Прим. ред.)*

и достаточно изменить порядок суммирований и положить

$$\tau_h = \sum_{i=1}^{N} m_i a_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{38}$$

чтобы тождественно иметь

$$\sum_{i=1}^{N} m_i a_i \cdot \delta P_i = \sum_{h=1}^{n} \tau_h \delta q_h. \tag{39}$$

На основании двух тождеств (36), (39) общее уравнение динамики (35) принимает вид

$$\sum_{h=1}^{n} \tau_h \delta q_h = \sum_{h=1}^{n} Q_h \delta q_h,$$

а так как это соотношение должно сохранять свое значение при любом выборе δq_h, то мы находим, что должны быть справедливы равенства

$$\tau_h = Q_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{40}$$

Обратно, всякий раз, когда будут совместно удовлетворяться уравнения (40), будет справедливо и уравнение (35) при любом выборе δq_h, а следовательно, в силу тождеств (36), (39), и уравнение (11) для всех виртуальных перемещений (34). Таким образом мы заключаем, что для нашей голономной системы n уравнений (40) равносильны общему уравнению динамики, и поэтому они достаточны для определения движения.

Теперь легко проверить, что они образуют систему из n дифференциальных (независимых) уравнений второго порядка от n неизвестных функций q_h переменной t, приводимую к *нормальному виду*, т. е. разрешимую относительно вторых производных. Действительно, заметим, что Q_h, как это вытекает из их выражений (37), наравне с F_i, представляют собой известные функции от параметров, определяющих в любой момент конфигурацию системы, скоростей отдельных точек и, возможно, времени, т. е. функции от q, $\dot{q}$ и t. Что же касается выражений для τ_h, определяемых равенствами (38), то следует обратить внимание, что, в то время как векторы $\partial P_i / \partial q_h$ зависят исключительно от q (и, возможно, от t), ускорения a_i, которые получаются последовательным дифференцированием равенств (33), представляют собой известные функции от q, $\dot{q}$, $\ddot{q}$ (и, возможно, t), линейные относительно лагранжевых ускорений $\ddot{q}$.

Если, далее, примем во внимание, что в выражениях для a_i члены, зависящие от $\ddot{q}$, имеют вид

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \ddot{q}_k,$$

то заметим, что в любом из уравнений (40) коэффициент при $\ddot{q}_k$ равен

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \qquad (h,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Эта сумма скалярных произведений представляет собой, как мы это видели в п. 11 предыдущей главы, коэффициенты a_{hk} при $\dot{q}_h \dot{q}_k$ в выражении через лагранжевы координаты живой силы T, если связи не зависят от времени, или ее квадратичной части T_2, если связи зависят от времени. Там было доказано, что как в том, так и в другом случае определитель $\|a_{hk}\|$ не может тождественно равняться нулю. Отсюда именно и следует, что n дифференциальных уравнений второго порядка (40) всегда разрешимы относительно n лагранжевых ускорений $\ddot{q}$.

Следовательно, речь идет о системе дифференциальных уравнений, общий интеграл которых зависит от $2n$ произвольных постоянных. Каждый из ∞^{2n} частных интегралов дает в лагранжевых координатах закон (т. I, гл. VI, п. 3)

$$q_h = q_h(t)$$

какого-нибудь частного движения нашей голономной системы S при заданных силах. При данных условиях для системы S невозможны какие-нибудь другие движения помимо тех, которые представлены таким образом, так как уравнения (40), как это было отмечено с самого начала, *определяют*, наравне с общим уравнением, следствием которого они являются, все движения, возможные для системы.

Чтобы определить одно из этих движений, достаточно произвольно задать значения q^0, $\dot{q}^0$ величин q и $\dot{q}$ в определенный момент времени, например в момент $t = t_0$, что равносильно указанию начальной конфигурации системы и начальных скоростей $\boldsymbol{v}^0$ отдельных ее точек; декартовы координаты ξ^0, η^0, ζ^0 этой конфигурации получатся из уравнений (32) или, иначе, из эквивалентных им уравнений

$$\xi_i = \xi_i(q|t), \quad \eta_i = \eta_i(q|t), \quad \zeta_i = \zeta_i(q|t) \qquad (32')$$
$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N),$$

если положить в них $t = t_0$, $q_h = q_h^0$, а $\boldsymbol{v}^0$ получится из уравнений (33), если положить в них $t = t_0$, $q_h = q_h^0$, $\dot{q}_k = \dot{q}_k^0$. Можно и прямо задать произвольные начальные значения ξ^0, η^0, ζ^0 и v_0 при следующих условиях: 1) величины ξ^0, η^0, ζ^0 представляют собою декартовы координаты одной из ∞^n возможных конфигураций для голономной системы в момент времени $t=t_0$, в силу чего уравнения (32'), если подставить в левые части их эти значения ξ^0, η^0, ζ^0, определят однозначно соответствующие значения q^0 лагранжевых координат; 2) величины v^0 соответствуют одному из ∞^n бесконечно малых возможных перемещений системы за произвольный элемент времени dt, начиная от момента $t=t_0$ и от только что определенной конфигурации $q=q^0$. Соответствующие лагранжевы начальные скорости $\dot{q}^0$ определятся из уравнений (33), в которые вместо v и q должны быть соответственно подставлены v^0 и q^0.

Из предыдущего ясно, что посредством уравнений (40) достигнута цель, указанная в конце предыдущего пункта, т. е. задача об определении движения голономной системы сведена к интегрированию системы дифференциальных уравнений (второго порядка) *с наименьшим возможным числом неизвестных* функций (число степеней свободы системы).

С помощью чрезвычайно простого преобразования и гениального механического истолкования, принадлежащих Лагранжу, можно представить уравнения (40) в очень сжатой и выразительной форме.

37. Вторая форма уравнений Лагранжа. Возьмем снова уравнения (40)

$$\tau_h = Q_h \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где

$$\tau_h = \sum_{i=1}^{N} m_i a_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{38}$$

и живую силу системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i \cdot v_i,$$

которая, если ее рассматривать как сложную функцию от q, $\dot{q}$, t, выраженную через посредство функций

$$v_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial P_i}{\partial t} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{33}$$

и взять от нее частную производную по любому $\dot{q}_h$, дает

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{i=1}^{N} m_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_h}; \tag{41}$$

если же мы возьмем от нее частную производную по любому q_h, то получим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{i=1}^{N} m_i v_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_h}.$$

Но из соотношений (33) следует, что

$$\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial P_i}{\partial q_h},$$

так что можно написать

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{i=1}^{N} m_i v_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h};$$

отсюда, беря полную производную по времени и замечая, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial P_i}{\partial q_h} = \frac{\partial}{\partial q_h}\frac{dP_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial q_h},$$

получим

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{i=1}^{N} m_i a_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} + \sum_{i=1}^{N} m_i v_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

после чего, вычитая из этих тождеств почленно соответствующие тождества (41) и принимая во внимание соотношения (38), придем к тождествам

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = \tau_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \qquad (42)$$

Прежде чем воспользоваться этими тождествами для целей, которые мы имеем в виду, заметим, что формальные выводы, путем которых мы к ним пришли, фактически не зависят от предположения, что лагранжевы координаты q независимы, и остаются в силе даже тогда, когда число этих координат больше числа степеней свободы, как это имеет место, когда координаты должны удовлетворять уравнениям кинематических связей.

На основании тождеств (42) мы можем придать уравнениям (40) явный вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n); \qquad (43)$$

уравнения (43) и представляют собой *вторую форму уравнений Лагранжа.* Заметим, что когда в механике говорят об „уравнениях Лагранжа“, то обычно имеют в виду уравнения (43). Прибавим еще, что в дальнейшем иногда будет удобнее называть левые части уравнений (43), тождественные выражениям τ_h, „лагранжевыми биномами“ (относящимися к системе с живой силой T)*).

---

*) „Лагранжевы биномы“, взятые с обратным знаком, представляют обобщенные силы инерции. *(Прим. ред.)*

Все, что в предыдущем пункте было сказано об уравнениях (40), остается, естественно, в силе и для этих уравнений Лагранжа, которые представляют собой не что иное, как те же уравнения (40), только написанные в ином виде. Они дают полную постановку задачи о движении голономной системы, а с аналитической точки зрения образуют систему дифференциальных уравнений второго порядка от n неизвестных функций $q_h(t)$, приводимую к нормальному виду.

Может быть, не бесполезно доказать здесь снова прямым путем это последнее обстоятельство, т. е. разрешимость n уравнений (43) относительно n лагранжевых ускорений $\ddot{q}$. С этой целью заметим, что даже при более общем предположении, что связи зависят от времени, составляющие Q_h действующих сил и живая сила T являются функциями исключительно от q, $\dot{q}$ и от t, так что $\ddot{q}$ входят только в члены

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}.$$

С другой стороны, операция $\frac{d}{dt}$, поскольку она прилагается к функциям от q, $\dot{q}$ и t, явно может быть представлена в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\dot{q}_k\frac{\partial}{\partial q_k}+\sum_{k=1}^{n}\ddot{q}_k\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k};$$

поэтому в любом из уравнений (43) вторые производные $\ddot{q}$ войдут только в члены, линейные относительно этих производных

$$\sum_{k=1}^{n}\ddot{q}_k\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}.$$

Вспомним теперь (гл. IV, п. 11), что если связи зависят от времени, то можно положить

$$T=T_0+T_1+T_2,$$

где T_0 не зависит от $\dot{q}$, T_1 однородна и линейна относительно $\dot{q}$ и

$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{hk=1}^{n}a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k; \tag{44}$$

если же связи не зависят от t, то живая сила сведется к своей квадратичной части (44). Таким образом, мы видим, что в любом случае

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}=a_{hk}, \tag{45}$$

а так как определитель $\|a_{hk}\|$ не может исчезать тождественно (гл. IV, п. 11), то заключаем, как и в предыдущем пункте, что уравнения Лагранжа разрешимы относительно n ускорений $\ddot{q}$.

38. В силу того, что изложено выше, уравнения (43) представляют собой не что иное, как преобразованную форму уравнений (40). Однако, если это и верно с аналитической стороны, особая ценность уравнений Лагранжа с теоретической точки зрения заключается в том, что в окончательном синтезе они разделяют механические элементы, определяющие движение. Именно, все, что зависит от активных сил, объединяется в лагранжевых компонентах (обобщенных силах) Q_h, а все, относящееся к материальной структуре системы, синтезируется в одной величине T, т. е. в живой силе.

Отсюда следует, что две материальные системы совершенно различной материальной структуры с точки зрения аналитического представления движения динамически эквивалентны, т. е. при подходящих силах имеют одни и те же уравнения движения, если только при надлежащем выборе лагранжевых координат они допускают одно и то же выражение для живой силы. Очень простой пример такой динамической эквивалентности материальных систем, физически различных между собой, мы будем иметь (как это будет видно в п. 49), рассматривая, с одной стороны, одну свободную материальную точку в пространстве (отнесенную к декартовым координатам), а с другой стороны, материальный диск, свободно движущийся в своей плоскости (если за его лагранжевы координаты примем декартовы координаты какой-нибудь неизменно связанной с ним точки, а третий параметр выберем пропорциональным углу, определяющему его ориентировку в плоскости относительно неподвижных осей).

39. Теорема и интеграл живых сил. Так как уравнения Лагранжа вполне определяют движение голономной системы, то всякое свойство движения должно являться следствием из этих уравнений. В виде примера полезно проверить, что, когда связи не зависят от времени, уравнения (43) будут содержать в себе теорему живых сил, которая, как уже известно, справедлива для всякой системы с такими связями (п. 30).

С этой целью, обозначая через $dq_h (h=1, 2, \ldots, n)$ лагранжевы составляющие элементарного перемещения, которое голономная система совершает при своем движении в любой элемент времени dt, умножим каждое уравнение (43) на соответствующий дифференциал dq_h и сложим их почленно. Таким образом, получим уравнение

$$\sum_{h=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}-\frac{\partial T}{\partial q_h}\right)dq_h=\sum_{h=1}^{n} Q_h dq_h. \tag{46}$$

Вспоминая тождество (36) и принимая во внимание, что при связях, не зависящих от времени, всякое действительное элементарное перемещение является также и виртуальным, мы видим, что выражение в правой части дает элементарную работу dL, выполняемую активными силами на рассматриваемом перемещении dq_h системы.

Что же касается левой части уравнения (46), то заметим, что, при заданной независимости связей от времени, живая сила T представляет собой квадратичную форму от $\dot{q}_h$ с коэффициентами, не зависящими от t. Ввиду этого прежде всего имеем по теореме Эйлера

$$2T = \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}$$

и, следовательно, дифференцируя по времени, получим

$$2\frac{dT}{dt} = \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} + \sum_{h=1}^{n} \ddot{q}_h \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h},$$

а с другой стороны, так как T явно зависит только от q и $\dot{q}$, имеем

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \frac{\partial T}{\partial q_h} + \sum_{h=1}^{n} \ddot{q}_h \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}.$$

Тогда, вычитая по частям это уравнение из предыдущего, получим соотношение

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h}\right)\dot{q}_h,$$

которое по умножении на dt выразит, что левая часть уравнения (46) является элементарным приращением dT, получаемым живой силой за элемент времени dt.

Таким образом, уравнение (46) есть не что иное, как уравнение

$$dT = dL, \tag{47}$$

выражающее *теорему живых сил.*

Далее, если прямо приложенные силы F_i являются производными от потенциала U, то в лагранжевых координатах имеем

$$Q_h = \frac{\partial U}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n);$$

так как в силу независимости связей от времени потенциал U зависит только от q (п. 31), то имеем

$$dL = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_h} dq_h = dU.$$

Уравнение (47) принимает теперь вид

$$dT = dU$$

и дает после интегрирования *интеграл живых сил* или *энергии*.

40. Функция Лагранжа. Отбросим теперь предположение, что связи не зависят от времени, но будем попрежнему считать, что активные силы F_i являются производными от потенциала U. В лагранжевых координатах все еще будем иметь

$$Q_h = \frac{\partial U}{\partial q_h}; \tag{48}$$

при этом во избежание недоразумений необходимо иметь в виду, что если связи явно зависят от времени, то потенциал U, выраженный в лагранжевых координатах, будет также зависеть, вообще говоря, помимо q, еще и от t.

Уравнения Лагранжа, принимая во внимание равенства (48), можно в этом случае написать в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial (T+U)}{\partial q_h} = 0;$$

если заметим, что в силу независимости U от $\dot{q}$ имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial (T+U)}{\partial \dot{q}_h},$$

то, полагая

$$T + U = \mathfrak{L}(q, \dot{q} \,|\, t), \tag{49}$$

можно придать уравнениям Лагранжа более простой вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_h} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{50}$$

В этих уравнениях функция $\mathfrak{L}$, так называемая *функция Лагранжа, или кинетический потенциал,* определена равенством (49), так что по отношению к аргументам $\dot{q}$ она представляет собой целую рациональную функцию второй степени.

41. Общие лагранжевы системы. С аналитической точки зрения форма (50) уравнений Лагранжа наводит на мысль рассматривать в виде естественного обобщения системы дифференциальных уравнений типа (50) в предположении, что $\mathfrak{L}$ есть *какая угодно* функция от аргументов q, $\dot{q}$ и t. Эти системы обычно называются *общими лагранжевыми системами.*

Речь идет, очевидно, все еще о системе второго порядка относительно неизвестных функций $q_i(t)$; легко указать условия того, чтобы такая система была *нормальной* (т. е. разрешимой относительно n вторых производных $\ddot{q}$). Действительно, посредством рассуждения, аналогичного развитому в п. 37 для уравнений Лагранжа, мы увидим, что в любом уравнении (50) лагранжевы ускорения $\ddot{q}$ входят только линейно, именно в форме

$$\sum_{k=1}^{n} \ddot{q}_k \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k},$$

откуда следует, что необходимое и достаточное условие для указанной разрешимости системы (50) заключается в том, чтобы симметричный определитель

$$\Delta = \left\| \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \right\|,$$

так называемый гессиан функции Лагранжа по аргументам $\dot{q}$, не был тождественно равен нулю. В динамическом случае этот гессиан на основании формул (45), (49), естественно, сведется к дискриминанту $\| a_{hk} \|$ полной живой силы T или ее квадратичной части T_2, в зависимости от того, зависят или нет связи от времени.

В виде примера заметим, что система (50) определенно не будет нормальной, если $\mathfrak{L}$ по отношению к $\dot{q}$ есть однородная функция первой степени. Действительно, в этом случае по теореме Эйлера будем иметь тождественно

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \mathfrak{L}$$

и, следовательно, если возьмем производную по любому $\dot{q}_h$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n);$$

так как эти n линейных уравнений сохраняют свое значение при каких угодно значениях $\dot{q}$ и, следовательно, также и при значениях, которые не все равны нулю, то заключаем, что должен исчезать определитель из коэффициентов, т. е. гессиан функции $\mathfrak{L}$. Этот результат можно еще более уточнить, если предположить, что функция $\mathfrak{L}$, кроме того, что однородна и первой степени относительно $\dot{q}$, еще и не зависит от t; в этом случае легко видеть, что уравнения (50) не независимы, а связаны тождественным соотношением

$$\sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \mathfrak{L}_h = 0,$$

где для краткости через $\mathfrak{L}_h$ обозначен бином, который появляется в левой части h-го из уравнений (50). Действительно, в силу предположения, что $\mathfrak{L}$ не содержит явно t, имеем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}_h}=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\partial^2\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}_h\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial^2\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}_h\partial\dot{q}_k}\ddot{q}_k\right\}; \tag{51}$$

а так как по предположению все $\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial q_h}$, $\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}_k}$ однородны относительно $\dot{q}$ и соответственно первой и нулевой степени, то по теореме Эйлера имеем

$$\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial^2\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}_h\partial q_k}\dot{q}_h=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial q_k},\quad \sum_{h=1}^{n}\frac{\partial^2\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}_h\partial\dot{q}_k}\dot{q}_h=0,$$

и достаточно подставить выражения (51) в правую часть соотношения

$$\sum_{h=1}^{n}\dot{q}_h\mathfrak{L}_h=\sum_{h=1}^{n}\dot{q}_h\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}_h}-\sum_{h=1}^{n}\dot{q}_h\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial q_h},$$

чтобы убедиться, что мы имеем здесь выражение, тождественно равное нулю.

42. Кинетические моменты (обобщенные количества движения). Интегралы моментов. Кинетическими моментами или обобщенными количествами движения называются частные производные

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}_h}$$

от лагранжевой функции по скоростям $\dot{q}_h$. Название „кинетические моменты“ было введено в употребление в Англии, где *количество движения* называют *моментом*; с другой стороны, если за лагранжевы параметры принимаются декартовы координаты x_i, y_i, z_i точек системы, то, очевидно, имеем

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{x}_i}=m_i\dot{x}_i,\quad \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{y}_i}=m_i\dot{y}_i,\quad \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{z}_i}=m_i\dot{z}_i.$$

Наконец, для некоторых из систем координат какая-либо из производных $\partial\mathfrak{L}/\partial q_i$ может быть действительно моментом количества движения в нашем смысле слова. Так, например, для материальной точки с массой m, отнесенной к цилиндрическим координатам r, θ, z, живая сила имеет вид

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2),$$

так что

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}$$

дает как раз момент количества движения относительно оси z.

Предположим теперь, что в какой-нибудь лагранжевой системе в общем смысле или, в частности, в динамической системе функция $\mathfrak{L}$ не зависит от одной из переменных q, например от q_i. В этом случае уравнение с индексом i даст непосредственно *первый интеграл*

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}_i}=\text{const}. \tag{52}$$

Интегралы этого типа называются в силу только что сказанного *первыми интегралами моментов*[1].

Прибавим еще, что те координаты q, которые не входят в функцию Лагранжа, как раз и дают место этим интегралам; английские авторы называют эти координаты *игнорируемыми* или *циклическими*. В дальнейшем (п. 45) мы узнаем причину названия „игнорируемые"; здесь же для оправдания другого названия — „циклические" — заметим, что в случае одной материальной точки, отнесенной к цилиндрическим координатам, из указанного выше выражения живой силы следует, что функция Лагранжа $\mathfrak{L}=T+U$ не будет зависеть от параметра θ только тогда, когда поле действующих сил представляет круговую (*циклическую*) симметрию относительно оси z.

43. Интеграл энергии. Другой тип первого интеграла имеет место для тех лагранжевых систем (50), для которых функция Лагранжа не зависит от времени.

Для получения этого интеграла удобно установить сначала тождество, действительное для всех лагранжевых систем, которое и само по себе оказывается полезным в некоторых случаях. Для этого начнем с замечания, что если возьмем производную по t от $\mathfrak{L}(q,\ \dot{q}\,|\,t)$, то получим

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt}=\sum_{h=1}^{n}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial q_h}\dot{q}_h+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}_h}\ddot{q}_h\right)+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t};$$

с другой стороны, умножая каждое из уравнений (50) на соответствующую составляющую скорости $\dot{q}_h$ и складывая, получим

$$\sum_{h=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}_h}-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial q_h}\right)\dot{q}_h=0.$$

---

[1] Соотношения $\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}_i}=c_i$ можно называть с таким же правом первыми интегралами количеств движения. (*Прим. ред.*)

Если теперь из этого уравнения вычтем предыдущее, то придем к уравнению

$$\sum_{h=1}^{n}\left(\dot{q}_h \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h}+\ddot{q}_h \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h}\right)-\frac{d\mathfrak{L}}{dt}+\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}=0,$$

которому, очевидно, можно придать вид

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h}\dot{q}_h-\mathfrak{L}\right)+\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}=0;$$

это и есть общее тождество, о котором было сказано в начале этого пункта; если положить для краткости

$$H=\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h}\dot{q}_h-\mathfrak{L}, \tag{53}$$

то можно написать

$$\frac{dH}{dt}+\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}=0.$$

Предполагая, что функция $\mathfrak{L}$ не зависит от времени, мы выведем отсюда, что для лагранжевой системы имеет место первый интеграл

$$H=\text{const}. \tag{54}$$

Заметим, что в динамическом случае при связях, не зависящих от времени, и при действующих силах, являющихся производными от потенциала U, полученный таким образом интеграл есть не что иное, как интеграл живых сил. Действительно, в этом случае по определению имеем

$$\mathfrak{L}=T+U,$$

где U зависит только от q, а T есть квадратичная форма относительно $\dot{q}$ с коэффициентами, не зависящими от времени, так что по теореме Эйлера будет иметь место тождество

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\dot{q}_h=2T;$$

отсюда на основании формулы (53) имеем

$$H=2T-(T+U)=T-U,$$

т. е. мы видим, что H есть как раз *полная энергия* системы.

Поэтому первый интеграл (54), даже и в случае общей лагранжевой системы, обычно называют *интегралом* (обобщенным) энергии.

44. Гиростатические члены. В динамике встречаются случаи, в которых при голономных связях, зависящих от времени, и при наличии благодаря этому для живой силы общего выражения (гл. IV, п. 11)

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

живая сила *оказывается не зависящей от времени.* Такой же будет и функция Лагранжа $\mathfrak{L}$, если система консервативна, так что будет существовать интеграл энергии (54), который, как это видно из того же преобразования предыдущего пункта, здесь принимает вид

$$H = 2T_2 + T_1 - (T + U) = T_2 - T_0 - U = \text{const}. \qquad (54')$$

Таким образом, в результате вычислений мы видим, что из трех слагаемых, из которых состоит T, линейное слагаемое относительно $\dot{q}$, т. е. T_1, не входит в интеграл энергии, но зато оно явно входит в функцию Лагранжа $\mathfrak{L} = T - U$ и поэтому влияет на уравнения Лагранжа.

Особенно простой случай, в котором имеют место только что указанные обстоятельства, мы будем иметь, если отнесем свободную материальную точку, находящуюся под действием консервативной силы, к системе осей $Oxyz$, равномерно вращающейся вокруг оси z, которая остается неподвижной. Если ω есть угловая скорость этих вращающихся осей и ось z предполагается ориентированной в направлении ω, то абсолютная скорость точки определится геометрической суммой относительной скорости с составляющими $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ и переносной скорости с составляющими $-\omega y$, ωx, 0 (т. I, гл. IV, пп. 4, 6), так что живая сила

$$T = \frac{1}{2} m \{(\dot{x} - \omega y)^2 + (\dot{y} + \omega x)^2 + \dot{z}^2\}$$

не будет зависеть от времени, причем

$$T_2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad T_1 = m\omega (x\dot{y} - y\dot{x}), \quad T_0 = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2).$$

Предполагая, что потенциал U действующей силы, когда он выражается через x, y, z, не зависит от времени t, мы прежде всего найдем, что существует первый интеграл вида (54). Далее, так как T_0 можно здесь истолковать как потенциал центробежной силы, происходящей от вращения осей, то интеграл (54) можно отождествить с интегралом живых сил, который мы имели бы, если бы оси координат были неподвижны, а к прямо приложенной силе была прибавлена центробежная сила. Это есть так называемый *интеграл живых сил в относительном движении* или интеграл Якоби[1]).

---

[1]) К. Якоби (Karl Gustav Jacob Jacobi) родился в Потсдаме в 1804 г., умер в Берлине в 1851 г. Был профессором университета в Кёнигсберге. Вместе с Абелем он делит славу создания теории обращения эллиптических интегралов путем введения в анализ замечательных однозначных трансцендентных функций (функций ϑ Якоби), носящих его имя, систематическую

Далее, если напишем в явной форме уравнения Лагранжа, то получим

$$m(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x) = \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$m(\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 x) = \frac{\partial U}{\partial y},$$

$$m\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Эти уравнения, естественно, совпадают с уравнениями, которые можно получить прямым путем из основного уравнения $m\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{F}$, если подставить в него вместо ускорения a_a его выражение, получаемое на основании теоремы Кориолиса (т. I, гл. IV, п. 4, б).

Таким образом, действительно, как и говорилось в общем случае, совокупность T_1 членов из T, линейных по отношению к составляющим скорости (относительной) точки (момент количества движения относительно оси вращения), не входит в интеграл живых сил, но влияет на уравнения Лагранжа посредством сложной центробежной силы, т. е. формально, посредством членов с $\dot{x}$, $\dot{y}$. Члены этой линейной функции скоростей T_1, которые входят благодаря тому, что движение точки относится не к неподвижным осям, а к вращающимся, называются *гиростатическими членами* лагранжевой функции.

При распространении на случай общей лагранжевой системы гиростатическими называются те члены функции $\mathfrak{L}$, линейные относительно $\dot{q}$, которые влияют на уравнения движения системы, но не входят в обобщенный интеграл энергии. Из сказанного вначале следует, что гиростатическими членами живой силы T, наверное, будут *члены, линейные относительно* $\dot{q}$ во всех тех динамических задачах, в которых как T, так и потенциал U не зависят от времени.

Наиболее распространенный тип таких задач будет указан в п. 46, другие же простые и механически наглядные примеры встретятся в динамике твердого тела (гл. IX, § 4).

45. Игнорирование координат. Если в функцию $\mathfrak{L}$ не входят m каких-нибудь координат q_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *(циклические координаты)*, то соответствующая система уравнений Лагранжа допускает

теорию которых он впервые дал. Не менее фундаментальными являются и результаты, полученные им в области уравнений с частными производными, и его методы интегрирования уравнений небесной механики. Главные из этих методов изложены в его превосходных „Лекциях по динамике“ (К. Г. Якоби, Лекции по динамике, М., 1936), опубликованных после его смерти (стараниями Клебша). Наконец, по всеобщему признанию, все его математические произведения, собранные в восьми томах (Берлин, 1881—1890), считаются классическими.

m первых интегралов моментов (интегралов импульсов) (п. 42)

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i} = \text{const} = c_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{55}$$

Если предположить, что рассматриваемая система уравнений Лагранжа (50) нормальна, то m уравнений системы (55) будут разрешимы относительно m производных $\dot{q}$, так как определитель, составленный из вторых производных функции $\mathfrak{L}$

$$\Delta = \left\| \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \right\|,$$

отличен от нуля (п. 41); поэтому отличным от нуля будет по крайней мере один из миноров порядка m, получающихся из m первых строк этого определителя. Следовательно, m уравнениями (55) можно прямо заменить столько же уравнений, выбранных надлежащим образом из лагранжевой системы (50).

Предположим, в частности, что речь идет о динамической системе, так что имеем $\mathfrak{L} = T + U$. В этом предположении, как мы уже знаем (п. 41), гессиан Δ функции $\mathfrak{L}$ сводится к дискриминанту $\| a_{hk} \|$ квадратичной части T_2 живой силы T или полной живой силы T, смотря по тому, зависят или не зависят связи от времени. Так как в обоих случаях речь идет об определенной положительной форме, то дискриминант во всяком случае будет отличным от нуля и положительным, как и все его главные миноры; вместе с другими аналогичными главными минорами найдется минор m-го порядка, образованный пересечением m первых строк и m первых столбцов, также отличный от нуля. Уравнения (55) будут, таким образом, разрешимы относительно m производных $\dot{q}_i$ от m циклических координат $q_i (i = 1,\ 2, \ldots, m)$, и потому их можно взять вместо m первых уравнений Лагранжа.

Остальные $n - m$ уравнений, которые по предположению уже не содержат q_i, можно сделать независимыми также и от $\dot{q}_i$, $\ddot{q}_i$, подставляя вместо этих производных их выражения через q_h, $\dot{q}_h$, $\ddot{q}_h (h > m)$ и c_i, которые получатся из уравнений (55). Таким образом мы придем к системе дифференциальных уравнений второго порядка, заключающей в себе только $n - m$ неизвестных $q_h (h = m + 1, \ldots, n)$. Докажем теперь одно замечательное свойство, которое, конечно, нельзя было предвидеть a priori, а именно, что эта новая система все еще сохраняет лагранжеву форму, но уже, естественно, не по отношению к первоначальной функции $\mathfrak{L}$, а по отношению к *приведенной лагранжевой функции*

$$\mathfrak{L}^* = \mathfrak{L} - \sum_{i=1}^{m} c_i \dot{q}_i; \tag{56}$$

здесь, конечно, предполагается, что в функцию $\mathfrak{L}$ вместо $\dot{q}_i$ подставлены их выражения через q_h, $\dot{q}_h$, c_i, полученные из системы (55).

Справедливость этого проверяется непосредственно, так как, обозначая через x какой-нибудь один из аргументов q_h или $\dot{q}_h$ при $h>m$, мы имеем по определению функции $\mathfrak{L}^*$

$$\frac{\partial\mathfrak{L}^*}{\partial x}=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}_i}\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial x}-\sum_{i=1}^{m}c_i\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial x}$$

или же, на основании системы (55),

$$\frac{\partial\mathfrak{L}^*}{\partial x}=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}.$$

То обстоятельство, что определение переменных q_h при $h>m$ можно свести к интегрированию некоторой лагранжевой системы, в которой уже не осталось никакого следа от m координат $q_1, \ldots, q_m$, оправдывает название этого метода *методом игнорирования координат,* которое обычно дается предыдущему приведению. Название „игнорирование“ применяется здесь потому, что при определении координат q_h при $h>m$ можно не знать (игнорировать) остальные координаты, входившие вначале при действительном описании задачи. При этом заметим, что в большинстве конкретных задач интегрируемость в квадратурах очень часто является следствием наличия игнорируемых координат.

46. Гиростатические члены, вводимые в динамическом случае методом игнорирования координат. Возвращаясь снова к динамическому случаю с консервативными действующими силами, добавим предположение, что *связи не зависят от времени;* вследствие этого живая сила T будет квадратичной формой относительно $\dot{q}$ с коэффициентами, зависящими только от q,

$$T=\frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{n}a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k.$$

Легко видеть, что в этом случае исключение циклических координат $q_i (i=1, 2, \ldots, m)$ введет в приведенную функцию Лагранжа $\mathfrak{L}^*$ некоторое число линейных относительно $\dot{q}_h (h=m+1, \ldots, n)$ членов, которые имеют гиростатический характер.

Для доказательства заметим прежде всего, что при указанных выше предположениях, так как $\mathfrak{L}=T+U$ и U не зависит от $\dot{q}$, первые интегралы (55) будут иметь вид

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}=c_i \qquad (i=1, 2, \ldots, m). \qquad (55')$$

Эти m интегралов дадут столько же линейных неоднородных относительно $\dot{q}$ уравнений с *коэффициентами, зависящими только от* $q_h (h=m+1, \ldots, n)$; решая эти уравнения относительно $\dot{q}_i$, получим

$$\dot{q}_i = \gamma_i + \lambda_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{55''}$$

где γ_i — известные функции от одних только q_h (и от постоянных c_i), а λ_i обозначают m линейных относительно $\dot{q}_h$ форм с коэффициентами, зависящими только от q_h (но не от c_i).

Приведенная функция Лагранжа на основании формулы (56) определится равенством

$$\mathfrak{L}^* = T + U - \sum_{i=1}^{m} c_i \dot{q}_i, \tag{56'}$$

где вместо $\dot{q}_i$ нужно подставить как в T, так и в сумму их выражения через $\dot{q}_h$. Все упомянутые выше гиростатические члены получатся только от этой суммы (и при произвольных значениях c_i будут неприводимыми). Это объясняется тем замечательным обстоятельством (которое, однако, нельзя было предвидеть a priori), что T по выполнении подстановки не будет содержать линейных членов с $\dot{q}_h$, а будет заключать в себе только члены второй и нулевой степеней относительно $\dot{q}_h$. Это можно проверить, представив уравнения (55'') в явной форме и выполнив на самом деле подстановку в T, но мы предпочтем идти иным путем, с меньшими выкладками. Отделим в T члены, квадратичные относительно $\dot{q}_i$ и $\dot{q}_h$ и билинейные относительно $\dot{q}_i$, $\dot{q}_h$, полагая

$$T = T' + B + T'',$$

где

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{m} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad B = \sum_{i=1}^{m} \sum_{h=m+1}^{n} a_{ih} \dot{q}_i \dot{q}_h,$$

$$T'' = \frac{1}{2} \sum_{h, k = m+1}^{n} a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k.$$

Равенства (55') можно написать в виде

$$\frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_i} = c_i - \frac{\partial B}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{55'''}$$

где $\frac{\partial B}{\partial \dot{q}_i}$ суть линейные формы только по отношению к $\dot{q}_h$; вследствие этого, выполняя в равенстве

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \dot{q}_i \left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_i} + 2 \frac{\partial B}{\partial \dot{q}_i} \right) + T''$$

первое частичное исключение $\dot{q}_i$, получим

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \dot{q}_i \left(c_i + \frac{\partial B}{\partial \dot{q}_i} \right) + T''. \tag{57}$$

Так как T'' уже есть квадратичная форма относительно $\dot{q}_h$, то остается только показать, что после выполнения подстановки до конца выражение под знаком суммы не будет содержать линейных членов, или, другими словами, что оно остается неизменным при изменении знака у всех $\dot{q}_h$.

Для доказательства полагаем $\bar{\dot{q}}_h = -\dot{q}_h$ и соответственно $\bar{\dot{q}}_i = \gamma_i - \lambda_i$, обозначая таким образом через $\bar{\dot{q}}_i$ те величины, в которые обращаются $\dot{q}_i$ на основании формул (55‴) после изменения знака у всех $\dot{q}_h$. Так как $\frac{\partial B}{\partial \bar{\dot{q}}_i}$ являются линейными формами относительно $\dot{q}_h$, то имеем

$$\frac{\partial B}{\partial \bar{\dot{q}}_i} = -\frac{\partial B}{\partial \dot{q}_i},$$

так что вместе с соотношениями (55‴) будут иметь место еще и равенства

$$\frac{\partial T'}{\partial \bar{\dot{q}}_i} = c_i + \frac{\partial B}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (55^{\text{IV}})$$

И так как T' есть квадратичная форма относительно $\dot{q}_i$, то вследствие симметричности соответствующей билинейной формы (полярной) справедливо тождество

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{\dot{q}}_i \frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^{m} \dot{q}_i \frac{\partial T'}{\dot{q}_i}$$

или же на основании формул (55‴) и (55$^{\text{IV}}$)

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{\dot{q}}_i \left(c_i - \frac{\partial B}{\partial \dot{q}_i}\right) = \sum_{i=1}^{m} \dot{q}_i \left(c_i + \frac{\partial B}{\partial \dot{q}_i}\right);$$

это тождество как раз и показывает, что сумма в равенстве (57), а следовательно, и сама живая сила T, остается неизменной при изменении знака у всех $\dot{q}_h$, т. е. что T не содержит линейных членов.

Отсюда следует, что в приведенной лагранжевой функции (56′) [1] линейные члены относительно $\dot{q}_h$, происходящие от суммы и поэтому появляющиеся на основании формул (55″) в сумме

$$-\sum_{i=1}^{m} c_i \lambda_i,$$

не могут сократиться; а так как $\mathfrak{L}^*$ не зависит от времени, то заключаем, что речь идет о таком же числе гиростатических членов.

Заметим еще, что то, что было изложено, представляет собой, быть может, наиболее замечательный пример лагранжевых функций, соответствующих действительным динамическим задачам и содержащих в себе гиростатические члены.

§ 7. Приложения и примеры

47. Кинетическая интерпретация биномов Лагранжа. Прежде чем иллюстрировать уравнения Лагранжа некоторыми элементарными приложениями, мы покажем на простейшем примере одной материальной точки P интересную кинематическую интерпретацию лагранжевых биномов, входящих в левые части этих уравнений.

Отнесем точку P к каким угодно лагранжевым параметрам q_1, q_2, q_3 (*криволинейные координаты* в пространстве), предполагая для простоты, что время не входит в единственное геометрическое уравнение

$$P = P(q_1, q_2, q_3), \tag{58}$$

определяющее положение точки в зависимости от координат q; при переходе к координатной форме получим три скалярных уравнения:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3), \\ y &= y(q_1, q_2, q_3), \\ z &= z(q_1, q_2, q_3). \end{aligned}\right\} \tag{58'}$$

Если в уравнении (58) заставить изменяться только одну из координат q, например q_1, приписывая вполне определенные значения q_2^0, q_3^0 остальным двум, то точка P опишет кривую, определяемую в лагранжевых координатах двумя уравнениями: $q_2 = q_2^0$, $q_3 = q_3^0$, для которой q_1 будет геометрическим параметром. Она называется *координатной линией* q_1; ясно, что при изменении q_2^0, q_3^0 получится система ∞^2 (или *конгруэнция*) линий q_1, так что через всякую точку любой области пространства, в которой уравнения (58') разрешимы однозначно относительно q, пройдет одна и только одна из этих кривых. То же самое можно сказать и о линиях q_2 и q_3.

По известному свойству вектора, являющегося производной от переменной точки (т. I, гл. I, п. 66), производная $\frac{\partial P}{\partial q_h}$, если остальным двум q, отличным от q_h, приписываются определенные значения, представит собой вектор, касательный к соответствующей линии q_h, который будет единичным только тогда, когда q_h будет длиной s дуги рассматриваемой линии. Во всяком случае, обозначая через t_h касательный единичный вектор, направленный в сторону возрастания q_h, будем иметь

$$\frac{\partial P}{\partial q_h} = \left|\frac{\partial P}{\partial q_h}\right| t_h \qquad (h = 1, 2, 3). \tag{59}$$

Возьмем теперь снова тождества (42) п. 37 и представим себе, что в них вместо τ_h подставлены их выражения (38) из п. 36. В нашем случае одной точки P получатся следующие три соотношения:

$$a \cdot \frac{\partial P}{\partial q_h} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} \qquad (h = 1,\ 2,\ 3).$$

Принимая во внимание соотношения (59), мы получим отсюда уравнения

$$a \cdot t_h = \frac{1}{\left|\frac{\partial P}{\partial q_h}\right|}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h}\right) \qquad (h = 1,\ 2,\ 3), \quad (60)$$

устанавливающие простое соотношение между биномом, стоящим в левой части любого, отдельно взятого уравнения Лагранжа, и составляющей ускорения по соответствующей обобщенной координате q; в частности, мы будем иметь тождество между тем и другим, если координата q есть как раз длина дуги рассматриваемой координатной линии.

48. Применим только что полученные формулы (60) к случаю, когда за лагранжевы координаты точки берутся ее полярные (сферические) координаты: ρ (радиус-вектор), φ (долгота) и θ (полярный угол). Здесь координатными линиями ρ являются лучи, выходящие из полюса, линиями φ — *параллели* (т. е. окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к оси z, и имеющие центры на этой оси), линиями θ — меридианы (т. е. полуокружности с центром в полюсе, имеющие диаметр на оси z). В совокупности они составят триортогональную систему (т. е. кривые трех различных систем, проходящие через любую точку пространства, будут попарно взаимно ортогональны).

В этом случае уравнения (58′) принимают, как известно, вид

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad z = \rho\cos\theta; \qquad (61)$$

поэтому для живой силы получим выражение

$$2T = \dot{\rho}^2 + \rho^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta).$$

Отсюда следует, что левые части уравнений Лагранжа, относящиеся соответственно к координатам ρ, φ, θ, будут иметь вид

$$\ddot{\rho} - \rho(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta),$$
$$\rho\sin\theta\,[2\dot{\varphi}(\dot{\rho}\sin\theta + \rho\dot{\theta}\cos\theta) + \rho\ddot{\varphi}\sin\theta],$$
$$2\rho\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho^2(\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta).$$

Так как на основании уравнений (61) имеем

$$\left|\frac{\partial P}{\partial \rho}\right| = 1, \qquad \left|\frac{\partial P}{\partial \varphi}\right| = \rho\sin\theta, \qquad \left|\frac{\partial P}{\partial \theta}\right| = \rho,$$

то, применяя формулу (60), заключаем, что составляющие ускорения по линиям ρ, φ, θ имеют следующие выражения:

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta),$$

$$a_\varphi = 2\dot{\varphi}(\dot{\rho}\sin\theta + \rho\dot{\theta}\cos\theta) + \rho\ddot{\varphi}\sin\theta,$$

$$a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho(\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta).$$

49. Пример динамической эквивалентности. Рассмотрим твердый материальный диск какой угодно формы и структуры, который может свободно двигаться в своей плоскости. Обозначим через G его центр тяжести, через ξ_0, η_0 — координаты точки G относительно осей $\Omega\xi\eta$, неподвижных относительно плоскости, в которой происходит движение, и, наконец, через φ — угол, составляемый с осью ξ какой-нибудь ориентированной прямой, неизменно связанной с диском. Следовательно, речь идет о голономной системе со связями, не зависящими от времени, имеющей три степени свободы, за лагранжевы координаты которой можно принять три параметра: ξ_0, η_0 и θ.

Для того чтобы написать соответствующие уравнения Лагранжа, необходимо прежде всего найти выражение живой силы T в функции от ξ_0, η_0, θ, к которому можно придти, пользуясь определением живой силы или применяя теорему Кёнига (гл. IV, п. 8). В этом последнем случае достаточно вспомнить, что живая сила поступательного движения будет $m\frac{\dot{\xi}_0^2 + \dot{\eta}_0^2}{2}$, живая сила вращательного движения вокруг G будет $\frac{A\dot{\theta}^2}{2}$ (гл. IV, п. 10), где m обозначает массу диска и A — его момент инерции относительно перпендикуляра к диску в центре тяжести G или, что все равно, полярный момент инерции относительно G. Вводя вместо A соответствующий радиус инерции δ, получим

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}_0^2 + \dot{\eta}_0^2 + \delta^2\dot{\theta}^2);$$

если за третий лагранжев параметр вместо θ примем $\zeta_0 = \delta\theta$, то это выражение живой силы диска приведется к виду

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}_0^2 + \dot{\eta}_0^2 + \dot{\zeta}_0^2). \qquad (62)$$

Оно тождественно с выражением живой силы одной материальной точки с массой m и координатами ξ_0, η_0, ζ_0, свободно движущейся в пространстве, а в этом и заключается, в смысле, разъясненном в п. 38, динамическая эквивалентность диска и свободной материальной точки.

Левые части уравнений Лагранжа, вычисленные, исходя из выражения (62) для живой силы, относительно лагранжевых координат ξ_0, η_0, ζ_0, приводятся к ньютоновой форме $m\ddot{\xi}_0$, $m\ddot{\eta}_0$, $m\ddot{\zeta}_0$, тогда как правые части, составляющие активной силы по координатам ξ_0, η_0, ζ_0, зависят, естественно, на основании соотношений (37) от активных сил; и так как относительно последних не делается никаких дальнейших предположений, то ничего нельзя прибавить к тому, что уже было сказано в общем случае в пп. 37—40. Таким образом, если речь идет о консервативных силах, при наличии которых всегда имеется функция Лагранжа $L=T+U$, не зависящая от времени, то будет существовать и интеграл живых сил. Кроме того, так как живая сила T в этом случае явно не содержит ни одного параметра Лагранжа, а только производные от них, то будем иметь столько первых интегралов, сколько среди аргументов ξ_0, η_0, ζ_0 будет таких, от которых не зависит функция U (п. 42).

Важный тип задач динамики диска встречается в авиации в тех случаях, когда, желая объединить законы движения самолета в вертикальной плоскости, приходится схематически уподоблять его диску с вертикальной плоскостью, в которой движется его центр тяжести; при этом, естественно, из действующих сил в основном учитываются только сила тяжести и сопротивление воздуха, оцениваемое надлежащим образом по отношению к действительному профилю самолета.

50. Тяжелая точка, удерживаемая на поверхности гладкого цилиндра с вертикальными образующими. Пользуясь системой осей, связанных с Землей, примем направленную вниз вертикаль за ось ζ и представим в виде

$$\xi=\xi(s), \quad \eta=\eta(s)$$

параметрические уравнения нормального сечения цилиндра, где за параметр принята длина дуги s этого сечения. Положение материальной точки P, удерживаемой цилиндром, определяется, очевидно, соответствующими значениями s и ζ, которые поэтому можно принять за лагранжевы координаты точки. А так как по определению параметра s имеем

$$d\xi^2+d\eta^2=ds^2,$$

то живая сила точки P с массой, равной единице, при указанных условиях определится равенством

$$T=\frac{1}{2}v^2=\frac{1}{2}(\dot{s}^2+\dot{\zeta}^2). \tag{63}$$

С другой стороны, если точка P подвергается действию только силы тяжести, то для активной силы существует потенциал

$$U=g\zeta, \tag{64}$$

относящийся к точке, масса которой равна единице. Теперь, предполагая, что цилиндр является гладким, мы можем прямо применить уравнения Лагранжа, которые на основании соотношений (63) и (64) будут иметь вид

$$\ddot{s}=0, \quad \ddot{\zeta}=g,$$

т. е. будут тождественны с уравнениями движения свободно падающего тяжелого тела (отнесенного к прямоугольным осям, лежащим в вертикальной плоскости, в которой находится начальная скорость, причем одна из осей совпадает с направленной вниз вертикалью). Поэтому мы заключаем, что если тяжелая точка вынуждена двигаться по гладкому цилиндру с вертикальными образующими и с каким угодно сечением, то ее траектория будет такой кривой, которая после развертывания цилиндра на плоскость обратится в дугу параболы (с возможным вырождением в прямую), имеющую осью образующую цилиндра и обращенную выпуклостью вниз.

Наконец, даже не составляя на самом деле уравнений Лагранжа, можно придти к тому же заключению, замечая, что по отношению к координатам s, ζ живая сила (63) и потенциал (64) нашей точки тождественны с живой силой и потенциалом свободно падающего тяжелого тела, отнесенного, в вертикальной плоскости, содержащей начальную скорость, к осям s и ζ, вторая из которых совпадает с вертикалью, направленной вниз. Мы имеем здесь, таким образом, второй пример динамической эквивалентности (п. 38).

51. Микросейсмограф с двумя горизонтальными составляющими или сферический маятник с подвижным центром подвеса. Сейсмографы, как известно, представляют собой инструменты, предназначенные для автоматической регистрации землетрясений. Они дают непосредственно диаграмму регистрирующей точки, скрепленной каким-либо образом с основанием прибора, неизменно связанным с землей. Сейсмографы бывают большей частью двух типов, соответственно называемых *сейсмографами с горизонтальными составляющими и сейсмографами с вертикальными составляющими*[1].

Общая теория приборов первого типа может быть построена, если рассмотреть в качестве схемы сферический маятник, точка подвеса O которого может двигаться в зависимости от колебаний земной коры при землетрясениях.

Заметим, кстати, что мы пришли здесь к такому примеру связей, зависящих от времени, который не носит искусственного характера и не является чисто теоретическим. Мы предполагаем здесь уточнить аналитическую постановку задачи о движении такого схематического прибора.

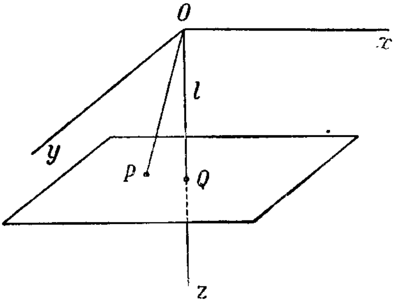
Обозначим через $\Omega\xi\eta\zeta$ оси координат, которые назовем геоидными, вследствие того, что они неизменно связаны с геоидом (или

---

[1] Б. Голицын, Vorlesungen über seismometrie, Leipzig, Teubner 1914. Ср., в частности, гл. IV, V и VIII.

также с конфигурацией Земли, которую она имела бы при отсутствии колебаний земной коры), и, отвлекаясь от движения Земли, примем их за механическую систему отсчета.

Рассмотрим, далее, маятник длиною l и с массой P, центр сферического подвеса которого пусть будет закреплен в некоторой точке O, связанной с Землей; обозначим через $Oxyz$ оси координат, неизменно связанные с некоторым куском земной коры (в окрестности точки O) и имеющие при сейсмическом покое ось z направленной по вертикали вниз (фиг. 20).



Фиг. 20.

Точка подвеса O, принимая участие во всяком местном сейсмическом движении, определяет колебательное движение массы маятника, и сейсмограф будет регистрировать колебания точки P относительно земных осей $Oxyz$ или, лучше сказать, колебания ее проекции на плоскость $z=l$. Сейсмографическая задача состоит в том, чтобы получить из этих данных неизвестное колебание точки O относительно геоидных осей $\Omega\xi\eta\zeta$.

При землетрясениях скорость $\dot{O}$ точки O является неизвестной векторной функцией времени, составляющие которой по земным осям мы обозначим через u, v, w, в силу чего u и v только *приблизительно* могут быть названы *горизонтальными составляющими* и w — *вертикальной* составляющей сейсмической скорости точки O, так как, строго говоря, эти составляющие должны были бы относиться к геоидным осям. Обозначим через ω угловую скорость, которую во время землетрясения имеет система земных осей $Oxyz$ относительно воображаемой геоидной системы осей, и через p, q, r — соответствующие составляющие по осям $Oxyz$.

Любая точка P, неизменно связанная с этими земными осями, имела бы относительно геоидных осей (переносную) скорость

$$v_\tau = \dot{O} + \omega \times \overrightarrow{OP},$$

а (относительное) движение массы P маятника по отношению к осям $Oxyz$ дается диаграммой сейсмографа, так как движение точки P можно заменить движением ее проекции на плоскость $z=l$, если ограничиться малыми колебаниями в смысле п. 52 гл. II, что вполне допустимо для данной задачи. Другими словами, можно принять координату z всегда равной l, так что, обозначая через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ единичные векторы осей x, y, z, будем иметь

$$P = O + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + l\boldsymbol{k},$$

причем можно сказать, что при принятом приближении x, y являются лагранжевыми координатами движущейся точки относительно земных осей.

Отсюда следует, что скорость (относительная) точки P по отношению к осям $Oxyz$ выражается в виде

$$\boldsymbol{v}_r = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j},$$

а скорость (абсолютная) относительно геоидных осей определяется равенством

$$\dot{P} = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_\tau = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{O} + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OP}.$$

Обозначая через Q положение равновесия точки P в условиях сейсмического покоя (т. е. точку пересечения оси z с плоскостью $z = l$), можем написать тождество:

$$\boldsymbol{\omega} \times (\overrightarrow{OP}) = \boldsymbol{\omega} \times (\overrightarrow{OQ}) + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{QP}.$$

Если допустим, что ωl имеет тот же порядок, что и скорость проекции точки P, то слагаемым $\omega \times \overrightarrow{QP}$ в правой части, модуль которого будет порядка $\frac{\omega l \cdot QP}{l}$, можно пренебречь, так как дробь $\frac{QP}{l}$ можно рассматривать как малую первого порядка. Отсюда заключаем, что

$$\dot{P} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{O} + l\omega \times \boldsymbol{k} = \\ = (\dot{x} + u + lq)\,\boldsymbol{i} + (\dot{y} + v - lp)\,\boldsymbol{j} + w\boldsymbol{k}.$$

Тогда, если для краткости положим

$$u_0 = u + lq, \qquad v_0 = v - lp, \tag{65}$$

$$T_0 = \frac{1}{2}(u_0^2 + v_0^2 + w^2), \tag{66}$$

где T_0 обозначает живую силу точки Q, масса которой равна единице, то для живой силы T точки P с массой, тоже равной единице, мы найдем выражение

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + u_0\dot{x} + v_0\dot{y} + T_0. \tag{67}$$

Теперь, чтобы написать уравнения Лагранжа, нам остается только рассмотреть активные силы, которые сводятся здесь к силе тяжести, имеющей потенциал

$$U = g\zeta,$$

или, если обозначим через γ третью координату точки O относительно геоидных осей и через γ_1, γ_2, γ_3 — направляющие косинусы оси ζ относительно земных осей,

$$U = g(\gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z),$$

где z вычисляется из уравнения сферы с центром в O и радиусом l. Чтобы перейти от этого точного выражения к достаточному для нашей цели приближенному, заметим, что в дифференциальные уравнения входят первые производные от потенциала, поэтому мы можем пренебречь в выражении для U только членами порядка выше второго. Можно положить, следовательно,

$$z = l\left(1 - \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{l^2}\right);$$

с другой стороны, принимая отклонение прямой OP от вертикали за малую величину, т. е. рассматривая величины γ_1 и γ_2 как малые первого порядка, мы увидим, что третий направляющий косинус $\gamma_3 = \sqrt{1-\gamma_1^2-\gamma_2^2}$ будет отличаться от единицы только членами второго порядка; поэтому при только что указанном порядке приближения можно написать

$$U = g\left(\gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + l - \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{l}\right).$$

Отсюда и из выражения (67) для T получаем уравнения движения Лагранжа в виде

$$\left.\begin{aligned} \dot{u}_0 + \ddot{x} &= g\left(\gamma_1 - \frac{x}{l}\right), \\ \dot{v}_0 + \ddot{y} &= g\left(\gamma_2 - \frac{y}{l}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (68)$$

где u_0, v_0, γ_1, γ_2 суть неизвестные заранее функции от t, а x и y и, следовательно, $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ нужно рассматривать как известные, так как они могут быть получены из инструментальных диаграмм.

Вспомним теперь, что общая задача сейсмологии состоит в определении движения земных осей относительно геоидных, т. е. в определении шести характеристик: u, v, w, p, q, r. Эти характеристики удобно разбить на две группы: u, v, p, q, с одной стороны, и w, r — с другой. Последние две величины даются показанием сейсмографа с вертикальными составляющими, и достаточно вспомнить формулы Пуассона

$$\dot{\gamma}_1 = \gamma_2 r - \gamma_3 q, \quad \dot{\gamma}_2 = \gamma_3 p - \gamma_1 r$$

и принять во внимание, что при нашем порядке приближения γ_3 равно единице, а произведениями $\gamma_2 r$, $\gamma_1 r$ можно пренебречь, как величинами второго порядка, чтобы видеть, что приближенно можно положить

$$\dot{\gamma}_1 = -q, \quad \dot{\gamma}_2 = p. \qquad (69)$$

Отсюда мы заключаем, что определение величин γ_1, γ_2 равносильно определению p и q; поэтому маятник с двумя горизонтальными составляющими дает два соотношения между инструментальными данными и неизвестными характеристиками u_0, v_0, p и q.

При помощи двух маятников с различной длиной, но достаточно близких друг от друга для того, чтобы $\dot{u}_0$, $\dot{v}_0$, γ_1, γ_2 можно было рассматривать как совпадающие, получатся четыре уравнения между этими четырьмя неизвестными.

Наконец, нужно отметить, что опыт привел к подтверждению того, что в наиболее часто встречающихся случаях, т. е. когда речь идет о сейсмических возмущениях, вызываемых отдаленными землетрясениями (микроколебания, происходящие от удаленных источников возмущений), можно прямо пренебречь вращением земных осей относительно осей геоидных, так что движение осей $Oxyz$ можно рассматривать как чисто поступательное. В этом случае в силу равенств (65) u_0, v_0 будут равны горизонтальным составляющим u, v скорости сейсмического колебания. Уравнения же (69), вследствие того что вначале (т. е. в условиях покоя) прямая OP направлена вертикально, дают $\gamma_1=\gamma_2=0$, в силу чего уравнения (68) приводятся к следующим:

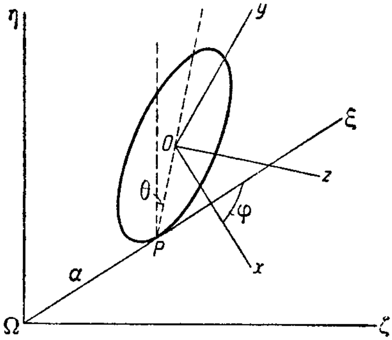
$$\dot{u}=-\left(\ddot{x}+\frac{g}{l}x\right),$$
$$\dot{v}=-\left(\ddot{y}+\frac{g}{l}y\right)$$

и непосредственно дают составляющие горизонтального ускорения.

Чтобы сделать выводы из диаграммы соответствующих горизонтальных перемещений, сейсмологи прибегают к разнообразным приемам, на которых мы здесь не можем останавливаться.

52. Тяжелый диск, катящийся вдоль заданного прямолинейного пути. Этот пример заслуживает особого внимания потому, что если в общем случае условие чистого качения налагает, как мы знаем (т. I, гл. IV, п. 11), неголономную связь, то в этом частном случае это условие переходит просто в дополнительную голономную связь.

Пусть твердый однородный диск с радиусом a и массой m вынужден катиться без трения вдоль заданной неподвижной прямой. Чтобы определить положение диска в любой момент, отнесем его, следуя общему приему, к двум системам осей: к неподвижным осям $\Omega\xi\eta\zeta$ (фиг. 21), из которых ось ξ совпадает с заданным прямолинейным путем, и к осям $Oxyz$, неизменно связанным с диском, начало которых совпадает с центром диска, а ось z перпендикулярна к его плоскости. Ось ξ будет *линией узлов* подвижных осей относительно неподвижных, так что третий угол Эйлера ψ будет тождественно равен нулю. Ясно, что положение диска в любой момент будет однозначно определено, если будут указаны: первая координата α точки P, в которой ось ξ касается диска, угол наклона θ его плоскости к плоскости $\xi\eta$ (первый угол Эйлера) и, наконец, угол φ (второй угол Эйлера, отсчитываемый в правом направлении), на который повернется подвижная ось x вокруг оси z, отправляясь от ориентированного направления линии узлов.



Фиг. 21.

Из условия чистого качения следует, что в любой момент дуга, описанная какой-нибудь точкой окружности диска (в частности, точкой, которая вначале была в соприкосновении с осью ξ), равна расстоянию точки касания в рассматриваемый момент от точки касания в начальный момент. Если обозначим через α_0 и φ_0 значения α и φ в начале движения и примем во внимание, что при качении диска по оси ξ в положительную сторону ось x вращается вокруг оси z в левом направлении, то найдем соотношение

$$\alpha - \alpha_0 = -a(\varphi - \varphi_0). \tag{70}$$

Это равенство подтверждает высказанное в самом начале этого пункта положение, что в данном частном случае условие чистого качения приводит к конечному соотношению между параметрами α и φ, т. е. к голономной связи.

Благодаря этой связи число степеней свободы сводится к двум. За параметры Лагранжа мы примем два угла: θ и φ, замечая, что из уравнения (70) следует

$$\dot{\alpha} = -a\dot{\varphi}. \tag{71}$$

Теперь, чтобы написать лагранжевы уравнения движения диска, необходимо прежде всего вычислить живую силу T, к которой мы легко придем, применяя формулу (17) гл. IV (п. 10) и принимая за (подвижной) центр приведения в любой момент t ту материальную точку диска, которая находится в соприкосновении с осью ξ и скорость которой в этот момент в силу отсутствия скольжения равна нулю. Если обозначим временно через $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ подвижную систему осей, связанных с диском, ось $\bar{z}$ которой параллельна оси z диска, а ось $\bar{x}$ в момент t совпадает с осью ξ, и через A, B, C — соответствующие моменты инерции диска, то, применяя теорему Гюйгенса и вспоминая, что (центральные) моменты инерции диска относительно оси z и какого-нибудь диаметра равны $\frac{ma^2}{2}$, $\frac{ma^2}{4}$ (т. I, гл. X, пп. 34, 27), будем иметь

$$A = \frac{5}{4}ma^2, \quad B = \frac{1}{4}ma^2, \quad C = \frac{3}{2}ma^2. \tag{72}$$

Что же касается произведений инерции, то имеем

$$A' = B' = C' = 0, \tag{73}$$

и потому оси $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ параллельны трем главным центральным осям инерции диска, а новый центр приведения принадлежит одной из этих центральных осей[1]). Следует заметить, что формулы (72), (73), как не зависящие от времени, остаются в силе уже не только в рассматриваемый момент t, но и в течение всего движения.

Поэтому на основании уже упоминавшейся формулы гл. IV и принимая во внимание, что в любой момент исчезают составляющие u, v, w скорости соответствующего центра приведения, мы будем иметь

$$2T = \frac{1}{4} ma^2 (5p^2 + q^2 + 6r^2),$$

и все сведется к вычислению составляющих p, q, r угловой скорости ω диска относительно осей $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, первая из которых совпадает с линией узлов, а третья параллельна оси z диска. Обозначая теперь соответственно через $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\varkappa}$ единичные векторы линии узлов, подвижной оси z и неподвижной оси ζ, мы будем иметь (т. I, гл. III, п. 34)

$$\omega = \dot{\theta}\boldsymbol{N} + \dot{\varphi}\boldsymbol{k} + \dot{\psi}\boldsymbol{\varkappa},$$

так что при угле ψ, здесь тождественно равном нулю, мы получим

$$p = \dot{\theta}, \quad q = 0, \quad r = \dot{\varphi}$$

---

[1]) Здесь применяется следующее замечание, часто оказывающееся полезным в приложениях. *Всякая система осей, параллельных глазным центральным осям инерции твердого тела и имеющих начало на одной из этих центральных осей, состоит также из главных осей инерции.* Действительно, если $Gxyz$ есть система главных осей инерции твердого тела относительно его центра тяжести G, и мы возьмем за новые оси три прямые $\bar{x}$, y, $\bar{z}$, параллельные осям x, y, z в точке $O\,(0,\ a,\ 0)$, то произведения инерции относительно новых осей определятся равенствами

$$\overline{A}' = \sum_i m_i \bar{y}_i \bar{z}_i = \sum m_i (y_i - a) z_i,$$

$$\overline{B}' = \sum_i m_i \bar{z}_i \bar{x}_i = \sum m_i z_i x_i,$$

$$\overline{C}' = \sum_i m_i \bar{x}_i \bar{y}_i = \sum_i m_i x_i (y_i - a),$$

и, следовательно, вместе с центральными произведениями инерции и аналогичными статическими моментами $\sum\limits_i m_i x_i$, $\sum\limits_i m_i z_i$ будут равны нулю.

и, следовательно,

$$2T = \frac{1}{4} ma^2 (5\dot{\theta}^2 + 6\dot{\varphi}^2).$$

Все это сохраняет свое значение при каких угодно силах, действующих на диск; поэтому всякий раз, когда речь будет идти о консервативных силах, достаточно выразить их потенциал через θ и φ, чтобы затем написать уравнения Лагранжа.

Рассмотрим частный случай этой задачи, предполагая, что заданный путь горизонтален и что диск подвергается действию исключительно силы тяжести. Приняв, что всегда возможно, неподвижную плоскость ξ, η за горизонтальную и нисходящую вертикаль — за ось ζ, мы будем иметь для потенциала при высоте центра тяжести (предполагаемого выше плоскости $\xi\eta$), равной $-a \sin \theta$, выражение

$$U = -mag \sin \theta,$$

так что уравнения Лагранжа примут вид

$$\frac{5}{4} a \ddot{\theta} = -g \cos \theta, \quad \ddot{\varphi} = 0. \tag{74}$$

Второе из этих уравнений показывает, что угол собственного вращения диска φ изменяется равномерно, а первое, если положить $\theta = \theta_1 - \pi/2$, преобразуется в следующее:

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{\frac{5}{4} a} \sin \theta_1,$$

т. е. тождественно с уравнением колебаний простого маятника длиной $l = \frac{5}{4} a$. Очевидное частное решение системы (74) (*статическое решение*, о котором мы будем говорить в § 4 гл. VI) мы будем иметь, полагая $\dot{\varphi} = \text{const} = r_0$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$ (и, следовательно, $\theta_1 = \pi$), т. е. воображая, что диск катится с произвольной постоянной угловой скоростью, оставаясь вертикальным.

В статике (т. I, гл. XIII, п. 23) было отмечено, что положение равновесия маятника (с твердым стержнем), соответствующее значению π угла θ_1, оказывается существенно неустойчивым. Этому обстоятельству здесь соответствует тот факт, что качение диска вдоль прямолинейного пути тоже будет неустойчивым. Этот результат, который будет лучше освещен при общем рассмотрении в § 5 и 6 гл. VI и § 2 гл. IX, поясняет, хотя и в очень грубом приближении, что произойдет с велосипедистом, когда одно из колес велосипеда попадет в колею трамвайного рельса.

53. Динамическое осуществление связей и сервомоторных сил. Удаляясь несколько от прямых приложений уравнений Лагранжа, займемся здесь в заключение одним видом связей, которые при постановке соответствующих динамических задач будут рассматриваться с точки зрения, отличной от общепринятой.

Если задана материальная система S из N точек P_i ($i=1, 2, \ldots, N$) с двусторонними связями (даже и неголономными), то можно предположить, что на нее наложены другие связи, осуществляемые посредством автоматических приспособлений (например, электромагнитных), которые являются источником некоторых сил Φ_i, приложенных к точкам P_i системы и совершающих не равную нулю работу при всяких виртуальных перемещениях δP_i, совместимых со связями системы. Эти силы Φ_i называются *сервомоторными*, а приспособления, осуществляющие их, *сервомоторами*. Осуществляемые таким образом связи можно отличать от обычных связей, называя их *динамическими*.

Чтобы дать простейший пример, рассмотрим систему, состоящую из двух материальных точек P, P_1, движущихся без трения по прямой Ox, и предположим, что, в то время как точка P подвергается действию какой-нибудь активной силы, составляющая которой по оси x есть X, при помощи подходящего автоматического устройства осуществляется воздействие на точку P_1 некоторой силы Φ, вынуждающей эту точку следовать за P при ее движении на *неизменном расстоянии*. Сервомоторная сила Φ, осуществляющая эту динамическую связь, не удовлетворяет всем условиям, характеризующим идеальные связи, так как работа этой силы не равна нулю при всяком бесконечно малом перемещении, совместимом со связями. Действительно, здесь единственной связью является динамическая связь, вынуждающая точку P_1 сохранять неизменным ее расстояние от точки P, а так как перемещение δx точки P, равное перемещению точки P_1, остается произвольным, то работа $\Phi\delta x$ сервомоторной силы отлична от нуля, поскольку, вообще говоря, не исчезают ни тот, ни другой сомножители. Отсюда следует, что сервомоторная сила Φ при постановке задачи о движении должна рассматриваться как прямо приложенная к системе, а не как реактивная сила, осуществляющая связь без трения неизменяемой системы двух точек: PP_1.

Аналогичные обстоятельства имеют место и для любой системы S, находящейся под действием двусторонних связей, не только кинематических, но также и динамических. Сервомоторные силы Φ_i сами по себе, как предназначенные для осуществления связей, принадлежат к классу реакций связей, в постановке же задачи о движении они должны быть причислены к прямо приложенным силам (аналогично тому, как это делается в случае пассивных сопротивлений и трения). Таким образом, мы должны рассматривать систему S как подчиненную только обычным связям (геометрическим и кинематическим) и движущуюся под действием всех активных сил F_i и сервомоторных сил Φ_i. Следовательно, общее уравнение динамики на основании уравнения (12) п. 21 должно здесь иметь вид

$$\sum_{i=1}^{N} (F_i + \Phi_i - m_i a_i) \cdot \delta P_i = 0; \qquad (12')$$

оно должно иметь место при всех виртуальных перемещениях δP_i, совместимых с кинематическими связями.

Силы Φ_i, наравне с любыми другими реакциями связей, вообще являются неизвестными; известна только природа связей, которые они накладывают на систему (в предыдущем примере неизменность расстояния PP_1). Но, естественно, нельзя утверждать, что этих сил Φ_i будет ровно столько, сколько точек в системе, и что таким образом появляются $3N$ неизвестных составляющих. Может случиться, что эти $3N$ неизвестных приводятся к меньшему числу в силу того ли, что сервомоторные силы действуют только на некоторые точки системы, или же в силу способа их действия на соответствующие точки (например, параллельно плоскости или прямой и т. п.).

Предположим, для определенности, что материальная система S, если отвлечься от динамических связей, является голономной с n степенями свободы и что, с другой стороны, сервомоторные силы, действующие на нее, выражаются известными функциями от ν параметров σ, которые следует рассматривать при всяком движении системы как функции от времени t, вид которых заранее неизвестен. В этом предположении соотношение (12), где $q_1, q_2, \ldots, q_n$ являются лагранжевыми координатами системы S, равносильно n дифференциальным уравнениям Лагранжа, заключающим, помимо q, $\dot{q}$, $\ddot{q}$, еще параметров σ, представляющих собой тоже неизвестные функции времени. Поэтому, если динамические действия Φ_i регулируются таким образом, что в любой момент между параметрами σ существуют точно ν независимых соотношений, то движение системы будет определенным. Очевидно, то же будет иметь место и в указанном вначале примере, так как в нем при наличии единственной вспомогательной неизвестной Φ имеем $\nu = 1$, а с другой стороны, динамическая связь вполне характеризуется только одним уравнением (именно тем, которое выражает неизменность расстояния PP_1).

В частности, следует отметить тот случай, когда сервомоторные силы совершают работу, равную нулю при всех тех виртуальных перемещениях, допускаемых обычными связями, при которых изменяются только $n - \nu$ параметров Лагранжа, например $q_{\nu+1}, \ldots, q_n$; это можно также выразить, говоря, что лагранжевы составляющие всех сервомоторных сил по этим $n - \nu$ параметрам равны нулю. В этом предположении последние $n - \nu$ лагранжевых уравнений движения системы не будут зависеть от Φ, и достаточно присоединить к ним ν уравнений динамических связей, чтобы получить систему, определяющую движение.

Это обстоятельство оказывается также осуществленным в нашем примере, потому что, если мы наложим на нашу систему только обычные связи, т. е. если будем рассматривать две точки, свободно движущиеся по прямой, то сервомоторная сила Φ будет совершать работу, равную нулю, когда перемещается только точка P; поэтому будет справедливо уравнение (Лагранжа)

$$m\ddot{x} = X, \qquad (75)$$

где m и x обозначают массу и абсциссу точки P, X — соответствующую составляющую силы, приложенной к P, а положение точки P_1 в любой момент определяется (относительно положения точки P) динамической связью.

Чтобы иллюстрировать, насколько существенно связи, осуществляемые динамически, отличаются от обычных (геометрических и кинематических) связей, полезно убедиться на этом схематическом примере, что закон движения в случае динамической связи будет отличаться от того закона, который мы имели бы, если бы на P действовала та же активная сила, а неизменяемость системы точек PP_1 обеспечивалась бы посредством твердого стержня. Действительно, при этом последнем предположении связи допускали бы для системы совокупное поступательное перемещение по прямой, так что имела бы место теорема о движении центра тяжести (п. 22), и уравнение движения вместо (75) имело бы вид

$$(m + m_1)\ddot{x}_0 = X,$$

где m_1 обозначает массу точки P_1, а x_0 — абсциссу центра тяжести точек P и P_1[1]).

§ 8. Уравнения движения неголономных систем

54. Дифференциальные уравнения движения неголономных систем (т. I, гл. VI, § 2) также можно привести к общей типичной форме, которая заслуживает того, чтобы на ней остановиться, хотя она и далека от структурной простоты уравнений Лагранжа, имеющих место для голономных систем, и вывод ее значительно более сложен.

Предпошлем здесь некоторые вспомогательные рассуждения. Чтобы охарактеризовать самым общим образом систему S с двусторонними (возможно, также и неголономными) связями, отнесем ее сначала к некоторому определенному числу n лагранжевых координат $q_h (h = 1, 2, \ldots, n)$, выбранных таким образом, чтобы были

---

[1]) Более подробное исследование, принадлежащее Бегену (Béghin), можно найти в четвертом издании т. II уже несколько раз цитированного трактата Аппеля (P. Appell, Traité de mécanique rationnelle, IV изд., т. II (1924), стр. 395—400).

учтены все голономные связи системы или только часть их, в силу чего будем иметь (уравнения (32))

$$P_i = P_i(q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

После этого выразим остальные связи (которые, если исключить случай голономной системы, будут или все чисто кинематическими (неголономными), или частью голономными и частью кинематическими (неголономными), накладывая на координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$ некоторое число s условий в виде линейно независимых уравнений вида (т. 1, гл. VI, п. 10, 17)

$$\sum_{h=1}^{n} b_{jh} dq_h + b_{j0} dt = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, s), \qquad (76)$$

или же в конечной форме

$$\sum_{h=1}^{n} b_{jh} \dot{q}_h + b_{j0} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, s), \qquad (76')$$

где коэффициенты b_{jh} являются функциями от q и t, за исключением случая, когда эти s связей не зависят явно от времени; в последнем случае коэффициенты b_{jh} при $h > 0$ зависят только от q, а b_{j0} тождественно равны нулю [2]. Необходимо отметить, что если материальная система S является неголономной, то система уравнений Пфаффа (76) не может быть вполне интегрируемой, т. е. уравнения (76) не могут получиться посредством полного дифференцирования из s конечных независимых соотношений между q и t.

Мы можем всегда разрешить s линейных независимых уравнений (76') относительно s лагранжевых скоростей $\dot{q}_h$ или, для большей симметрии, обратиться к параметрическому представлению, выражая все лагранжевы скорости $\dot{q}$, удовлетворяющие уравнениям (76'), в виде линейных функций (вообще говоря, неоднородных) от некоторых $\nu = n - s$ произвольных параметров $e_1, \ldots, e_\nu$. Тем самым мы придадим уравнениям, выражающим кинематические связи, следующий вид:

$$\dot{q}_h = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \eta_{h\alpha} e_\alpha + \eta_{h0} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \qquad (77)$$

где при связях, зависящих от времени, коэффициенты η будут определенными функциями от q и t, в случае же связей, не зависящих от времени, величины $\eta_{h\alpha}$ при $\alpha > 0$ будут функциями только от q, а η_{h0} будут тождественно равны нулю.

Произвольные параметры e, введенные таким образом, мы будем называть *кинематическими характеристиками* системы в координатах q для данного момента и соответствующей ему конфигурации.

Это название оправдывается тем соображением, что если задаются момент времени t_0 и конфигурация с координатами q^0, то формулы (77), в которых надо положить $t=t_0$, $q_h=q_h^0$, дадут соответственно ∞^ν возможных выборов значений параметров e_α, все r значений, совместимых со связями лагранжевых скоростей $\dot{q}_h$, или, в более сжатой форме, всевозможные *состояния движения*, которые, в этот момент и в этой конфигурации, система фактически может принять, в согласии со своими связями.

Естественно, что все предыдущее сохраняет свое значение также и в частном случае, когда *все* связи системы будут голономными, не исключая и того случая, когда эти связи выражаются дифференциальными уравнениями Пфаффа (76), которые должны поэтому представлять собой интегрируемую систему. Но в этом предположении кинематические характеристики можно выбрать некоторым частным образом, который необходимо разъяснить. Так как связи, наложенные на лагранжевы координаты q (если число координат превышает число степеней свободы), являются голономными, то конфигурацию системы в любой момент можно определить, выражая q в функциях от других ν независимых лагранжевых параметров $r_\alpha (\alpha=1, 2, \ldots, \nu)$ в виде

$$q_h=q_h(r_1, r_2, \ldots, r_\nu|t) \qquad (h=1, 2, \ldots, n);$$

чтобы определить состояния движения, возможные для системы начиная с какого-нибудь момента времени t и с любой начальной конфигурации, возможной в этот момент, достаточно взять производные по времени от предыдущих уравнений, в результате чего получим равенства

$$\dot{q}_h=\sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{\partial q_h}{\partial r_\alpha}\dot{r}_\alpha+\frac{\partial q_h}{\partial t} \qquad (h=1, 2, \ldots, n), \tag{77'}$$

которые и представляют собой уравнения (77), относящиеся к рассматриваемому здесь случаю. Таким образом, мы имеем здесь

$$\eta_{h\alpha}=\frac{\partial q_h}{\partial r_\alpha}, \quad \eta_{h0}=\frac{\partial q_h}{\partial t} \quad (h=1, 2, \ldots, n; \ \alpha=1, 2, \ldots, \nu),$$

а кинематические характеристики выражаются лагранжевыми скоростями $\dot{r}_\alpha$.

Вернемся теперь к общему случаю, т. е. к уравнениям (77). Имея в виду следствия, которые мы из них получим, рассмотрим здесь наряду с состояниями движения, возможными для системы, также и ее виртуальные перемещения, лагранжевы составляющие которых δq определяются, как мы знаем, из уравнений, получающихся из уравнений (76) путем отбрасывания в них (если связи зависят от времени) членов $b_{j0}dt$ (т. I, гл. VI, п. 17), т. е. из уравнений

$$\sum_{h=1}^{n} b_{jh}\delta q_h = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, s).$$

Отсюда следует, что общие параметрические выражения δq_h будут получаться из правых частей уравнений (77) путем отбрасывания в них, если они не равны нулю, величин η_{h0} и подстановки вместо кинематических характеристик e_α стольких же бесконечно малых произвольных параметров $\delta\varepsilon_\alpha$. Таким образом, лагранжевы составляющие всех виртуальных перемещений системы, начиная с некоторого момента и любой конфигурации, будут определяться равенствами

$$\delta q_h = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \eta_{h\alpha}\delta\varepsilon_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha}\delta\varepsilon_\alpha \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \tag{78}$$

соответственно возможным выборам ν бесконечно малых произвольных параметров $\delta\varepsilon_\alpha$.

Из уравнений (78) можно было бы тотчас же получить геометрическое выражение наиболее общего виртуального перемещения нашей материальной системы. Для этого нужно было бы подставить в равенства

$$\delta P_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\delta q_h \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

которые непосредственно следуют из уравнений (32), вместо δq_h их выражения через q и $\delta\varepsilon_\alpha$ (и, возможно, через t) по формулам (78). В дальнейшем мы не будем, однако, иметь случая применить те формулы, к которым мы пришли бы таким путем.

55. Уравнения Маджи. Предположим теперь, что система S подчинена идеальным связям и находится под действием заданной системы сил F_i; составим уравнения движения системы.

Как и в случае голономных систем (п. 32), мы и здесь будем исходить из общего уравнения динамики; так как это уравнение удовлетворяется для всех виртуальных перемещений системы, то оно и здесь будет определять движение. Отделяя кинетические члены (содержащие ускорения) от динамических (содержащих силы), напишем его еще в виде уравнения (35) п. 36

$$\sum_{i=1}^{N} m_i a_i \cdot \delta P_i = \sum_{i=1}^{N} F_i \delta P_i.$$

После этого, вводя и в этом случае составляющие

$$Q_h = \sum_{i=1}^{N} F_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \tag{37}$$

активных сил по лагранжевым координатам q_h (здесь уже не независимым, а подчиненным кинематическим связям (76)) и полагая

$$\tau_h = \sum_{i=1}^{N} m_i a_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

мы сможем придать уравнению (35), как и в п. 36, вид

$$\sum_{h=1}^{n} \tau_h \delta q_h = \sum_{h=1}^{n} Q_h \delta q_h. \tag{79}$$

Но в то время как в случае голономной системы (с n степенями свободы) все δq_h были произвольными (и независимыми), здесь они связаны между собой так, что могут принимать только значения, удовлетворяющие равенствам (78), сообразно с выбором ν произвольных $\delta\varepsilon_\alpha$. Таким образом, подставляя вместо δq_h их выражения (78) и принимая во внимание произвольность $\delta\varepsilon_\alpha$, мы заключаем, что общее уравнение (35) равносильно системе ν уравнений

$$\sum_{h=1}^{n} \eta_{h\alpha} \tau_h = \sum_{h=1}^{n} \eta_{h\alpha} Q_h \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{80}$$

Эти уравнения, совершенно аналогичные уравнениям (40) для голономных систем (п. 36), представляют собой уравнения движения нашей системы S. Их можно обычным путем преобразовать и дальше, если воспользоваться приемом, с помощью которого мы пришли к уравнениям Лагранжа (п. 36—37).

Прежде всего полную виртуальную работу прямо приложенных сил

$$\delta L = \sum_{h=1}^{n} Q_h \delta q_h,$$

если принять во внимание уравнения (78), можно написать в форме

$$\delta L = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \delta\varepsilon_\alpha \sum_{h=1}^{n} \eta_{h\alpha} Q_h,$$

откуда мы видим, что правые части уравнений (80) представляют собой коэффициенты при различных $\delta\varepsilon_\alpha$ в выражении виртуальной работы δL.

Полагая

$$\Phi_\alpha = \sum_{h=1}^{n} \eta_{h\alpha} Q_h \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu) \qquad (81)$$

и вспоминая, что если вводится живая сила T системы, выраженная через q, $\dot{q}$, то существуют (независимо от того факта, что все $\dot{q}$ будут здесь подчинены кинематическим связям (76)) тождества (42) (п. 37)

$$\tau_h = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n);$$

уравнениям (80) можно придать вид

$$\sum_{h=1}^{n} \eta_{h\alpha}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h}\right) = \Phi_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu). \qquad (82)$$

Это и будут уравнения Маджи [3]. Они вместе с уравнениями (77) с аналитической точки зрения дают в дифференциальной форме полную постановку задачи о движении для системы S с двусторонними идеальными (в том числе и неголономными) связями. Действительно, если представим себе, что в уравнения (82) вместо величин $\dot{q}$ подставлены их выражения (77) через q, e и t и выполнено дифференцирование по t, то будет очевидно, что после выполнения всех преобразований в уравнениях останутся, помимо q, e, t, только ν производных $\dot{e}$ от e, которые войдут в них линейно. Замечания, совершенно аналогичные тем, которые были сделаны в п. 36, приводят к выводу, что полученные таким образом из системы (82) ν уравнений разрешимы относительно этих ν производных $\dot{e}$, так что мы заключаем, что уравнения (77) и (82) вместе составляют дифференциальную систему уравнений первого порядка, приводимую к нормальному виду относительно $n+\nu$ неизвестных функций времени q и e. Если конфигурация и состояние движения материальной системы в начальный момент заданы, т. е. указаны произвольные численные начальные значения q (позиционных координат) и e (кинетических характеристик), то движение неголономной системы будет однозначно определено.

56. Так как уравнения (77) и (82) в их совокупности вполне определяют движение системы, то мы заранее можем быть уверены, что в случае связей, не зависящих от времени, эти уравнения должны содержать в себе уравнение живых сил

$$\dot{d}T = dL.$$

Однако, принимая во внимание важность результата, не бесполезно показать прямым путем, как это соотношение формально получается из уравнений Маджи (82).

Для этой цели заметим прежде всего, что когда все связи (голономные и неголономные) не зависят от времени, то живая сила T принимает вид

$$T=\sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k,$$

где a_{hk} суть функции только от q, правые же части уравнений (77) не будут содержать членов η_{h0}, а величины $\eta_{h\alpha}$ при $\alpha>0$ не будут зависеть от t; так что, в частности, для любого действительного перемещения системы будет иметь место выражение (тождественное выражению любого виртуального перемещения, за исключением лишь подстановки $e_\alpha dt$, вместо $\delta\varepsilon_\alpha$)

$$dq_h=\dot{q}_h dt=dt\sum_{\alpha=1}^{\nu}\eta_{h\alpha}e_\alpha \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{83}$$

Умножая каждое из уравнений (82) на соответствующее $e_\alpha dt$ и складывая почленно, мы получим, принимая во внимание соотношения (78), уравнение

$$\sum_{h=1}^{r}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_h}-\frac{\partial T}{\partial q_h}\right)dq_h=dt\sum_{\alpha=1}^{\nu}\Phi_\alpha e_\alpha,$$

в котором левая часть тождественна с приращением dT живой силы за элемент времени dt (п. 39), а правая часть дает элементарную работу dL, совершаемую активными силами за этот же самый элемент времени, если принять во внимание, что в силу независимости связей от времени равенства (83) оказываются справедливыми для действительных бесконечно малых перемещений.

57. Замечания об уравнениях кинематических связей. Уравнениям (82) можно придать более выразительный вид, разбивая в каждом из них левую часть на два слагаемых, из которых одно характеризует *неголономность* связей (оно тождественно исчезает при исключительно голономных связях), а другое, если отнести систему к голономным характеристикам, сведется к соответствующим лагранжевым биномам.

Чтобы сделать возможным такое преобразование уравнений (82), мы предпошлем несколько замечаний о кинематических связях системы, которые мы будем предполагать заданными в параметрической форме (77). Изменения лагранжевых координат q за элемент времени dt (начиная от любого момента и любой конфигурации), совместимые с этими связями, выразятся равенствами (77′)

$$dq_h=\sum_{\alpha=1}^{\nu}\eta_{h\alpha}d\varepsilon_\alpha+\eta_{h0}dt \qquad (h=1,\ 2,\ldots,\ n),$$

где через $d\varepsilon_\alpha$ обозначены бесконечно малые произвольные количества $e_\alpha dt$. Как мы уже знаем, если связи не зависят от времени, то количества $\eta_{h\alpha}$ при $\alpha > 0$ будут функциями только от q, а все η_{h0} тождественно обратятся в нуль; наоборот, если связи зависят от времени, все $\eta_{h\alpha}$ вместе с η_{h0} будут функциями от q и t.

В этом последнем предположении, для однообразия обозначений, удобно переменную t обозначить через q_0, а изменение времени dt — через $d\varepsilon_0$, поэтому к уравнениям (77′) мы присоединим $(n+1)$-е уравнение

$$dq_0 = d\varepsilon_0$$

или, что одно и то же, будем рассматривать уравнения (77′) сохраняющими значение также и при индексе $h=0$, при условии, что все $\eta_{0\alpha}$ будут тождественно равны нулю, за исключением $\eta_{00}=1$. Таким образом, вместо уравнений (77′) мы будем иметь уравнения

$$dq_h = \sum_{\alpha=0}^{\nu} \eta_{h\alpha} d\varepsilon_\alpha \quad (h=0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n); \qquad (77'')$$

при этом важно иметь в виду, что если мы выполняем вычисления для связей, не зависящих от времени, то индекс h нужно изменять от 1 до n, а не от 0 до n, и индекс α — от 1 до ν, а не от 0 до ν.

Выберем теперь две произвольные системы: $d'\varepsilon_\alpha$, $d''\varepsilon_\alpha$ $(\alpha=0,\ 1,\ 2, \ldots,\ \nu)$ бесконечно малых количеств. Обозначив через d' и d'' соответствующие операции варьирования, будем иметь на основании уравнений (77″)

$$d''d'q_h = \sum_{\alpha=0}^{\nu} \sum_{\gamma=0}^{n} \frac{\partial \eta_{h\alpha}}{\partial q_\gamma} d'\varepsilon_\alpha d''q_\gamma + \sum_{\alpha=0}^{\nu} \eta_{h\alpha} d''d'\varepsilon_\alpha$$

или же, принимая во внимание те же равенства (77″),

$$d''d'q_h = \sum_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}}^{\nu} \sum_{\gamma=0}^{n} \eta_{\gamma\beta} \frac{\partial \eta_{h\alpha}}{\partial q_\gamma} d'\varepsilon_\alpha d''\varepsilon_\beta + \sum_{\alpha=0}^{\nu} \eta_{h\alpha} d''d'\varepsilon_\alpha.$$

Отсюда, меняя порядок варьирования d' и d'' и принимая во внимание, что для независимых переменных ε_α имеем

$$d'd''\varepsilon_\alpha = d''d'\varepsilon \quad (\alpha=0,\ 1,\ 2, \ldots,\ \nu),$$

получим при $h=0$, естественно, тождество, а при $h=1,\ 2, \ldots,\ n$ будем иметь n уравнений:

$$d''d'q_h - d'd''q_h = \sum_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}}^{\nu} \eta_{h|\alpha\beta} d'\varepsilon_\alpha d''\varepsilon_\beta \qquad (h=1,\ 2, \ldots,\ n), \quad (84)$$

где положено

$$\eta_{h|\alpha\beta} = \sum_{\gamma=0}^{n} \left(\eta_{\gamma\beta} \frac{\partial \eta_{h\alpha}}{\partial q_\gamma} - \eta_{\gamma\alpha} \frac{\partial \eta_{h\beta}}{\partial q_\gamma} \right) \tag{85}$$

$$(h = 1, 2, \ldots, n; \quad \alpha, \beta = 0, 1, \ldots, \nu).$$

Эти функции $\eta_{h|\alpha\beta}$ от $q_0, q_1, \ldots, q_n$, в силу их определения, удовлетворяют тождествам

$$\eta_{h|\alpha\beta} + \eta_{h|\beta\alpha} = 0,$$

т. е. при всяком индексе h составляют кососимметричную систему (относительно индексов α и β); знакопеременные билинейные формы (84) представляют собой так называемые *билинейные коварианты* пфаффианов, стоящих в правых частях уравнений (77″) при $h = 1, 2, \ldots, n$. Очевидно, что название *ковариантов* они получили благодаря тому обстоятельству, что при всякой замене независимых переменных преобразованные выражения этих форм будут точно совпадать с теми билинейными знакопеременными формами, которые получились бы, если бы определяющие первоначальные формы уравнения (84) были приложены к преобразованным выражениям исходных пфаффианов[1]).

Эти коварианты, в силу их знакопеременного характера относительно двух рядов переменных, $d'\varepsilon_\alpha$, $d''\varepsilon_\chi$, будут исчезать всякий раз, когда будут совпадать вариации d', d'', и они будут обращаться в нуль тождественно, т. е. *при всяком выборе* d' и d'', если связи окажутся исключительно голономными (т. е., по существу, если уравнения Пфаффа (77″) получаются путем полного дифференцирования стольких же конечных уравнений между переменными). Действительно, в этом случае все q_h являются функциями от ν лагранжевых независимых параметров r_α, а кроме того, возможно, и времени, которое здесь, в согласии с тем, как это было сделано раньше, мы обозначим через r_0. Принимая за кинематические характеристики $\dot{r}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, \nu)$, мы должны будем рассматривать вместо уравнений (77″) при $h = 1, 2, \ldots, n$ равенства

$$dq_h = \sum_{\alpha=0}^{\nu} \frac{\partial q_h}{\partial r_\alpha} dr_\alpha \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

---

[1]) См., например, T. Levi-Civita, Lezioni di calcolo differenziale assoluto (raccolte da E. Persico), Roma, Stock, 1925, стр. 30, 184; или же Goursat, Leçons sur le probléme de Pfaff, Paris, Hermann, 1922, гл. I. Интересно отметить, что принятое в тексте предположение, что $d'd''\varepsilon_\chi = d''d'\varepsilon_\alpha$, не является существенным для установления инвариантного характера билинейной знакопеременной формы в правой части (84). Энгель (Engel) доказал, что это свойство будет иметь место, если даже не делать никаких частных предположений относительно системы вторых дифференциалов. Ср. *Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung*, дополнительный том V (1914), стр. 16.

Поэтому будем иметь

$$\eta_{h\alpha} = \frac{\partial q_h}{\partial r_\alpha},$$

и достаточно прямо вычислить любой билинейный ковариант $d''d'q_h - d'd''q_h$, чтобы убедиться, что он тождественно равен нулю.

Возвращаясь к общему случаю, когда связи не все голономны, рассмотрим тот случай, когда из двух операций дифференцирования d', d'' одна соответствует любому действительному перемещению материальной системы, а другая — любому виртуальному перемещению.

Положим

$$\begin{aligned} d'\varepsilon_0 &= dt, & d'\varepsilon_\alpha &= e_\alpha dt \\ d''\varepsilon_0 &= 0, & d''\varepsilon_\alpha &= \delta\varepsilon_\alpha \end{aligned} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Обозначая через χ_h ($h = 1, 2, \ldots, n$) соответствующие билинейные коварианты при этом выборе d', d'', получим

$$\chi_h = \delta dq_h - d\delta q_h = dt \sum_{\beta=1}^{\nu} \left(\eta_{h|0\beta} + \sum_{\alpha=1}^{\nu} \eta_{h|\alpha\beta} e_\alpha \right) \delta\varepsilon_\beta$$

или также (при перестановке двух индексов α, β)

$$\chi_h = dt \sum_{\alpha=1}^{\nu} \varphi_{h\alpha} \delta\varepsilon_\alpha \qquad (h = 1, 2, \ldots, \nu), \tag{86}$$

где для краткости положено

$$\varphi_{h\alpha} = \eta_{h|0\alpha} + \sum_{\beta=1}^{\nu} \eta_{h|\beta\alpha}\, e_\beta \quad (h = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{87}$$

58. Члены неголономности. После этих предпосылок вернемся снова к уравнениям (82) движения системы, связи которой не все голономны (п. 55); вспоминая, что на основании уравнений (78) п. 54 имеем

$$\eta_{h\alpha} = \frac{\partial \dot q_h}{\partial e_\alpha} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha = 1, 2, \ldots, \nu),$$

можно написать эти уравнения в форме

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \dot q_h}{\partial e_\alpha} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} \right) = \Phi_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{82'}$$

Как было сказано в начале предыдущего пункта, речь идет о том, чтобы показать, что мы можем разбить в каждом из этих уравнений левую часть на два слагаемых, одно из которых можно назвать *неголономным*, а другое — *голономным*, в том смысле, что когда все связи являются голономными, первое слагаемое тождественно исчезает, а второе для голономных характеристик приводится к соответствующему лагранжеву биному.

Напомним, что в уравнениях (82') живая сила T рассматривается как функция от $q, \dot{q}$ и, возможно, от t. Если на основании уравнений (77) мы представим себе живую силу выраженной через q, e и, возможно, также через t, и обозначим ее через T^*, то будем иметь

$$\frac{\partial T^*}{\partial q_h}=\frac{\partial T}{\partial q_h}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_h},\quad \frac{\partial T^*}{\partial e_\alpha}=\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha}$$

$$(h=1, 2, \ldots, n;\ \alpha=1, 2, \ldots, \nu);$$

отсюда, составляя линейные комбинации первых из этих равенств и дифференцируя полным образом по t вторые, получим, очевидно, тождества

$$\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha}\frac{\partial T}{\partial q_h}=\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha}\frac{\partial T^*}{\partial q_h}-\sum_{\substack{h=1\\ j=1}}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_h}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha},$$

$$\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}=\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial e_\alpha}-\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha}.$$

Вычитая первое тождество из второго, найдем

$$\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}-\frac{\partial T}{\partial q_h}\right)=\mathrm{A}_\alpha+\Omega_\alpha\quad(\alpha=1, 2, \ldots, \nu), \tag{88}$$

где положено

$$\mathrm{A}_\alpha=\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial q_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial e_\alpha}-\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha}\right\} \tag{89}$$

$$(\alpha=1, 2, \ldots, \nu)$$

$$\Omega_\alpha=\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial e_\alpha}-\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha}\frac{\partial T^*}{\partial q_h}. \tag{90}$$

На основании тождеств (88) уравнения (82') могут быть написаны в виде

$$\mathrm{A}_\alpha+\Omega_\alpha=\Phi_\alpha\quad(\alpha=1, 2, \ldots, \nu); \tag{91}$$

теперь можно показать, что A_α представляют собой члены неголономности, а Ω_α — члены голономности.

С этой целью умножим обе части (89) на $dt\delta\varepsilon_\alpha$ и просуммируем от $\alpha=1$ до $\alpha=\gamma$. Таким образом, получим тождество

$$dt\sum_{\alpha=1}^{\nu}\mathrm{A}_\alpha\delta\varepsilon_\alpha=\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\left\{dt\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial q_j}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial e_\alpha}\delta\varepsilon_\alpha-d\sum_{\alpha=1}^{\nu}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha}\delta\varepsilon_\alpha\right\}.$$

Принимая во внимание уравнения (78) п. 54

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha} \delta\varepsilon_\alpha = \delta q_h \qquad (h=1, 2, \ldots, n),$$

можно написать последнее тождество в виде

$$dt \sum_{\alpha=1}^{\nu} A_\alpha \delta\varepsilon_\alpha = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \left\{ dt \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial q_j} \delta q_j - d\delta q_h \right\}$$

или, замечая, что $\dot{q}_h dt = dq_h$, и обозначая, как в предыдущем пункте, через χ_h билинейный ковариант $\delta dq_h - d\delta q_h$, в виде

$$dt \sum_{\alpha=1}^{\nu} A_\alpha \delta\varepsilon_\alpha = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \chi_h. \tag{92}$$

Так как в случае исключительно голономных связей билинейные коварианты χ_h тождественно исчезают (предыдущий пункт), мы заключаем, что при таком предположении из этого тождества следует

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} A_\alpha \delta\varepsilon_\alpha = 0$$

при любом выборе $\delta\varepsilon_\alpha$; а это как раз равносильно тождественному исчезанию отдельных членов A_α, характер неголономности которых таким образом обнаружен.

Теперь, прежде чем перейти к членам Ω_α, укажем попутно на крайне сжатую форму, которая в общем случае, т. е. когда не все связи голономны, получается для членов неголономности A_α из соотношения (92). Достаточно вместо χ_h подставить их выражения (86) и приравнять в обеих частях коэффициенты при произвольных величинах $\delta\varepsilon_\alpha$, чтобы получить равенства

$$A_\alpha = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \varphi_{h\alpha}, \tag{93}$$

где $\varphi_{h\alpha}$ определяются равенствами (87).

Переходя затем к членам Ω_α, определяемым равенствами (90), вспомним, что если связи окажутся все голономными и если $r_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu)$ представляют собой ν независимых лагранжевых координат, позволяющих выразить первоначальные координаты q, число которых превышает число степеней свободы, то будем иметь (п. 54)

$$\eta_{h0} = \frac{\partial q_h}{\partial t}, \quad \eta_{h\alpha} = \frac{\partial q_h}{\partial r_\alpha}, \quad e_\alpha = \dot{r}_\alpha, \quad \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial e_\alpha} = \frac{\partial q_h}{\partial r_\alpha};$$

таким образом, на основании формул (90), в этом случае, т. е. в случае, когда T^* обозначает живую силу, выраженную через r, $\dot{r}$ и, возможно, через t, получим

$$\Omega_\alpha = \frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{r}_\alpha} - \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial T^*}{\partial q_h}\frac{\partial q_h}{\partial r_\alpha},$$

т. е. как раз

$$\Omega_\alpha = \frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{r}_\alpha} - \frac{\partial T^*}{\partial r_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Заметим, что впервые выделил в уравнениях неголономных систем члены неголономности Вольтерра[1] *), который применял для этой цели способ, существенно отличный от способа, характеризующегося систематическим применением пфаффианов и их билинейных ковариантов[2].

Вольтерра же принадлежит одно важное замечание относительно интегрирования неголономных систем, которым мы займемся в следующем пункте.

59. Гиростатический характер членов неголономности. Системы с независимыми характеристиками по Вольтерра. Предположим, что связи, среди которых обязательно есть неголономные, не зависят от времени. В этом предположении γ_{h0} будут тождественно равны нулю, и, следовательно, в силу соотношений (85) будут равны нулю и все $\eta_{h|0\alpha}$, так что формулы (87) примут вид

$$\varphi_{h\alpha} = \sum_{\beta=1}^{\nu} \eta_{h|\beta\alpha} e_\beta \qquad (h = 1, 2 \ldots, n;\ \alpha = 1, 2, \ldots, \nu).$$

---

[1] Volterra, Atti dell'Acc. di Torino, т. XXXIII, 1897, стр. 451—475, 542—558.

*) Несколько раньше члены неголономности выделил С. А. Чаплыгин [4].

Сергей Алексеевич Чаплыгин родился 5 апреля 1869 г. в г. Раненбурге Рязанской губ., умер в 1942 г. После окончания Московского университета в 1890 г. был оставлен Н. Е. Жуковским при университете; защитил магистерскую диссертацию в 1898 г. и докторскую в 1903 г. Первые работы Чаплыгина были посвящены динамике твердого тела и, в частности, неголономным системам. В дальнейшем С. А. Чаплыгин много работал в области аэродинамики и вместе с Н. Е. Жуковским создал всю аэродинамику плоско-параллельного движения, а также заложил основы пространственной аэродинамики. В своей работе „О газовых струях" (сообщено Московскому математическому обществу в 1896 г.) С. А. Чаплыгин заложил основы современной газовой динамики. С. А. Чаплыгин был профессором Московского университета, руководил научно-исследовательским институтом ЦАГИ, а в 1929 г. был избран действительным членом Академии наук СССР. *(Прим. ред.)*

[2] По этому вопросу надо также указать более новые исследования Г. Гамеля. См., в частности, G. Hamel, Uber nicht holonome Systeme. *Math. Annalen,* т. 92, 1924, стр. 31—41.

С другой стороны, в этом случае виртуальные перемещения не будут отличаться от действительных (за исключением разве лишь того обстоятельства, не имеющего здесь значения, что в первых время остается неизменным, а во вторых и оно также испытывает приращение dt); поэтому, вспоминая что при $d' = d''$ билинейные коварианты исчезают, мы выводим из равенств (86) тождества

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} \varphi_{h\alpha} e_\alpha = 0. \tag{94}$$

Если теперь, как это делалось в п. 56 для уравнений (82), образуем и для уравнений (91) дифференциал живых сил

$$dL = dt \sum_{\alpha=1}^{\nu} \Phi_\alpha e_\alpha = dt \sum_{\alpha=1}^{\nu} (\mathrm{A}_\alpha + \Omega_\alpha) e_\alpha$$

и примем во внимание, что в силу соотношений (93) имеем тождественно

$$dt \sum_{\alpha=1}^{\nu} \mathrm{A}_\alpha e_\alpha = dt \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \sum_{\alpha=1}^{\nu} \varphi_{h\alpha} e_\alpha,$$

то увидим на основании тождеств (94), что члены A_α ничего не прибавляют к этой интегрируемой комбинации. Другими словами, *члены* A_α, *происходящие исключительно от неголономных связей, имеют гироскопический характер* в смысле, разъясненном в п. 44. Это и есть упомянутое выше замечание Вольтерра.

Прибавим еще, что Вольтерра назвал *системами с независимыми характеристиками* такие системы, для которых левые части $\mathrm{A}_\alpha + \Omega_\alpha$ уравнений движения содержат явно только кинематические характеристики e (т. е. не зависят от q).

В этом случае определение так называемого *спонтанного движения* системы, т. е. движения при отсутствии активных сил, которое определяется уравнениями

$$\mathrm{A}_\alpha + \Omega_\alpha = 0,$$

может быть разбито на две отдельные операции: определение характеристик e на основе предыдущей системы и последующее определение q на основе параметрических уравнений связей (77).

Следует заметить, что для систем со связями, не зависящими от времени, члены голономности Ω_α можно всегда сделать не зависящими от q посредством подходящего выбора характеристик e_α, какова бы ни была природа связей (77). Действительно, заметим, что при допущенном предположении T^* после вычисления будет определенной положительной квадратичной формой относительно e_α с коэффициентами, которые, естественно, в общем случае будут зависеть от q. Далее, как известно, можно всегда бесконечным числом способов вместо e_α подставить столько же их линейных комбинаций e'_α с коэффициентами, зависящими от q, и притом так, чтобы привести T^* к канонической форме

$$T^* = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{\nu} e'^2_\alpha;$$

после этого на основании формул (90) будем иметь

$$\Omega_\alpha = \dot{e}'_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu).$$

60. Уравнения Аппелля. Обращаясь снова к уравнениям движения системы с неголономными связями (82)

$$\sum_{h=1}^{n} \eta_{h\alpha} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} \right) = \Phi_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu),$$

покажем, что их левые части, как это было и в случае уравнений Лагранжа, все можно выразить посредством одной единственной функции[1], которая, однако, будет значительно менее простой, чем живая сила T. Эта функция составляется из ускорений $\boldsymbol{a}_i$ точек P_i так же, как живая сила составляется из скоростей $\boldsymbol{v}_i$. Речь идет о функции (называемой также *энергией ускорений системы*)

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_i,$$

которую нужно рассматривать выраженной (помимо времени, если связи зависят от него) в зависимости от лагранжевых координат q, кинематических характеристик e и их производных $\dot{e}$.

Чтобы выяснить, каким образом левые части уравнений (82) могут быть выражены посредством функции S, будем исходить от выражений скоростей отдельных точек P_i (33)

$$\boldsymbol{v}_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial P_i}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

и, рассматривая в них $\dot{q}_h$ выраженными посредством q, e, t при помощи (77), продифференцируем их еще раз по t. Таким образом, получим

$$\boldsymbol{a}_i = \sum_{h=1}^{n} \ddot{q}_h \frac{\partial P_i}{\partial q_h} + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

---

[1] Appell, *Comptes Rendus*, т. 129, 1899; *Crelle*, т. 121 (1900); *Journal de math.*, 5-я серия, т. VI, 1900.

где опущенные члены не зависят от $\ddot{q}$ или, точнее, как это следует из формул (77), зависят только от q, e, t. Поэтому, если возьмем частную производную от ускорения a_i по любому $\dot{e}_\alpha$, то эти опущенные члены совсем не появятся в результате, и мы получим

$$\frac{\partial a_i}{\partial \dot{e}_\alpha}=\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \ddot{q}_h}{\partial \dot{e}_\alpha} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N,\ \alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu). \qquad (95)$$

Повторяя, начиная с соотношений (77), выводы, которые привели нас от уравнений (33) к уравнениям (95), получим

$$\frac{\partial \ddot{q}_h}{\partial \dot{e}_\alpha}=\eta_{h\alpha} \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ r; \quad \alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu),$$

так что уравнениям (95) мы можем придать вид

$$\frac{\partial a_i}{\partial \dot{e}_\alpha}=\sum_{h=1}^{n} \eta_{h\alpha} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad \begin{gathered}(i=1,\ 2,\ \ldots,\ N;\\ \alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu).\end{gathered} \qquad (95')$$

Вспоминая теперь первоначальное выражение (38) лагранжевых биномов

$$\tau_h=\sum_{i=1}^{N} m_i a_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

можно левые части уравнений (82) написать в виде

$$\sum_{h=1}^{n} \eta_{h\alpha} \sum_{i=1}^{N} m_i a_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu),$$

или же

$$\sum_{i=1}^{N} m_i a_i \cdot \sum_{h=1}^{n} \eta_{h\alpha} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu),$$

или, наконец, принимая во внимание уравнения (95'),

$$\sum_{i=1}^{N} m_i a_i \cdot \frac{\partial a_i}{\partial \dot{e}_\alpha} \qquad (\alpha=1,\ 2\ \ldots,\ \nu).$$

Мы видим таким образом, что получили частные производные от S по $\dot{e}_\alpha$; уравнения (82) можно написать теперь в крайне сжатой форме, принадлежащей Аппеллю,

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{e}_\alpha}=\Phi_\alpha \qquad (\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu).$$

§ 9. Геометрические дополнения: траектории дифференциальной системы второго порядка; спонтанные движения голономной системы и геодезические линии

61. Траектории. В виде дополнения к развитой в предыдущих параграфах теории дифференциальных уравнений движения какой угодно материальной системы (голономной или неголономной) добавим некоторые замечания о геометрическом представлении движения, т. е., с аналитической точки зрения, о различных обстоятельствах, которые могут представиться, когда из уравнений общего интеграла исключается время.

В простейшем случае одной материальной точки мы называли *траекториями* кривые, которые в физическом пространстве описывает движущаяся точка при различных движениях, определяемых динамическим уравнением $ma = F$, соответствующим рассматриваемому случаю. Речь идет о том семействе кривых, уравнения которых получатся после исключения независимого переменного t из уравнений общего решения дифференциального уравнения $ma = F$

$$x = x(t|c_1, c_2, \ldots, c_6), \quad y = y(t|c_1, c_2, \ldots, c_6),$$
$$z = z(t|c_1, c_2, \ldots, c_6),$$

где c обозначают шесть произвольных постоянных интегрирования. В общем случае после исключения t в уравнениях траектории остаются все эти шесть произвольных постоянных. Но при частных предположениях может случиться, что исключение t повлечет за собой исчезновение какой-нибудь из постоянных. Так, например, если сила F есть ньютонианское притяжение, исходящее из некоторого неподвижного центра O, то все траектории будут коническими сечениями, имеющими фокус в точке O (гл. III, § 2); эти кривые зависят только от пяти существенных постоянных (две для определения плоскости орбиты, проходящей через O, одна для ориентации фокальной оси в этой плоскости и остальные две — параметр и эксцентриситет). Если сила равна нулю, то траектории сведутся к ∞^4 прямых (геодезические линии физического пространства).

Все эти рассуждения можно обобщить на движения, определяемые общей нормальной системой дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{q}_h = \varphi_h(q \mid \dot{q} \mid t) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{96}$$

в частности лагранжевой системой (50) с гессианом Δ, отличным от нуля.

Для этой цели удобно интерпретировать n лагранжевых параметров q как обобщенные координаты точек абстрактного пространства n измерений Γ_n (*пространство конфигураций*). *Траекториями* системы в этом пространстве называются те кривые, уравнения которых получаются путем исключения t из уравнений $q_h = q_h(t|c)$, представляющих общее решение системы (96). Можно, если угодно, эти последние уравнения рассматривать как параметрические уравнения семейства траекторий, истолковывая t как вспомогательный параметр, и сосредоточить внимание исключительно на последовательности точек в изображающем пространстве Γ_n.

Какой бы из этих способов представления траекторий ни иметь в виду, оказывается выгодным задачу изучения траекторий поставить в дифференциальной форме; таким способом мы достигнем уточнения числа существенных постоянных, от которых зависят траектории, применяя для этого, как увидим, обычные теоремы существования интегралов систем дифференциальных уравнений.

Чтобы сделать более очевидной аналогию с элементарными случаями, приведенными выше, условимся истолковывать обобщенные координаты q в пространстве Γ_n как прямоугольные декартовы координаты; заметим, что при этом направление, исходящее из какой-нибудь точки, характеризуется отношениями дифференциалов dq от q, и любую кривую в пространстве Γ_n можно определить, выражая $n-1$ координат произвольной ее точки как функции от n-й координаты.

Для наших целей удобно заменить в данной системе дифференциальных уравнений (96) время t одной из координат q, рассматривая ее как независимую переменную, а t (наравне с $n-1$ остальными q) как функцию от нее. Это, конечно, можно сделать, так как при этом будут исключены только те возможные решения системы (96), которые соответствуют покою, т. е. в которых *все* q остаются постоянными. Исключая этот случай и изменяя, если необходимо, индексы, мы можем всегда предположить, что координата q_n не будет постоянной, т. е. что производная $\dot{q}_n$ не будет тождественно равна нулю. Обращаясь к интервалу времени, в котором всегда $\dot{q}_n \neq 0$, условимся вместо t принять за независимую переменную q_n; обозначая штрихами производные по этой новой независимой переменной, будем иметь

$$t' = \frac{dt}{dq_n}, \tag{97}$$

и, следовательно,

$$\dot{q}_n = \frac{dq_n}{dt} = \frac{1}{t'}, \quad \ddot{q}_n = -\frac{t''}{t'^3}; \tag{98}$$

$$\dot{q}_h = \frac{1}{t'} q_h', \quad \ddot{q}_h = \frac{1}{t'^2} q_h'' - \frac{t''}{t'^3} q_h' \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{99}$$

Возьмем теперь снова нашу нормальную систему (96)

$$\ddot{q}_h = \varphi_h(q|\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{n-1}, \dot{q}_n|t) \quad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

и исключим в правых частях $\dot{q}$ посредством (98), (99) таким образом, чтобы придать им вид

$$\varphi_h\left(q \,\middle|\, \frac{1}{t'} q_1', \ldots, \frac{1}{t'} q_{n-1}', \ldots, \frac{1}{t'} \,\middle|\, t\right);$$

в силу этого правые части будут функциями, кроме q, от аргументов $q_1', \ldots, q'_{n-1}$, t и t'. Считая теперь, что φ_h имеют указанное выражение, мы можем придать последнему из уравнений (96) следующий вид:

$$t'' = -t'^3\varphi_n, \tag{96'}$$

если принять во внимание второе из равенств (98). Остальные уравнения (96) на основании второй группы равенств (99) и только что написанного уравнения примут вид

$$q''_h = t'^2(\varphi_h - q'_h\varphi_n) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{96''}$$

Система (96'), (96''), как мы видим, представляет собой все еще нормальную систему второго порядка относительно n неизвестных функций t, $q_1, \ldots, q_{n-1}$ независимого переменного q_n. Поэтому на основании обычной теоремы существования и единственности решения дифференциальных уравнений можно утверждать, что для системы (96'), (96'') существует решение и притом единственное, для которого в соответствии с заданным значением $q^0{}_n$ независимой переменной остальные $n-1$ переменных q и соответствующие им производные q' вместе с t и t' принимают наперед заданные произвольные значения. Условие того, что кривая в пространстве Γ_n проходит через заданную точку P_0 в заданном направлении, выражается тем обстоятельством, что при указанном значении q_n^0 координаты q_n остальные $(n-1)$ координат q и их производные q' принимают заданные значения. Отсюда можно заключить, что через каждую точку пространства Γ_n в каждом из возможных направлений проходит *по крайней мере* одна траектория. Так как точек в пространстве Γ_n будет ∞^n и из каждой из них выходит ∞^{n-1} направлений, а на каждой кривой существует ∞^1 точек и в каждой из них, за вычетом лишь исключительных (особых точек), однозначно определяется направление касательной, то можно поэтому сказать, что *траектории дифференциальной системы второго порядка* (96) *с n неизвестными функциями образуют множество, состоящее по крайней мере из ∞^{2n-2} элементов.*

Но даже указав значения, которые при $q_n = q_n^0$ должны принять $2n-2$ функций q_h и q_h' $(h = 1, 2, \ldots, n-1)$, можно еще произвольно выбирать начальные значения t и t', так что в общей сложности для системы дифференциальных уравнений (96'), (96'') или для эквивалентной ей системы (96) имеются ∞^2 решений, траектории которых в Γ_n выходят из одной и той же точки P_0 в одном и том же направлении; и a priori нельзя решить, соответствуют ли этим ∞^2 решениям действительно столько же различных траекторий, или же эти траектории приводятся к ∞^1, или даже только к одной траектории. Наконец, справедливо также, что в общем решении координаты $q_1, \ldots, q_{n-1}$ представятся при более широких предположениях зависящими существенным образом от переменной

q_n, от геометрических постоянных, соответствующих точке P_0 и заданных направлений через нее, а не только от t_0 и t_0'. Не исключена также возможность и того, что в частных случаях одна из этих постоянных t_0, t_0' или обе вместе могут отсутствовать в указанных выше выражениях координат $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$.

Таким образом, в то время как здесь можно утверждать, что, вообще говоря, система (96) будет иметь ∞^{2n} траекторий, в ближайших пунктах мы покажем на двух особенно наглядных примерах, что число траекторий может быть сведено к ∞^{2n-1} или даже к ∞^{2n-2}.

62. Дифференциальные системы с ∞^{2n-1} траекториями. Предположим, что уравнения системы (96) не содержат явно t. В этом случае эта переменная не появится также и в правых частях уравнений эквивалентной системы (96′), (96″), а с другой стороны, там появится t', и левую часть уравнения (96′) можно написать в виде $\frac{dt'}{dq_n}$. Мы видим, таким образом, что в этом случае систему (96′), (96″) можно рассматривать как нормальную систему с n неизвестными функциями $t', q_1, \ldots, q_{n-1}$ от q_n, разрешенную относительно первой производной от t' и относительно вторых производных от остальных $n-1$ неизвестных функций. Отсюда мы заключаем, что общее решение, в частности, выражения $q_1, \ldots, q_{n-1}$ через q_n, т. е. уравнения траекторий, зависят (самое большее) от $2n-1$ произвольных постоянных.

63. Спонтанные движения. Геодезические линии. Рассмотрим, наконец, спонтанные движения, т. е. движения при отсутствии сил, голономной системы с n степенями свободы и со связями, не зависящими от времени; живая сила такой системы представляется, как обычно, равенством

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ l=1}}^{n} a_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l.$$

Траектории (динамические) в пространстве Γ_n таких спонтанных движений называются геодезическими линиями, к которым мы вернемся в § 4, гл. XI. Здесь же мы предполагаем доказать, что траекторий в этом случае будет ∞^{2n-2}.

Заметим прежде всего, что при отсутствии сил уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{n} a_{jh} \dot{q}_j - \sum_{\substack{j=1 \\ l=1}}^{n} \frac{\partial a_{jl}}{\partial q_h} \dot{q}_j \dot{q}_l = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

и если выполнить дифференцирование и ввести так называемые *символы Кристоффеля* [1] *первого рода*

$$\begin{bmatrix} jl \\ h \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{jh}}{\partial q_l} + \frac{\partial a_{hl}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{jl}}{\partial q_h}\right) \quad (j,\ h,\ l = 1,\ 2,\ \dots,n),$$

то можно написать

$$\sum_{j=1}^{n} a_{hj}\ddot{q}_j - \sum_{\substack{j=1\\ l=1}}^{n} \begin{bmatrix} jl \\ h \end{bmatrix} \dot{q}_j q_l = 0 \qquad (h = 1,\ 2,\ \dots,\ n).$$

Для того чтобы привести систему к нормальному виду, мы должны разрешить предыдущие уравнения относительно $\ddot{q}$, для чего умножим обе части каждого из h уравнений на величину $a^{(hi)}$, взаимную с a_{hi} (алгебраическое дополнение, деленное на определитель) и сложим полученные уравнения. Таким образом, вводя при этом символы Кристоффеля второго рода

$$\begin{Bmatrix} jl \\ i \end{Bmatrix} = \sum_{h=1}^{n} a^{(hi)} \begin{bmatrix} jl \\ h \end{bmatrix},$$

мы получим дифференциальные уравнения спонтанных движений в разрешенной форме

$$\ddot{q}_i = - \sum_{\substack{j=1\\ l=1}}^{n} \begin{Bmatrix} jl \\ i \end{Bmatrix} \dot{q}_j \dot{q}_l \qquad (i = 1,\ 2,\ \dots,\ n). \tag{100}$$

Сравнивая эти уравнения с уравнениями (96), мы видим, что φ_i обладают в этом случае двумя особенностями: не содержат явно времени t и являются однородными функциями второй степени относительно $\dot{q}$. Если теперь, пользуясь способом п. 61, мы примем за новую независимую переменную q_n вместо t, то получим, принимая во внимание уравнения первого порядка (98), (99) и имея в виду отмеченную однородность φ_i, тождества

$$\varphi_i\left(q \,\middle|\, \frac{1}{t'} q_1',\ \dots,\ \frac{1}{t'} q_{n-1}',\ \ \frac{1}{t'}\right) = \frac{1}{t'^2}\varphi_i \quad (q \,|\, q_1',\ \dots,\ q_{n-1}',1),$$

---

[1] Эльвин Бруно Кристоффель родился в Монжуа (на Рейне) в 1829 г., умер в Страсбурге в 1900 г. Был профессором в Политехнической школе в Цюрихе, в Берлинской промышленной академии и в Страсбургском университете. Прямой ученик Дирихле, а в широком смысле — и Римана, он дал ряд замечательных исследований в области алгебраических и абелевых функций, инвариантов, уравнений с частными производными и дифференциальной геометрии.

где в правой части величина $\frac{1}{t'^2}$ умножается на функцию, не зависящую от t'. Если для простоты обозначим эту функцию через ψ_i, то $n-1$ уравнений (96″) в этом случае примут вид

$$q_i''=\psi_i-q_i'\psi_n \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1)$$

и составят нормальную систему второго порядка относительно $n-1$ неизвестных функций $q_1, \ldots, q_{n-1}$ от q_n, которая сама по себе (т. е. без того, чтобы была необходимость присоединить к ней уравнение (96′)) достаточна для определения траекторий системы (100) или геодезических линий. Поэтому мы заключаем, что эти траектории зависят от $2n-2$ постоянных, т. е. как раз от наименьшего возможного числа их.

Заметим, наконец (не давая этому доказательства), что отмеченное выше свойство является характеристическим для консервативных случаев спонтанного движения, поскольку во всех других случаях консервативных сил или сил, зависящих только от положения (лишь бы они были отличны от нуля), траектории будут действительно зависеть от $2n-1$ произвольных постоянных, если связи, само собой разумеется, не зависят от времени[1]).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что если три точки движутся из состояния покоя под действием только внутренних сил, то касательные к траекториям в одновременных положениях трех точек в любой момент сходятся в одной точке или параллельны.

Достаточно принять во внимание, что количества движения трех точек, если считать их приложенными к этим точкам, образуют в любой момент уравновешенную систему векторов.

2. Посредством рассуждений, аналогичных рассуждениям п. 15, показать, что человек, стоящий на горизонтальном полу, может повертываться вокруг вертикали, даже если пол абсолютно гладкий, совершая подходящие движения рукой.

3. Предположим, что однородная цепочка, полная длина которой l, перекинута через малый блок C, не имеющий трения. Одна часть цепочки переменной длины $CA=q$ висит свободно, а другая, тоже висящая вертикально, имеет постоянную длину $CP=c$; остальная часть цепочки $l-c-q$ покоится в собранном виде на горизонтальной неподвижной подставке, причем ее следует уподобить одной материальной точке P.

Допустим, что единственная действующая сила есть вес, и рассмотрим промежуток времени, в течение которого конец A цепи опускается вертикально. Что произойдет, например, в том случае, если в начальный момент имеем $q>c$ и система предоставлена самой себе в состоянии покоя.

Обозначим через ν плотность (линейную) цепочки, через $v=\dot{q}$ — скорость разматывания, которая является в то же время скоростью точки A, и, нако-

---

[1]) Ср. P. Painlevé, Sur les mouvements et les trajectoires des systèmes. *Bull. de la Soc. math. de France*, т. XXII, 1894.

нец, через T — натяжение в точке P цепочки, возникающее благодаря связи вертикальной части PC цепочки с лежащей частью.

Для того чтобы написать уравнение движения задачи, введем вертикальную реакцию R, действию которой подвергается цепочка в C со стороны блока, и применим теорему о количестве движения в проекциях на вертикаль, отдельно для обеих частей цепочки CA и PC. Исключая R, найдем

$$\nu(q+c)\dot{v}=g\nu(q-c)-T.$$

Так как $v=\dot{q}$, то это уравнение будет служить для определения движения, но оно недостаточно для определения T. Для этой цели достаточно еще один раз применить теорему о количестве движения к материальному элементу цепочки, покидающему опору за элемент времени dt, следующий за любым моментом t, и располагающемуся затем вертикально. При данном значении q длина такого элемента будет как раз dq, а его масса νdq. С другой стороны, в начале элемента времени он имеет скорость, равную нулю, а в конце — скорость v, так что приращение проекции количества движения на вертикаль, направленную вверх, будет равно $\nu v dq$, а отношение этого приращения к dt будет νv^2. Это отношение надо приравнять сумме аналогичных проекций (па вертикаль, направленную вверх) внешних сил, действующих на элемент цепочки, которых в действительности будет четыре: вес, реакция опоры и два натяжения на концах элемента, о котором идет речь. Из этих натяжений то, которое происходит от связи с вертикальным куском, будет само вертикальным, направленным вверх и равным T; другое будет горизонтальным и поэтому не даст составляющей, направленной вверх. Что же касается веса и реакции, то эти силы обе бесконечно малы, и, следовательно, ими можно пренебречь, поэтому остается

$$\nu v^2=T.$$

Если примем во внимание, что

$$\dot{v}=\frac{dv}{dq}\dot{q}=v\frac{dv}{dq},$$

то будем иметь уравнение, связывающее скорость v падения цепи с параметром q,

$$(q+c)v\frac{dv}{dq}+v^2=g(q-c).$$

Это уравнение непосредственно интегрируется после того, как умножим обе его части на $2(q+c)$. Интеграл имеет вид

$$(q+c)^2v^2=2g\left(\frac{1}{3}q^3-c^2q\right)+\text{const}.$$

Если движение начинается из состояния покоя, причем A находится на уровне немного более низком уровня точки P $(q_0=c)$, то постоянная будет равна $\frac{4qc^3}{3}$. При этом предположении, если $l=12c$, то скорость, которую будет иметь конец A в тот момент, когда вся цепочка придет в движение, будет равна 22/39 скорости свободного падения.

4. Тяжелая однородная цепочка AP длины l подвешена в A таким образом, что, свешиваясь вертикально, другим концом P слегка касается неподвижной горизонтальной плоскости. В заданный момент $(t=0)$ верхний конец ее отпускается, в силу чего цепочка падает, складываясь в P. Продолжительность падения, очевидно, есть $\sqrt{\frac{2l}{g}}$. Рассуждая аналогично тому, как в предыдущем упражнении, и применяя теорему о количестве движения к элементам цепочки, которые один за другим будут укладываться на опоре, показать, что реакция плоскости в любой момент $t<\sqrt{\frac{2l}{g}}$ будет равна утроенному весу той части цепочки, которая уже находится на плоскости в этот момент.

5. Материальная система, деформируемая как угодно, выходит из состояния покоя, подвергаясь только действию внутренних консервативных сил. Показать, что она может при случае принять снова первоначальную конфигурацию, в отличном от начального положении, но никогда с отличной от него ориентацией. Ср. Painlevé, Comptes Rendus, т. 139, 1904, стр. 1170—1174.

6. Установившееся движение нити. Предполагается, что гибкая и нерастяжимая нить пробегает вдоль самой себя с постоянной скоростью v таким образом, что ее конфигурация остается неизменной. Указать условия, при которых такое движение осуществляется.

Для этого достаточно применить принцип Даламбера, подставляя в естественные уравнения равновесия (т. I, гл. XIV, п. 34) вместо единичной силы F потерянную силу $F-\nu a$ (ν — линейная плотность нити).

Вывести отсюда, что натяжение, которое испытывает нить, в предполагаемом установившемся движении будет равно статическому натяжению, уменьшенному на $\frac{\nu v^2}{r}$ (r — радиус кривизны конфигурации нити в любой ее точке).

7. Дана материальная система со связями, не зависящими от времени. Две какие угодно системы активных сил Σ_1, Σ_2 определяют для нее, начиная от состояния покоя, такие перемещения, что работа, совершаемая силами системы Σ_1 на перемещениях, соответствующих Σ_2, равна работе, совершаемой силами системы Σ_2 на перемещениях, соответствующих Σ_1. Ср. Morera, *Rend. Lincei*, серия V, т. II, 1893_2, стр. 245—246.

8. Для материальной системы, находящейся под действием каких-нибудь сил, Клаузиус[1]) называл *вириалом* системы сил относительно какой-нибудь точки O функцию

$$V=\sum_{i=1}^{N} F_i\overrightarrow{OP_i},$$

где F_i обозначает, как обычно, полную силу, действующую на любую точку P_i системы.

Предполагается, в частности, что речь идет о силах внутреннего происхождения, зависящих только от взаимных расстояний между точками. В этом случае, если через Δ_{ij} обозначим расстояние между любыми двумя точками

---

[1]) Рудольф Клаузиус (Rudolf Clausius) родился в Кеслине (Померания) в 1822 г., умер в Бонне в 1888 г., был профессором физики в университетах Цюриха, Вюрцбурга и Бонна. Классическими являются его исследования по теории тепла и по термодинамике в ее наиболее общей постановке, собранные в двух томах. Всеобщее внимание ученых в свое время привлекла также одна его формула, относящаяся к элементарным законам электродинамики.

P_i, P_j, то составляющая по $P_i P_j$ силы, которую испытывает P_i со стороны P_j, будет вида $\varphi(\Delta_{ij})$; та же сила в векторной форме представится в виде

$$\frac{\varphi(\Delta_{ij})}{\Delta_{ij}} \overrightarrow{P_i P_j}.$$

Естественно, что P_j будет испытывать со стороны P_i действие прямо противоположной силы.

Показать далее, что вириал внутренних сил этого типа будет независимым от O и равным

$$-\frac{1}{2} S \Delta_{ij} \varphi(\Delta_{ij}),$$

где символ S обозначает сумму, распространенную на простые попарные сочетания из индексов $1, 2, \ldots, N$.

9. Для какой-нибудь движущейся точки P относительно произвольной неподвижной точки O имеет место тождество

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{OP}^2 = \overrightarrow{OP} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}^2,$$

где $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{a}$ обозначают скорость и ускорение точки.

Отсюда, для какой угодно системы материальных точек P_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$, находящихся под действием сил $\boldsymbol{F}_i$, вывести тождество

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OP_i}^2 = V + 2T,$$

где V обозначает вириал системы относительно точки O (предыдущее упражнение) и T — живую силу.

На основании этой формулы доказать, что если движение системы является периодическим, то среднее значение живой силы T в течение одного периода равно аналогичному среднему значению вириала.

Это замечание принадлежит Клаузиусу, который нашел интересные применения его к механической теории тепла.

10. Из тождества предыдущего упражнения вывести, что если силы $\boldsymbol{F}_i$ являются производными от потенциала U, представляющего собой однородную функцию второй степени от координат x_i, y_i, z_i точек P_i системы, то полярный момент инерции

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OP_i}^2$$

будет квадратичной функцией времени (теорема Якоби).

11. Доказать посредством рассуждений, аналогичных рассуждениям п. 37, что для голономной системы с какими угодно связями имеем

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \delta P_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \delta q_h.$$

Отсюда, принимая во внимание тождества

$$\frac{d}{dt} \delta P_i = \delta \boldsymbol{v}_i, \quad \boldsymbol{a} \cdot \delta P_i = \frac{d}{dt} (\boldsymbol{v}_i \cdot \delta P_i) - \boldsymbol{v}_i \cdot \delta \boldsymbol{v}_i,$$

вывести соотношение

$$\sum_{i=1}^{N} m_i a_i\cdot\delta P_i=\frac{d}{dt}\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot q_h}\delta q_h-\delta T$$

и непосредственно подтвердить, что правая часть приводится к

$$\sum_{h=1}^{n}\tau_h\delta q_h,$$

где, как обычно, τ_h обозначают лагранжевы биномы.

Приравнивая это выражение виртуальной работе $\sum_{h=1}^{n} Q_h\delta q_h$, мы, естественно, найдем уравнения Лагранжа во второй форме. Этот способ вывода дан Бельтрами[1]. Ср. Beltrami, Opere, т. IV, стр. 537.

12. Если для голономной системы живая сила T имеет постоянные коэффициенты, то

$$\sum_{h=1}^{n}\dot{\overset{0}{q}}_h\overset{1}{p}_h=\sum_{h=1}^{n}\dot{\overset{1}{q}}_h\overset{0}{p}_h,$$

где $\dot q^0, p^0$ обозначают лагранжевы скорости и соответствующие количества движения в любой момент t_0 и $\dot q^1$, p^1 — аналогичные элементы в другой момент t_1.

Если в момент t_0 обращаются в нуль все скорости, за исключением $\dot{\overset{0}{q}}_i$, и все моменты, за исключением $\overset{0}{p}_k$, то в течение всего движения мы будем иметь

$$\frac{p_i}{\dot q_k}=\text{const.}$$

13. Каким условиям должна удовлетворять функция Лагранжа $\mathfrak{L}$ положений P_i и скоростей v_i материальных точек, чтобы она не зависела от декартовой системы координат или, что одно и то же, чтобы она зависела только от взаимных положений и относительных скоростей различных точек системы?

---

[1] Евгений Бельтрами (Eugenio Beltrami) родился в Кремоне в 1835 г., умер в Риме в 1900 г. После того как вынужден был прервать в 1856 г. обучение в университете, начатое им в Павии, он поступил на службу (на железную дорогу), на которой прослужил шесть лет, т. е. до того момента, когда обнаружилось его значение, как математика, благодаря его первым работам по дифференциальной геометрии. Получил звание профессора алгебры и аналитической геометрии в университете в Болонье. Затем перешел к чтению более сложных лекций в университетах Пизы, Павии и Рима. С 1876 г. до смерти преподавал математическую физику. Был президентом Академии наук (Accademia dei Lincei) и сенатором. Его работы, собранные в четырех томах in folio, показывают плодотворную разносторонность его таланта и с точки зрения формы представляют образец научной прозы. Основную важность представляют его исследования о ньютоновском потенциале и его дифференциальные параметры; знаменитым является его Saggio di interpretazione della Geometria non euclidea, где он дает конкретное осуществление геометрии Лобачевского на обыкновенной поверхности вращения (псевдосфере).

Чтобы найти такие условия, достаточно выразить, что $\mathfrak{L}$ остается неизменной при всяком преобразовании декартовых координат или, что одно и то же, при всяком перемещении системы точек P_i и векторов v_i как неизменяемой системы; можно ограничиться рассмотрением любого бесконечно малого перемещения системы как неизменяемого твердого тела, так как всякое конечное перемещение можно разложить на такие перемещения.

Далее, если dO и $d\omega$ суть характеристические векторы бесконечно малого перемещения системы точек P_i и векторов v_i как твердого тела, то для отдельных точек P_i будем иметь (т. I, гл. III, п. 24)

$$dP_i = dO + d\omega \times \overrightarrow{OP_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N);$$

что касается векторов v_i, то достаточно заметить, что предполагаемое бесконечно малое перемещение можно рассматривать как переносное движение, чтобы заключить (т. I, гл. IV, п. 10), что

$$dv_i = d\omega \times v_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N);$$

после чего, обозначая через x_i, y_i, z_i координаты точки P_i, через $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ — составляющие вектора v_i и принимая во внимание произвольность векторов dO и $d\omega$, мы увидим, что желаемые условия выразятся равенствами

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_i} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} \left\{ y_i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y_i} + \dot{y}_i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{z}_i} - \dot{z}_i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{y}_i} \right\} = 0$$

и аналогичными им, которые выводятся из них посредством круговой перестановки букв x, y, z.

14. В предположении, что функция Лагранжа $\mathfrak{L}$ системы из N материальных точек P_i, отнесенных к декартовым осям, удовлетворяет условиям, указанным в предыдущем упражнении, доказать, что $3N$ лагранжевых уравнений движения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_i} = 0, \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y_i} = 0, \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{z}_i} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z_i} = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N)$$

допускают первые интегралы

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}_i} = \text{const}, \qquad \sum_{i=1}^{N} \left(y_i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{z}_i} - z_i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{y}_i} \right) = \text{const}$$

и остальные четыре, получающиеся из них путем круговой перестановки букв x, y, z.

Этот результат обобщает обычные интегралы количеств движения и интегралы моментов, которые существуют для $\mathfrak{L} = T - U$, где U зависит только от конфигурации системы.

15. Маятник переменной длины. Из замечаний гл. I, п. 34 непосредственно следует, что живая сила маятника, длина которого l изменяется с временем по какому-либо закону, определяется равенством

$$T = \frac{1}{2}(l^2\dot{\theta}^2 + \dot{l}^2),$$

если для простоты масса маятника принимается равной 1. Для потенциала (единичного) имеем здесь $U = gl \cos\theta$.

Движение определяется уравнением

$$\frac{d}{dt}(l^2\dot{\theta}) + gl \sin\theta = 0,$$

к которому можно было бы придти также и на основании теоремы о результирующем моменте количеств движения относительно нормали к плоскости колебаний в центре подвеса.

Рассмотреть, в частности, случай, когда длина l нити есть линейная функция времени, причем речь идет только о малых колебаниях. В этом случае, выбирая подходящим образом начало отсчета времен, можно положить $l=ut$ и подставить θ вместо $\sin\theta$. Если, наконец, за неизвестную функцию принять $y=l\theta$ вместо θ и за независимое переменное $x=\frac{gl}{u^2}$ вместо t, то в конце концов придем к уравнению

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+y=0.$$

Из этого уравнения, в частности, можно получить, что для маятника, длина которого изменяется очень медленно, продолжительность одного простого колебания (промежуток времени между двумя последовательными прохождениями через вертикаль) приблизительно равна аналогичной продолжительности для некоторого математического маятника, постоянная длина которого является средней от длин, принадлежащих рассматриваемому маятнику за рассматриваемый промежуток времени. (См., например, Lecornu, Dynamique appliquée, II изд., Paris, 1925 г., п. 164.)

16. Концы A, B твердого стержня длиной l скользят без трения в вертикальной плоскости соответственно по двум направляющим Ox, Oy, первая из которых горизонтальна, а вторая вертикальна и направлена вверх. Такая система, очевидно, имеет только одну степень свободы. За ее лагранжеву координату можно принять угол (острый) $\theta=\widehat{OAB}$.

Обозначая через λ расстояние центра тяжести стержня G от конца A, доказать, что живая сила системы определяется равенством

$$T=\frac{1}{2}(I+mr^2)\dot{\theta}^2,$$

где m — полная масса, I — полярный момент инерции (постоянный) стержня относительно G и

$$r=\sqrt{(l-\lambda)^2\cos^2\theta+\lambda^2\sin^2\theta}$$

есть переменное расстояние G от O.

Если стержень находится под действием только своего веса, то потенциал будет иметь значение

$$U=-mgl\sin\theta.$$

Показать, в частности, что в случае однородного стержня дифференциальное уравнение относительно $\theta(t)$, определяющее его движение, будет тождественно с дифференциальным уравнением качаний математического маятника длиной $\frac{2l}{3}$.

17. Кусок гибкой и нерастяжимой нити длиной l скользит без трения внутри трубки (т. е., схематически, вдоль некоторой заданной кривой, как в упражнении 6). Такую материальную систему, очевидно, можно рассматривать как голономную с одной степенью свободы, принимая, например, за обобщенную координату q криволинейную абсциссу положения, занимаемого внутри трубки одним из концов нити.

Если нить предполагается однородной и если ее линейную плотность обозначить через ν, то живая сила определится равенством $T=\frac{\nu l v^2}{2}$, где скорость скольжения v надо выразить через q и $\dot{q}$; в случае, когда нить находится под действием только консервативных сил с потенциалом $U(q)$, закон движения непосредственно получится из интеграла живых сил $T - U = \text{const}$.

Если эти силы сводятся к весу и z_0 обозначает высоту по вертикали центра тяжести нити (которая зависит от заданной кривой и от положения, занимаемого на ней куском нити, и будет вполне определенной функцией от q), то предыдущее уравнение примет вид

$$\frac{1}{2} v^2 - g z_0 = \text{const}.$$

В виде приложения рассмотрим U-образную трубку с двумя прямолинейными, вертикальными, направленными вниз ветвями, соединенными в двух точках на одной и той же высоте посредством криволинейного куска длиной λ. Условимся ограничивать наши выводы промежутком времени, в течение которого нить, скользя под действием тяжести внутри трубы, имела бы первый конец A в одной из двух вертикальных ветвей, а второй конец A' — в другой. Обозначая в любой момент q, q' высоты по вертикали концов A, A', отсчитываемые, как положительные, вниз и от уровня, на котором начинается криволинейный кусок соединяющей трубы, мы будем иметь $q' = l - \lambda - q$; если для определенности предположим, что конец A движется вниз, то будем иметь $v = \dot{q}$. С другой стороны, имеем тождество

$$l\nu z_0 = q\nu \frac{q}{2} + q'\nu \frac{q'}{2} + \mu,$$

где μ — величина постоянная (доля той части нити, которая находится в соединительной трубке); таким образом мы заключаем, что движение определяется уравнением

$$v^2 - \frac{g}{l} \{q^2 + (l - \lambda - q)^2\} = \text{const}.$$

Рассмотреть, в частности, случай, когда соединительная часть трубки очень мала по сравнению с l $(\lambda = 0)$; так как вначале q приблизительно равно q', то опускание начнется со стороны A с ничтожной скоростью $(v_0 = 0)$; доказать, что когда A' достигает самой высокой точки своей вертикальной ветви $(q' = 0)$, то скорость, приобретенная концом A, будет равна половине той скорости, которую он имел бы на той же высоте при свободном падении.

18. Гибкая и нерастяжимая нить, полная длина которой l, намотана на катушку. Один конец A нити закрепляется, и катушку пускают свободно падать вдоль вертикали так, что нить будет разматываться. Предполагая, что под действием подходящих приборов без трения ось катушки падает вертикально, оставаясь горизонтальной и параллельной самой себе, изучить движение.

При допущенных предположениях система имеет только одну степень свободы и за обобщенную координату q можно принять длину куска нити, размотавшегося до некоторого произвольного момента t. Обозначим через ν линейную плотность нити, через r — радиус катушки, через m — ее массу без нити, через μ — ее момент инерции относительно оси. Принимая во внимание, что центр тяжести катушки падает со скоростью $\dot{q}$, вращаясь вокруг ее оси с угловой скоростью, которая, если пренебречь толщиной нити, будет равна $\dot{q}/r$, мы найдем для живой силы T и потенциала U веса, пренебрегая во всех случаях толщиной нити, выражения

$$T = \frac{1}{2}(m + [l - q]\nu)\dot{q}^2 + \frac{1}{2}(\mu + [l - q]\nu r^2)\frac{\dot{q}^2}{r^2},$$

$$U = g(m + [l - q]\nu) q + \frac{\nu g}{2} q^2 + \text{const}.$$

Показать, что если пренебречь массой нити, то катушка опускается так как будто она скатывается по вертикальной плоскости.

19. Показать, что любая однородная треугольная пластинка, масса которой m, эквивалентна в смысле, разъясненном в п. 38, системе из трех точек, помещенных посредине сторон, неизменно связанных между собой и имеющих каждая массу $m/3$.

20. Две массы m_1, m_2, движущиеся в вертикальной плоскости, связаны очень тонкой нитью постоянной длины l, которая продета через неподвижное колечко O. Рассмотреть движение системы в предположении, что нить остается натянутой и действуют только веса этих масс.

Речь идет, очевидно, о голономной системе с тремя степенями свободы, так как положение системы можно определить тремя координатами: углами θ_1, θ_2 между направлениями нитей и вертикалью через точку O, направленною вниз, и радиусом-вектором ρ массы m_1 относительно O; аналогичный радиус-вектор массы m_2 будет $l-\rho$. Показать, что живая сила и потенциал определяются равенствами

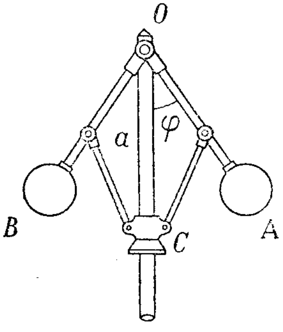
$$T=\frac{1}{2}m_1(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\theta}_1^2)+\frac{1}{2}m_2(\dot{\rho}^2+[l-\rho]^2\dot{\theta}_2^2),$$

$$U=g(m_1\rho\cos\theta_1+m_2[l-\rho]\cos\theta_2);$$

написать уравнения движения и т. д.

21. Масса m, движущаяся без трения по горизонтальной плоскости, привязана к нити длины l; нить проходит через небольшое отверстие в плоскости и несет на другом конце массу m_1. Изучить движение под действием силы тяжести, принимая во внимание, что система (при натянутой нити) имеет две степени свободы и что имеют место интеграл живой силы и интеграл площадей для горизонтальной плоскости.

22. Схематическая теория центробежного регулятора Уатта[1]). Речь идет о приборе R, предназначенном для уничтожения возможных возмущений равномерного вращательного движения.



Фиг. 23.

Пусть a есть ось, которую мы будем предполагать вертикальной и неизменно связанной с вращающейся системой S. Вращение системы S требуется поддерживать приблизительно равномерным. Регулятор R состоит прежде всего из двух равных стержней OA и OB (фиг. 23), связанных шарниром в неподвижной точке O оси a таким образом, что они могут вращаться в одной и той же плоскости, проходящей через эту ось. Стержни несут на концах две равные массы m и связаны тоже шарнирно посредством меньших и равных между собой стержней с муфтой C, скользящей вдоль a. Таким образом обеспечивается то, что в любой момент оба стержня OA и OB образуют с a один и тот же угол φ. Если вращение системы S происходит от паровой машины, то регулятор управляет впуском пара в распределительную коробку, пропуская его туда тем меньше, чем больше возрастает угол φ.

Можно точно определить зависимость между изменением угла φ и возможной неправильностью движения. Прежде всего заметим, что системы S и R в целом составляют материальную систему с двумя степенями свободы,

---

[1]) Джемс Уатт родился в Гриноке (Шотландия) в 1736 г., умер около Бирмингема в 1819 г., известен благодаря усовершенствованиям, внесенным в паровую машину.

так как за обобщенные координаты можно принять угол θ, определяющий положение плоскости регулятора R (и тем самым системы S) относительно неподвижной системы отсчета, и угол φ, определяющий конфигурацию регулятора R в этой плоскости.

Живая сила всей системы S, R будет типа

$$T = I\dot{\theta}^2 + J\dot{\varphi}^2,$$

где I и J суть функции угла φ. Чтобы иметь дело с простейшим случаем, представим себе, что в системе R масса стержней ничтожна по сравнению с m. В этом предположении, обозначая через C момент инерции системы S относительно a, очевидно, будем иметь

$$I = C + 2ml^2 \sin^2 \varphi, \quad J = 2ml^2.$$

Что же касается активных сил Q_θ, Q_φ, то мы ограничимся предположением, что входят только вес и момент относительно оси вращения (если пренебречь возможным сопротивлением), совпадающий, как легко проверить, с Q_θ. Все, что относится к весу, допускает потенциал U, который определяется, по крайней мере до аддитивной постоянной, произведением полного веса всей системы S, R на высоту ее центра тяжести; но так как центр тяжести S остается неподвижным, то с точностью по крайней мере до несущественной постоянной можно отождествить U с потенциалом двух масс A и B, т. е. положить

$$U = 2mgl \cos \varphi.$$

На основании этих предпосылок получаются уравнения движения системы

$$\frac{d}{dt}(I\dot{\theta}) = Q_\theta, \quad \frac{d}{dt}(J\dot{\varphi}) - \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 \frac{\partial I}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi}.$$

Эти уравнения приобретают особый интерес при изучении малых колебаний системы около установившегося состояния движения ($\dot{\theta} = \mathrm{const}$, $\varphi = \mathrm{const}$). Мы встретимся с этими уравнениями в упражнении 8 следующей главы.

23. Дана голономная система. Показать, что если каждая точка P_i этой системы находится под действием силы вязкого сопротивления $-\lambda \boldsymbol{v}_i$, где λ — положительная постоянная и $\boldsymbol{v}_i$ — скорость точки P_i, то лагранжевым составляющим таких сил можно придать вид

$$Q_h = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

где T обозначает живую силу системы.

Достаточно отправиться от формулы (37) и принять во внимание указанные выражения для $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}$ в п. 37.

24. На основании предыдущего упражнения уравнениями Лагранжа, определяющими движение голономной системы, находящейся под действием вязкого сопротивления, будут

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Доказать, что посредством замены независимого переменного $dt_1 = e^{-\lambda t} dt$ предыдущие уравнения приводятся к уравнениям спонтанного движения системы[1]).

---

[1]) См. Levi-Civita, Sul moto di un sistema di punti materiali soggetti a resistenze proporzionale alle rispettive velocità. *Atti Ist. Veneto*; т. LIV, 1896, стр. 1004—1008.