Глава VI

УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ

1. Исследование динамической устойчивости, изложенное для одной точки в гл. II, § 6, и последующее изучение малых колебаний около положения устойчивого равновесия можно распространить, пользуясь уравнениями Лагранжа, на случай какой угодно голономной системы.

Это обобщение представляет особый интерес не только с теоретической стороны, но также и с точки зрения физических и технических приложений. Имея в виду главным образом эти приложения, мы и будем рассматривать в этой главе вопросы, связанные с устойчивостью и колебаниями.

В физических и технических проблемах встречаются и другие виды естественных движений, а также некоторые виды движения тех же самых голономных систем, которые, хотя и выражаются уравнениями более общими, чем уравнения Лагранжа, но могут быть сопоставлены с состояниями равновесия голономной системы благодаря тому, что уравнения допускают соответствующие частные решения (статические или меростатические решения). Мы распространим наше исследование и на эти решения. Наконец, мы введем, наряду со строгим определением понятия устойчивости, приближенное понятие, соответствующее устойчивости в течение конечного, но достаточно длительного промежутка времени, или *линейной* устойчивости *), исследованием которой мы и будем часто ограничиваться в силу непреодолимых математических трудностей, возникающих при анализе устойчивости в строгом смысле.

Это последнее направление исследований практических вопросов носит название теории малых колебаний.

Отметим, наконец, что в механизмах, используемых в технике и в лабораториях, встречаются пассивные сопротивления, содействующие устойчивости; но при исследовании устойчивости в этом случае потребуются рассуждения несколько иного характера, чем для консервативных систем. Рассмотрению этого вопроса посвящен § 7. Здесь же мы ограничимся указанием на новый замеча-

---

*) Как будет видно из дальнейшего, взгляды автора на линейную устойчивость или устойчивость по первому приближению не совпадают с общепринятыми. *(Прим. ред.)*

тельный критерий Э. Треффтца[1]) для характеристики устойчивости движения, в полной мере отвечающий требованиям техники.

§ 1. Динамическое понятие устойчивости равновесия для голономных систем. Теорема Дирихле

2. Вернемся к рассмотрению любой материальной голономной системы S, имеющей произвольное число степеней свободы n, и отнесем ее к любым n независимым лагранжевым координатам q.

Как мы уже знаем, всякое движение системы определяется соответствующими уравнениями,

$$q_h = q_h(t) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

производные от которых

$$\dot{q}_h = \dot{q}_h(t) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

в любой момент дают соответствующие лагранжевы скорости.

Чтобы придать нашим рассуждениям наиболее удобную и наглядную форму, условимся прибегать к гиперпространственному геометрическому представлению, рассматривая $2n$ параметров q и $\dot{q}$ как декартовы прямоугольные координаты в пространстве A_{2n} $2n$ измерений. Так как всякая точка этого пространства представляет состояние движения нашей системы, то A_{2n} можно назвать *пространством состояний движения*.

В пространстве A_{2n} движение (1) или, лучше сказать, непрерывная последовательность составляющих его состояний движения будет представлено кривой с параметрическими уравнениями (1), (2).

Введем здесь следующий удобный для дальнейшего способ выражения: будем называть „отклонением" двух точек q', $\dot{q}'$ и q'', $\dot{q}''$ пространства A_{2n} или двух соответствующих состояний движения максимум абсолютных величин

$$|q'_h - q''_h|, \quad |\dot{q}'_h - \dot{q}''_h| \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

от $2n$ разностей одноименных координат.

Далее, известно, что в A_{2n} *гиперсферой с центром в* q^0, $\dot{q}^0$ *и радиусом* $r\,(>0)$ называется гиперповерхность (или многообразие $2n-1$ измерений), определяемая уравнением

$$\sum_{h=1}^{n} \left([q_h - q_h^0]^2 + [\dot{q}_h - \dot{q}_h^0]^2\right) = r^2.$$

---

[1]) E. Trefftz, Zu den Grundlagen der Schwingungstheorie, *Math. Ann.*, т. 95, 1925, стр. 307—312.

Речь идет о *замкнутой* поверхности, делящей пространство A_{2n} на две области: область *внешних* и область *внутренних* точек. Точка пространства будет внешней или внутренней, смотря по тому, будет ли левая часть уравнения этой поверхности при подстановке в нее вместо q_h, $\dot{q}_h$ координат рассматриваемой точки больше или меньше r^2, или, как условимся говорить, смотря по тому, будет ли расстояние точки $(q, \dot{q})$ от точки $(q^0, \dot{q}^0)$ больше или меньше r.

Очевидно, что отклонение точек внутренней области от центра не может превосходить r (иначе левая часть уравнения превосходила бы r^2), отклонение точек внешней области от центра будет, конечно, больше чем $r/\sqrt{2n}$ (иначе левая часть была бы меньше r^2).

3. Для дальнейшего будет полезно, наряду с предыдущими геометрическими предпосылками, напомнить здесь некоторые понятия из анализа.

Предположим, что в пространстве A_{2n} задана функция точки H, т. е. функция от $2n$ аргументов q, $\dot{q}$, однозначная, конечная и непрерывная вместе с ее $2n$ частными производными первого порядка, по крайней мере в некоторой связной области $2n$ измерений, которой мы будем ограничиваться в наших рассуждениях.

Говорят, что функция H имеет *действительный* (или изолированный) минимум в некоторой точке M, если для любой точки P, достаточно близкой к M, но отличной от нее, удовлетворяется неравенство

$$H_P - H_M > 0,$$

где H_P и H_M суть значения функции H в точках P и M.

Иными словами, в случае минимума существует такая окрестность $2n$ измерений точки M, что во всякой ее точке P, отличной от M, имеет место предыдущее *неравенство*. Для краткости эту окрестность точки M мы будем называть „окрестностью, в которой чувствуется минимум“.

Если мы теперь будем рассматривать гиперсферу с центром в точке M и радиусом τ, достаточно малым для того, чтобы все ее точки Q (т. е. все точки Q, имеющие от M расстояние τ) принадлежали к только что определенной окрестности точки M, то разность $H_Q - H_M$ при изменении положения точки Q на гиперсфере будет иметь вследствие непрерывности функции H некоторый минимум μ и этот минимум (так как во всех точках Q чувствуется минимум) будет обязательно больше нуля.

Аналогичные замечания, если изменен только смысл неравенства, будут справедливы и в случае *действительного максимума*.

4. Устойчивость состояния равновесия. Предположим теперь, что голономная система S имеет связи, не зависящие от времени,

и находится под действием консервативных сил, потенциал которых обозначим через U. Этот потенциал, в силу только что допущенных предположений, будет зависеть исключительно от q; в рассматриваемом поле мы будем предполагать его, как обычно, однозначным, непрерывным и правильным вместе с его первыми и вторыми производными.

Мы уже знаем, что если функция $U(q)$ при частных значениях q^0 координат q, т. е. при заданной конфигурации C^0 системы, допускает стационарное значение (в частности, максимум или минимум), так что исчезают лагранжевы составляющие Q_h действующих сил, то C^0 будет для системы конфигурацией равновесия (т. I, гл. XV, п. 28).

Мы имеем здесь возможность полностью исследовать устойчивость этого состояния равновесия, пользуясь, вместо статического критерия, указанного в только что упоминавшемся п. 28, более общим и более точным определением динамического характера, совершенно аналогичным определению, которое мы приняли в частном случае одной свободной материальной точки (гл. II, п. 35).

Обобщая обычным образом данное в гл. II, п. 35 определение устойчивости, мы будем называть конфигурацию равновесия C^0 *устойчивой*, если при достаточно малом *возмущении* равновесия (т. е. при начальной конфигурации, достаточно близкой к C^0, и достаточно малой живой силе T^0) будет иметь место движение, при котором система остается сколь угодно близкой к C^0, и в то же время сохраняет сколь угодно малую живую силу, т. е. одновременные скорости всех отдельных точек системы остаются как угодно малыми.

Если, наоборот, как бы близка к C^0 ни была начальная конфигурация и как бы ни была мала вначале живая сила, всегда можно сообщить системе такое движение, в котором отклонение системы от конфигурации равновесия C^0, или даже только живая сила, в конце концов превзойдет некоторую постоянную (положительную), *не зависящую от начальных условий* величину, то конфигурация равновесия C^0 называется *неустойчивой*.

Этим критериям устойчивости и неустойчивости можно дать более простую, но менее точную форму, прибегая к геометрическому представлению п. 2. С этой целью заметим, что в пространстве A_{2n} состояний движения состояние равновесия в положении C^0 представляется точкой M с координатами $q_h = q_h^0$, $\dot{q}_h = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$, и всякое состояние движения, близкое к этому состоянию равновесия, представится точкой, имеющей очень малое отклонение от M, и обратно.

Если обозначим через P точку, представляющую состояние движения, которое принимает наша система в любой момент t, отправляясь от начальных условий, представляемых точкой P_0, то указанное выше характеристическое условие устойчивости состояния равновесия в C^0, представляемого точкой M, можно высказать следующим образом: состояние равновесия в C^0 будет устойчивым, если, выбрав сколь угодно малое ε, можно поставить ему в соответствие такое η, что при всяком P_0 внутри гиперсферы с центром в M и радиусом η точка P будет *неопределенно долго* оставаться внутри концентрической гиперсферы с радиусом ε.

Наоборот, состояние равновесия в C^0 будет неустойчивым, если внутри всякой гиперсферы с центром в M и как угодно малым радиусом η всегда будет существовать по крайней мере одна точка P_0, отправляясь от которой точка P в конце концов выйдет из концентрической гиперсферы с радиусом, *не зависящим от* η.

5. Теорема Дирихле. Выяснив таким образом динамическое понятие об устойчивости, докажем теорему Дирихле: *если потенциал U в некоторой конфигурации C^0 имеет действительный максимум, то равновесие в ней будет устойчивым.*

Заметим прежде всего, что при только что установленных предположениях полная энергия $H = T - U$ системы в точке M (представляющей состояние равновесия в конфигурации C^0) имеет действительный минимум. В самом деле, если P есть какая-нибудь точка пространства A_{2n}, то разность $H_P - H_M$, так как в M живая сила равна нулю, будет равна

$$T_P + (U_M - U_P),$$

откуда видно, что пока точка P близка к M или, еще точнее, остается в такой окрестности точки M, в которой чувствуется максимум U, эта разность остается положительной, за исключением случая, когда P совпадает с M.

Обратимся теперь к интегралу живых сил

$$H = \text{const}.$$

Если возьмем ε достаточно малым для того, чтобы гиперсфера Σ_ε с центром в M и радиусом ε вся была внутри окрестности точки M, в которой чувствуется действительный минимум функции H, то этому ε можно в силу замечаний п. 3 поставить в соответствие такое число μ, что для всех точек Q, лежащих на гиперсфере Σ_ε, будем иметь

$$H_Q - H_M > \mu. \tag{3}$$

Выберем теперь какое-нибудь положительное число $\mu' < \mu$ и заметим, что вследствие непрерывности H относительно своих $2n$ аргументов наверное будет существовать некоторая гиперсфера Σ_η с центром в M и радиусом η, достаточно малым для того, чтобы *во всякой точке* P_0 гиперсферы Σ_η или внутри нее имело место соотношение

$$H_{P_0} - H_M \leq \mu'. \tag{4}$$

Далее, поверхность Σ_η есть как раз гиперсфера, фигурирующая в нашем динамическом критерии устойчивости; действительно, если возмущенное начальное состояние представляется точкой P_0, не внешней для Σ_η, благодаря чему вначале будет справедливо соотношение (4), то разность $H_P - H_M$, в силу интеграла живых сил, сохранит в течение всего движения свое начальное значение $\leqslant \mu'$. Отсюда следует, что изображающая точка P не может уже уходить из гиперсферы Σ_ε, так как, для того чтобы точка P могла уйти из этой гиперсферы, ей нужно было бы пересечь гиперсферу в некоторой точке Q, в которой разность $H_Q - H_M$ в силу неравенства (3) сделалась бы больше μ и, следовательно, больше μ'.

Таким образом, на основании динамического критерия предыдущего пункта подтверждается устойчивость состояния равновесия в M, т. е. в конфигурации C^0.

6. Покажем еще, как предыдущему доказательству теоремы Дирихле можно придать синтетическую форму, которая, требуя, при строгом ее проведении, логических рассуждений, эквивалентных только что изложенным, делает доказательство непосредственно наглядным.

Рассмотрим в пространстве A_{2n} состояний движения гиперповерхность $H = \mathrm{const}$ (*изоэнергетическая гиперповерхность*), записывая уравнение ее в виде

$$H - H_M = c, \tag{5}$$

где c обозначает произвольную постоянную, конечно, не отрицательную вблизи от M. При $c = 0$ эта гиперповерхность сводится к точке M, изображающей состояние равновесия в конфигурации C^0; тогда при $c > 0$ и достаточно малом гиперповерхности (5) будут замкнутыми вокруг M, и при возрастании c будут следовать одна за другой таким образом, что каждая будет содержать внутри себя все предыдущие. Это логически следует из одних только предположений непрерывности H и действительного минимума в M и может быть строго доказано при помощи рассуждений, эквивалентных рассуждениям предыдущего пункта.

Теперь теорема Дирихле, благодаря этим замечаниям, оказывается совершенно наглядной. Действительно, так как имеет место интеграл живых сил, то изображающая точка P, в каком-нибудь возмущенном движении, уже не будет покидать гиперповерхность (5), на которой она находилась вначале, так что нужно только задать достаточно малым начальное возмущение, т. е. по существу постоянную c, соответствующую начальному состоянию движения P_0, чтобы точка P бесконечно долго оставалась сколь угодно близкой к M.

7. Теорема Ляпунова *). Важно отметить, что теорема Дирихле допускает следующее обращение: *если состояние равновесия M соответствует просто некоторому стационарному значению потенциала U, которое не является максимумом, и если, как это имеет место в общем случае, отсутствие максимума можно обнаружить из рассмотрения местных числовых значений вторых производных, то равновесие будет неустойчивым.*

Эту теорему, принадлежащую Ляпунову, мы не будем доказывать; мы только позволим себе указать в дальнейшем, прибегая к некоторым интуитивным соображениям, порядок рассуждений, при помощи которых можно придти к доказательству (§ 5). Здесь же, между прочим, добавим, что Ляпунов доказал также, что неустойчивость будет иметь место и в большей части исключительных случаев, когда для подтверждения отсутствия максимума оказывается необходимым обратиться к производным порядка выше второго.

---

*) Александр Михайлович Ляпунов родился 25 мая 1857 г. в Ярославле, умер 3 ноября 1918 г. в Одессе. Окончил математическое отделение физико-математического факультета Петербургского университета в 1880 г. и был оставлен своим учителем, профессором Бобылевым, при университете. В 1885 г. защитил магистерскую диссертацию на тему „Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости". В 1892 г. блестяще защитил свою докторскую диссертацию на тему „Общая задача об устойчивости движения". Был профессором Харьковского университета с 1885 по 1901 г. В 1900 г. избран членом-корреспондентом, а в 1901 г. — действительным членом Российской академии наук.

Научные труды А. М. Ляпунова охватывают многие вопросы математики и математической физики, но особенной известностью пользуются его работы по устойчивости движения и по вопросу о фигурах равновесия вращающейся жидкости. Задача об устойчивости движения, впервые поставленная Лагранжем, на протяжении ста лет решалась на основании результатов, получаемых из линейных уравнений первого приближения. Многочисленные и очень важные результаты были получены до Ляпунова Томсоном и Тэйтом, Раусом и Н. Е. Жуковским. Однако до Ляпунова никто не делал попытки обосновать законность методов, которыми эти результаты были получены, и заслуга Ляпунова заключается в том, что он впервые отчетливо сформулировал понятие устойчивости движения, разработал методы исследования, получил много весьма важных результатов в более общей форме, чем это было сделано до него, и указал условия, при которых метод малых колебаний доставляет исчерпывающее суждение об устойчивости и неустойчивости движения. Работы А. М. Ляпунова по теории устойчивости движения, доставившие ему мировую славу, ныне нашли себе применение в самых различных областях математического естествознания и техники.

О роли А. М. Ляпунова в науке и, в частности, в развитии учения об устойчивости движения см. некролог, посвященный памяти А. М. Ляпунова академиком Стекловым (в книге А. М. Ляпунова „Общая задача об устойчивости движения", ОНТИ, 1935, стр. 364—382), и некролог, посвященный памяти А. М. Ляпунова академиком А. Н. Крыловым в „Известиях Академии наук СССР" за 1930 г. Значение работ А. М. Ляпунова в развитии теории устойчивости движения подробно охарактеризовано в монографии Н. Д. Моисеева „Очерки развития теории устойчивости", 1949. *(Прим. ред.)*

Мы не будем здесь задерживаться на этом разборе, требующем знания не совсем элементарной теории дифференциальных уравнений; заметим только, что эти рассуждения об устойчивости, которые, как мы увидим в §§ 4, 5, распространяются со случая равновесия на случай движения, заставляют признать, что неустойчивость составляет правило, тогда как устойчивость является только исключением [1]).

§ 2. Смещение равновесия

8. Определение. Разберем здесь один вопрос, хотя и относящийся к чистой статике, но связанный с понятием об устойчивости с только что выясненной динамической точки зрения.

Рассмотрим, как и в предыдущем параграфе, материальную голономную систему с независимыми лагранжевыми координатами q_1, q_2, ..., q_n и допустим, что она обладает *внутренней энергией* $\Omega(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, т. е. находится под действием внутренних сил, являющихся производными от потенциала $-\Omega$, предполагаемого, как обычно, однозначным, конечным, непрерывным и дифференцируемым по крайней мере до второго порядка внутри некоторой области (гл. V, п. 34). Пусть, кроме того, C^0 есть конфигурация действительного минимума этой внутренней энергии, т. е., по теореме Дирихле (п. 5), конфигурация устойчивого равновесия для системы, если предположить, что она находится под действием только указанных выше внутренних сил. Такую конфигурацию мы будем называть *естественным положением* системы и для формальной простоты будем предполагать, что она определяется n координатами $q_h = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$.

Предположим теперь, что к системе приложены другие позиционные силы с лагранжевыми составляющими $Q_h(p)$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$. Если эти составляющие не все обращаются в нуль в положении C^0, то равновесия в естественном положении больше не будет, но возможно, что установится (например, после затухающих колебаний) состояние *смещенного равновесия* в новой конфигурации C^0, которая,

[1]) Чтобы оправдать это утверждение в отношении того, что касается состояний равновесия, ограничиваясь при этом случаем, когда о наличии или отсутствии максимума U можно вывести заключение из рассмотрения местных значений вторых производных, достаточно вспомнить, что определяющий критерий для различения устойчивости и неустойчивости состоит в том, будет или не будет определенной отрицательной квадратичная форма с n переменными, имеющая коэффициентами эти местные значения вторых производных. Из алгебры известно, что для того, чтобы такая квадратичная форма была определенной отрицательной, требуется, чтобы известные n определителей порядков n, $n-1$, ..., 1 все имели один и тот же знак; такая комбинация представляется, конечно, весьма случайной среди всех остальных возможных случаев для знаков этих определителей. О том, что относится к состояниям движения, см. Levi-Civita, Sopra alcuni criteri di instabilità, *Annali di Matematica*, т. V, 1901, стр. 221—308.

естественно, будет определяться общими уравнениями статики в лагранжевых координатах (т. I, гл. XV, п. 25)

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q_h} = Q_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

На основании предположения, что C^0 является конфигурацией равновесия при отсутствии внешних сил, должны обращаться в нуль при $q_k = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ все частные производные от Ω по q. Поэтому, предполагая внутреннюю энергию в естественном состоянии равной нулю (что равносильно соответствующему выбору несущественной аддитивной постоянной потенциала), мы будем иметь в подходящей окрестности C^0 разложение вида

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial q_h \partial q_k}\right)^0 q_h q_k + \cdots \tag{7}$$

Ограничиваясь рассмотрением случая, когда конфигурация C смещенного равновесия находится в непосредственной близости от естественного положения C^0, можно пренебречь остатком предыдущего разложения и удержать для Ω элементарное выражение, представляющее собой квадратичную форму относительно q,

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} \beta_{hk} q_h q_k, \tag{7'}$$

где для краткости положено

$$\beta_{hk} = \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial q_h \, \partial q_k}\right)^0;$$

с аналогичным приближением можно рассматривать все Q_h как постоянные, со значениями $\overset{0}{Q}_h$, которые эти постоянные имеют в естественном положении системы. Поэтому система (6), от которой зависит определение конфигурации смещенного состояния равновесия, т. е. определение приращений q_k, испытываемых лагранжевыми координатами при смещении системы из C^0 в C, в первом приближении приводится к системе n линейных неоднородных уравнений относительно q

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_{hk} q_k = \overset{0}{Q}_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{6'}$$

Эта система однозначно определяет все координаты q во всех тех случаях, когда отличен от нуля определитель

$$\| \beta_{hk} \| = \left\| \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial q_h \, \partial q_k}\right)^0 \right\|;$$

заметим, что это обстоятельство необходимо будет иметь место, когда из рассмотрения второго дифференциала можно заключить о действительном минимуме функции Ω в C^0, так как в этом случае квадратичная форма (7') будет определенной положительной и, следовательно, дискриминант ее не равен нулю.

9. Теорема взаимности. Интересное следствие из этих рассуждений мы будем иметь, предполагая, что добавочные силы сводятся к одной единственной составляющей Q по одной из q, например по q_i. Равенства (6') тогда принимают вид

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_{hk} q_k = \delta_{hi} Q \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

где δ_{hi} обозначает нуль или положительную единицу, смотря по тому, будут ли оба индекса h, i между собой различны или равны. Отсюда, предполагая $\|\beta_{hk}\| \neq 0$, применяя правило Крамера[1]) и обозначая через $\beta^{(hk)}$ величину, взаимную с β_{hk} (т. е. соответствующее алгебраическое дополнение, деленное на определитель $\|\beta_{hk}\|$), получим выражение для изменения, испытываемого любой лагранжевой координатой q_k при смещении из положения равновесия, соответствующего рассматриваемым силам,

$$q_k = Q \sum_{h=1}^{n} \beta^{(hk)} \delta_{hi} = \beta^{(ik)} Q \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Предположим теперь, что та же сила Q действует не в направлении координаты q_i, а по направлению какой-нибудь другой координаты, например q_k. В этом случае мы будем иметь другое состояние смещенного равновесия, в котором координата q_i, на основании предыдущей формулы, в предположении, что в ней k заменено через i, будет иметь величину

$$q_i = \beta^{(ki)} Q;$$

если теперь примем во внимание, что $\beta^{(hk)}$, так же как и β_{hk}, составляют симметричную матрицу, то из сравнения двух состояний равновесия получим следующую теорему взаимности[2]): *изменение, которое испытывает какая-нибудь лагранжева координата q_k, исходя из значения, соответствующего естественному положению системы, при смещении положения равновесия, происходящего от*

---

[1]) Г. Крамер (Gabriel Cramer) родился в Женеве в 1704 г., умер близ Нима в 1752 г., был профессором математики и философии в Академии наук Женевы. Знаменитое правило, носящее его имя, можно найти в Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, 4 тома, Женева, 1750.

[2]) Ср., в частности, Rayleigh, Scientific papers, Cambridge, University Press, т. I, 1901, стр. 232—237.

действия силы только в направлении какой-нибудь другой координаты q_i, тождественно с аналогичным изменением, которое испытывала бы координата q_i, если бы система подвергалась действию такой же силы только в направлении q_k.

Для иллюстрации этой теоремы в схематически наиболее простом случае рассмотрим систему с двумя степенями свободы, обладающую некоторым запасом внутренней энергии Ω. Пусть эта система осуществлена, например, посредством упругих приспособлений и притом так, что если значения соответствующих лагранжевых параметров интерпретировать как декартовы координаты x, y некоторой точки на плоскости, то внутренняя энергия такой изображающей точки получится от некоторой силы с составляющими $-\omega_1^2 x$, $-\omega_2^2 y$ и, следовательно, будет иметь вид

$$\Omega = \frac{1}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2).$$

Обращаясь теперь к этому изображению системы как точки на плоскости, представим себе силу величины F, приложенную к точке в направлении единичного вектора $\boldsymbol{u}$ с направляющими косинусами α, β, и пусть $\boldsymbol{v}$ — единичный вектор, нормальный к вектору $\boldsymbol{u}$ и ориентированный относительно него так же, как ось y ориентирована относительно оси x. Под действием этой добавочной силы точка, предполагаемая вначале в естественном положении (т. е. в начале координат), сместится и примет новое положение равновесия, определяемое равенствами

$$\omega_1^2 x = F\alpha, \qquad \omega y_2^2 = F\beta;$$

только тогда, когда добавочная сила направлена по одной из осей ($\alpha = 1$, $\beta = 0$ или $\alpha = 0$, $\beta = 1$), смещение произойдет в том же самом направлении. Теорема взаимности утверждает, что если сила F действует по направлению какого-нибудь единичного вектора $\boldsymbol{u}$, то нормальная составляющая смещения (по $\boldsymbol{v}$) будет равна соответствующей нормальной составляющей по $\boldsymbol{u}$ смещения, возникающего в том случае, если бы сила F действовала по $\boldsymbol{v}$.

Следует заметить, что та же теорема взаимности справедлива также и в случае непрерывных систем с бесконечным числом степеней свободы; очень наглядную иллюстрацию теоремы в этом случае мы получим, рассматривая упругую пластинку, закрепленную по горизонтальному контуру. Если к внутренней точке P прикладывается нагрузка, то пластинка изгибается, и любая ее точка Q испытывает некоторое вертикальное перемещение h. Если та же нагрузка будет приложена, наоборот, в Q, то точка P при соответствующем изгибе пластинки испытает, в свою очередь, вертикальное перемещение h.

10. Влияние добавочных консервативных сил и новых связей на смещение равновесия и вопросы устойчивости [1]). Возьмем снова систему п. 8, т. е. голономную систему с n степенями свободы, обладающую внутренней энергией $\Omega(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ и имеющую в конфигурации C^0 ($q_h = 0$; $h = 1, 2, \ldots, n$) свое естественное положение (действительный минимум Ω); поставим себе целью изучить смещение положения равновесия, которое испытывает система, если в дальнейшем она подвергается действию внешних сил и действию некоторого числа $l < n$ голономных, не зависящих от времени, связей

$$f_k(q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, l), \tag{8}$$

не исключая, конечно, тех частных случаев, когда будет действовать только одно из этих двух возмущающих влияний.

Чтобы иметь возможность сделать некоторые интересные выводы, удобно здесь присоединить к предыдущим гипотезам следующие дополнительные предположения качественного характера.

Допустим прежде всего, что по второму дифференциалу можно заключить о действительном минимуме энергии Ω; тогда мы нашли бы, что квадратичная форма

$$A_0 = \frac{1}{2} \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial q_h \, \partial q_k}\right)^0 q_h q_k,$$

к которой приводится в первом приближении эта энергия, является определенной положительной; если мы примем во внимание, что этот характер формы следует из некоторых неравенств, которым должны удовлетворять коэффициенты формы, то на основании непрерывности функции Ω можем заключить, что аналогичная форма A, в которой коэффициенты относятся к любой конфигурации C, близкой к C^0, останется определенной положительной в подходящей окрестности этого естественного положения.

С другой стороны, рассмотрим потенциал $U(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, производными от которого являются добавочные силы. Предположим, что, помимо обычных условий однозначности, конечности, непрерывности и дифференцируемости до второго порядка, потенциал имеет еще и то свойство, что его вторые производные остаются в окрестности конфигурации C^0 *достаточно малыми* по абсолютной величине. Так как эти вторые производные суть не что иное, как производные от лагранжевых составляющих $\frac{\partial U}{\partial q_h}$ добавочных сил, то предыдущее предположение равносильно допущению, что поле силы, в которое предполагается помещенной наша система,

[1]) Levi-Civita, Sullo spostamento dell'equilibrio, *Atti del R. Ist. Ven.*, т. 71, ч. II, 1911—1912, стр. 241—249.

в окрестности естественного положения C^0 системы является *почти однородным*.

Если, далее, построим квадратичную форму B от переменных q, имеющих коэффициентами вторые производные от U (вычисленные в любой конфигурации C), то из только что указанного предположения, очевидно, будет следовать, что, вычитая B из аналогичной формы A, мы получим форму $A-B$, которая наравне с первоначальной формой A остается определенной положительной, по крайней мере в некоторой окрестности I естественного положения C^0.

Перейдем теперь к отысканию смещения равновесия, являющегося следствием совместного действия силового поля с потенциалом U и связей (8). Для этой цели достаточно обратиться к общему уравнению статики (т. I, гл. XV, п. 9), на основании которого для равновесия необходимо и достаточно, чтобы при любом перемещении δq_h, совместимом со связями (8), исчезал первый дифференциал от $\Omega - U$

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial(\Omega - U)}{\partial q_h} \delta q_h. \tag{9}$$

Если введем множители Лагранжа, то придем (т. I, гл. XV, § 7) к n уравнениям

$$\frac{\partial(\Omega - U)}{\partial q_h} + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_h} = 0 \qquad (h = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{10}$$

образующим совместно с уравнениями (8) дополнительных связей систему, из которой достаточно исключить множители λ, чтобы получить уравнения относительно q, определяющие возможную конфигурацию C смещенного равновесия.

Не будем останавливаться здесь на разборе условий существования и единственности такой конфигурации. Допустим, что такая конфигурация существует и, более того, принадлежит к той окрестности I естественного положения системы, которую мы определили немного выше, и исследуем ее устойчивость.

Для того чтобы равновесие, смещенное к конфигурации C, определяемой уравнениями (8), (10), было устойчивым, достаточно, чтобы функция $\Omega - U$ имела в C действительный минимум по отношению к другим конфигурациям, совместимым со связями; это будет обеспечено, если будет существенно положительным второй дифференциал от $\Omega - U$, вычисленный, принимая во внимание уравнения (8). Если продифференцируем первый дефференциал (9) и примем во внимание, что нельзя прямо положить $\delta^2 q_h = 0$, так как

q надо рассматривать не как вполне независимые переменные, а как связанные уравнениями (8), то в первом приближении получим

$$\delta^2(\Omega - U) = A - B + \alpha;$$

здесь в квадратичной форме $A - B$ аргументами являются приращения δq, а коэффициентами — вторые производные от $\Omega - U$, вычисленные в конфигурации C, и для простоты положено

$$\alpha = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial(\Omega - U)}{\partial q_h} \delta^2 q_h,$$

т. е. через α обозначен член, происходящий от добавочных связей. Если представим себе, что посредством l уравнений (8) связей исключено столько же переменных q или, более общим образом, если все переменные q выражены через $n - l = \nu$ независимых лагранжевых параметров $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$, то A, B, α станут тремя квадратичными формами от ν аргументов (оставшихся независимыми δq или произвольных приращений δr). Но в то время как форма $A - B$, которая была существенно положительной в n переменных δq, рассматривавшихся как независимые, очевидно, останется такой же и после только что указанного приведения числа ее степеней свободы к меньшему, о добавочном члене α, наоборот, ничего нельзя сказать заранее, так как, вообще говоря, остается сомнительным, будет ли смещенное равновесие устойчивым или неустойчивым; напротив, мы увидим на одном примере в ближайшем пункте, что может представиться как та, так и другая возможность.

Однако предыдущие рассуждения прямо приводят к определению одного случая, в котором устойчивость смещенного равновесия оказывается обеспеченной; это именно будет тот случай, когда вместе с исчезновением всех $\delta^2 q_h$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ исчезает и член α, так что $\delta^2(\Omega - U)$ приводится к определенной квадратичной форме $A - B$.

Это, в частности, будет иметь место, если добавочные связи (8) представляются линейными уравнениями (даже и неоднородными) относительно q, потому что такими же будут и выражения l координат q из них через остальные $n - l = \nu$; если исчезают вторые дифференциалы этих последних ν независимых переменных q, то исчезают также и вторые дифференциалы первых l переменных, которые являются линейными функциями от остальных.

Таким образом, мы пришли к следующей теореме: *состояние равновесия, принимаемое системой вблизи ее конфигурации минимума внутренней энергии, при одновременном действии почти однородного силового поля и линейных связей, будет всегда устойчивым.*

Частный тип линейных связей (вообще говоря, неоднородных), мы будем иметь, давая определенные значения некоторым из координат q, например первым l, что равносильно заданию l из n элементарных перемещений, переводящих систему из конфигурации C^* в ту, которая будет новой конфигурацией равновесия.

Если внешние силы не действуют ($U = \text{const}$), то мы можем утверждать, что (наравне с $\Omega - U$) *внутренняя энергия* Ω *в конфигурации* C, *в которой снова устанавливается равновесие, если* l *элементарных перемещений заданы наперед, имеет минимум по сравнению со всеми другими конфигурациями, возможными при произвольных* $(n - l)$ *элементарных перемещениях.*

11. Пример. Для иллюстрации предыдущих общих рассуждений обратимся к случаю, уже указанному в п. 9, системы с двумя степенями свободы, изображаемой посредством одной точки P, движущейся по плоскости; уточним допущенные там предположения, полагая, что сила, от которой происходит внутренняя энергия, является типичной восстанавливающей силой, притягивающей точку к началу O, с компонентами $-\omega^2 x$ $-\omega^2 y$, так что имеем

$$\Omega = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2).$$

Здесь, при отсутствии связей и других сил, точка O есть положение устойчивого равновесия.

Рассмотрим смещение равновесия, которое определится в случае, когда при отсутствии внешних сил ($U = \text{const}$) вводится связь; сначала речь будет идти о линейной связи, т. е. точка P вынуждена будет оставаться на прямой (не проходящей через O). Основание M перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую, очевидно, представляет новое положение равновесия; и так как из всех точек прямой M является ближайшей к O, то внутренняя энергия Ω принимает в ней минимальное значение по сравнению со всеми положениями, совместимыми со связью, и равновесие будет все еще устойчивым.

Наоборот, в общем случае, когда точка P вынуждена оставаться на какой-нибудь линии L (отличной от прямой), легко видеть, что смещенное равновесие может оказаться неустойчивым.

Чтобы составить себе наглядное представление, начнем с произвольного закрепления точки M (отличной от O) и обозначим через γ окружность с центром в O, проходящую через M; возьмем кривую L, касательную к γ в точке M, и предположим, единственно с целью сократить рассуждения, что радиус кривизны кривой L в точке M будет отличен от OM; это равносильно допущению, что в непосредственной близости от M кривая L является целиком внешней или целиком внутренней по отношению к окружности γ.

Как в том, так и в другом случае точка M будет точкой положения равновесия; но тогда как в первом случае это равновесие, очевидно, будет устойчивым (как и в случае прямой), наоборот, во втором случае оно будет неустойчивым, даже если смещение будет очень малым, т. е. если точка M будет сколь угодно близка к точке O.

Наконец, к тому же заключению мы придем также и аналитическим путем, применяя общий критерий предыдущего пункта. В самом деле, представим себе, что уравнение связи выражает y как функцию от x (правильную в окрестности начала) в виде

$$y = a + bx + cx^2 + \ldots,$$

при постоянных a, b, c, ... Отсюда получим

$$\delta y = (b + 2cx + \ldots)\,\delta x, \qquad \delta^2 y = (2c + \ldots)\,\delta x^2,$$

где опущенные члены содержат по крайней мере x^2 в выражении δy и, следовательно, по крайней мере x в выражении $\delta^2 y$; поэтому квадратичная форма, которая должна быть рассмотрена, будет определена, по крайней мере до членов, содержащих множителем x, посредством равенства

$$\delta^2\Omega = \omega^2(\delta x^2 + \delta y^2 + y\delta^2 y) = \omega^2(1 + b^2 + ac + \ldots)\,\delta x^2.$$

Поэтому, если допустить, что смещение равновесия является достаточно малым (и, следовательно, такой же будет абсцисса x нового положения равновесия), то критерий для решения вопроса об устойчивости или неустойчивости будет даваться знаком трехчлена $1 + b^2 + ac$. Для линейной связи c равно нулю, и, следовательно, мы будем иметь устойчивость, каково бы ни было значение a (а не только значение b); тогда как, наоборот, в общем случае, как бы ни было мало a, т. е. как бы близко от начала ни проходила кривая L, всегда можно приписать коэффициенту c такие значения, что трехчлен будет отрицательным и, следовательно, смещенное положение равновесия будет неустойчивым.

§ 3. Малые колебания голономной системы в окрестности одной из ее конфигураций устойчивого равновесия

12. Приведение двух квадратичных форм к каноническому виду. Начнем с повторения следующей теоремы из алгебры *). Пусть даны две квадратичные формы с n переменными

$$A = \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} a_{hk} z_h z_k, \qquad B = \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} \beta_{hk} z_h z_k;$$

*) См., например, Бохер М., Введение в высшую алгебру, 1933; Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 1946; Окунев А. Я., Высшая алгебра, 1949. (*Прим. ред.*)

обозначая через ρ некоторый параметр, рассмотрим алгебраическое уравнение степени n относительно ρ

$$\| \beta_{hk} - \rho\alpha_{hk} \| = 0, \tag{11}$$

которое получается, если мы приравняем нулю дискриминант квадратичной формы $\mathrm{B} - \rho\mathrm{A}$. Если форма A является определенной положительной, то корни этого уравнения все будут действительными (не необходимо различными); обозначим эти корни через ρ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Существует по крайней мере одно линейное преобразование (не вырожденное) с действительными коэффициентами, посредством которого можно представить z_h в виде некоторых линейных однородных комбинаций n таких новых переменных x_i, что обе данные формы примут соответственно вид:

$$\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \qquad \mathrm{B} = \sum_{i=1}^{n} \rho_i x_i^2.$$

13. Нормальные координаты. Главные колебания и главные частоты. После этого отступления обратимся, как в п. 4, к голономной системе S с n степенями свободы, находящейся под действием консервативных сил с потенциалом U, и рассмотрим конфигурацию C^0 устойчивого равновесия, предполагая, что действительный максимум функции U в C^0 будет общего типа, т. е. о его существовании можно судить на основании рассмотрения местных значений одних только вторых производных функций U.

Мы знаем, что если это состояние равновесия возмущено достаточно мало, то система благодаря устойчивости равновесия в C^0 будет двигаться неопределенно долго в непосредственной близости от этой конфигурации; изучим здесь характер этого движения.

Можно предположить прежде всего, что аддитивная постоянная выбрана так, чтобы потенциал U в C^0 был равен нулю. С другой стороны, вследствие предположения о равновесии (или о максимуме функции U), будут равны нулю также и все первые производные от потенциала; поэтому, разлагая эту функцию по формуле Тэйлора в окрестности конфигурации C^0 и полагая для краткости

$$q_h - q_h^0 = z_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

будем иметь

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\substack{h=1 \\ k=1}}^{n} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k} \right)^0 z_h z_k + \ldots$$

Во всяком движении, достаточно близком к состоянию равновесия, z_h вместе с их производными $\dot{q}_h$ останутся сколь угодно малыми, так что в силу этого в предыдущем разложении функции U можно пренебречь, по сравнению с написанными членами второго порядка относительно z, всеми опущенными членами, которые будут более высокого порядка; аналогично и в выражении живой силы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\substack{h=1 \\ k=1}}^{n} a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k$$

вместо коэффициентов a_{hk}, зависящих исключительно от q, можно подставить числовые значения $a^0{}_{hk}$, соответствующие конфигурации равновесия C^0, и написать

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\substack{h=1 \\ k=1}} a^0{}_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k. \tag{12}$$

Полагая временно

$$a^0{}_{hk} = \alpha_{hk}, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k}\right)^0 = \beta_{hk},$$

рассмотрим две квадратичные формы:

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{h=1 \\ k=1}}^{n} \alpha_{hk} z_h z_k, \quad \frac{1}{2} \sum_{\substack{h=1 \\ k=1}}^{n} \beta_{hk} z_h z_k, \tag{13}$$

первая из которых, как и живая сила, из которой она получается путем подстановки z вместо $\dot{q}$, является определенной положительной. Поэтому существует (предыдущий пункт) по крайней мере одно невырожденное линейное однородное преобразование, в результате которого переменные z_h заменяются линейными однородными функциями с постоянными действительными коэффициентами от новых n переменных x_i, после чего две формы (13) соответственно перейдут в следующие:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \rho_i x_i^2, \tag{13'}$$

где ρ_i суть действительные постоянные. Так как мы допускаем, что максимум функции U — общего типа, то можем прибавить, что вторая из форм (13), вследствие самого ее происхождения, и, следовательно, вторая из форм (13') является *определенной отрицательной*, так что все ρ_i *будут необходимо отрицательными.*

Положив теперь

$$\rho_i = -\omega_i^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

заключаем, что потенциал U в окрестности C^0, по крайней мере с точностью до членов порядка выше второго, принимает вид

$$U = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 x_i^2. \tag{14}$$

Что касается живой силы, то заметим, что вследствие предположения $z_h = q_h - q_h^0$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ и благодаря постоянным значениям коэффициентов линейного преобразования переменных z к переменным x то же преобразование дает переход от $\dot{q}$ к $\dot{x}$, так что тем же самым способом, каким первая из форм (13) преобразуется в первую из форм (13'), выражение (12) живой силы преобразуется в следующее:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i^2. \tag{15}$$

Это выражение и будет представлять, по крайней мере до членов порядка выше второго, живую силу нашей системы для состояния движения, близкого к состоянию равновесия в C^0.

Переменные x_i, для которых потенциал и живая сила системы вблизи состояния устойчивого равновесия принимают соответственно формы (14), (15), называются нормальными координатами (относительно этого состояния равновесия).

Далее, в этих нормальных координатах функция Лагранжа рассматриваемого нами движения определится равенством (предыдущая глава, п. 40)

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (\dot{x}_i^2 - \omega_i^2 x_i^2),$$

так что соответствующие уравнения Лагранжа будут иметь вид

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, мы видим, что во всяком движении голономной системы (со связями без трения) в непосредственной близости от конфигурации устойчивого равновесия (общего типа) каждая из нормальных координат x_i изменяется по гармоническому закону.

Приписав индексу i какое-нибудь одно из значений от 1 до n, рассмотрим то частное колебательное движение системы, в котором x_i изменяется гармонически с частотой $\omega_i/2\pi$, в то время как остальные $n-1$ нормальных координат x_j (при $j \gtrless i$) остаются постоянно равными нулю. Эти n простых гармонических независимых колебаний, определенных в соответствии с n значениями индекса i, называются *главными колебаниями*. Очевидно, что наиболее общее колебательное движение системы в окрестности конфигурации рассматриваемого устойчивого равновесия можно представить себе получающимся посредством наложения или *сложения* этих n главных колебаний. Следовательно, нормальное выражение (15) для T показывает, что живая сила колебаний в общем случае равна сумме живых сил составляющих главных колебаний.

Частоты $\frac{\omega_i}{2\pi}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ этих составляющих колебаний называются *главными*; самая низшая частота (т. е. та, которая дает самый низкий звук, если колебание соответствует акустическому явлению) носит название ***основной частоты или основного тона***, тогда как другие, расположенные в возрастающем порядке, называются соответственно ***первой, второй, ... гармониками*** системы.

Полученные результаты оправдывают в этом случае то общее замечание (т. I, гл. II, п. 34), что все явления незатухающего колебательного характера по существу можно анализировать посредством независимых гармонических движений.

Естественно, что после того, как получено общее решение уравнений малых колебаний в нормальных координатах в виде

$$x_i = r_i \cos(\omega_i t + \theta_i^0) \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

где r_i и θ_i^0 обозначают $2n$ постоянных интеграции (из которых первые n во всех случаях можно предполагать положительными), надо возвратиться к выражениям того же общего решения в первоначальных координатах q, принимая во внимание линейную подстановку, связывающую эти q с x. Если такая подстановка определяется равенствами

$$q_h = q_h^0 + \sum_{i=1}^{n} \gamma_{hi} x_i \qquad (h=1, 2, \ldots, n),$$

то непосредственно находим

$$q_h = q_h^0 + \sum_{i=1}^{n} \gamma_{hi} r_i \cos(\omega_i t + \theta_i^0) \qquad (h=1, 2, \ldots, n),$$

где q^0 и γ суть вполне определенные постоянные, зависящие от природы колеблющейся системы, а r и θ — постоянные интегрирования.

Для приложений важно заметить, что не всегда удобно приводить живую силу и потенциал к каноническим формам (14), (15), но весьма существенно, чтобы в выражениях T и U исчезали все члены с произведениями координат, т. е. чтобы T и U были приведены к виду

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i \dot{y}_i^2, \qquad U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i y_i^2.$$

В этом случае главные частоты определяются из соотношений

$$\omega_i^2 = -\frac{b_i}{a_i} \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

что можно видеть непосредственно или составляя соответствующие уравнения Лагранжа $a_i\ddot{y}_i - b_iy_i = 0$, или представляя себе, что не y_i, а $y_i/\sqrt{a_i}$ являются нормальными координатами. Общее решение уравнений малых колебаний и в координатах y_i приводит для каждой из них к гармоническому движению; по этой причине иногда также называют ***нормальными*** такие координаты, которые, как y_i, придают T и U одновременно ортогональную форму.

14. Вынужденные колебания. Как и в случае системы с одной степенью свободы (гл. I, п. 59), обычно называют ***вынужденными колебаниями*** какой-нибудь голономной системы в окрестности конфигурации устойчивого равновесия колебания, определяющиеся совместным действием консервативных сил, к которым относится состояние равновесия, и добавочных сил, например периодических.

Оставляя рассмотрение общего вопроса для упражнений (см., в частности, упражнения 19 и 20), ограничимся здесь утверждением, что мы встретимся с явлениями, аналогичными тем, которые были изучены в случае задач одного измерения (периоды вынужденных колебаний, затухания колебаний, резонанс и т. д.). Естественно, мы встретим более разнообразные случаи, а формальные выкладки, по необходимости, будут более пространными [1]).

Можно прибавить еще, что так как мы ограничились наложением на консервативные силы только периодически действующих сил (функций только времени), то мы получим случай, аналогичный тому идеальному случаю незатухающих колебаний, которым мы занимались, в предположении только одной степени свободы, в п. 64 гл. I.

15. Теоремы Рэлея. Рэлей [2]) исследовал, как изменяются главные частоты в материальной системе, колеблющейся вокруг одной из своих конфигураций устойчивого равновесия, и, в частности, как изменяется основная частота, когда:

а) накладываются новые связи (само собой разумеется, так, чтобы не исключалась конфигурация рассматриваемого равновесия);

б) увеличиваются массы, составляющие систему;

---

[1]) См., например, Рэлей, Теория звука, 1941, т. I, гл. IV, V.

[2]) Рэлей (J. W. Strutt) родился в Лангфорд Грове (Эссекс) в 1842 г., умер в Витгеме в 1919 г. В 1879 г. заместил Максвелла по кафедре физики в Кембридже и в 1887 г. перешел в Королевский институт в Лондоне. Один из крупнейших английских физиков. Особенно известны его труды по оптике и акустике. Его многочисленные работы охватывают все математическое естествознание — от математики до химии. Вспомним, например, его исследования по гидродинамике, по капиллярности, по статистической механике, труды по электрометрологии, объяснение окраски неба, открытие вместе с Рамзеем аргона. Его сочинения собраны в семи томах.

в) увеличивается потенциальная энергия — U.

В случае „б“ можно в более общем смысле говорить о том, что увеличивается инерция системы. Что же касается предположения „в“, то его можно выразить также, говоря, что увеличивается емкость системы по отношению к энергии *). Чтобы дать себе отчет в этом способе выражения, вспомним, что в окрестности конфигурации C^0 устойчивого равновесия работа

$$L_{CC'} = U_{C'} - U_C,$$

которую совершают действующие силы, когда система переходит из одной определенной конфигурации C в любую другую C', достигает своего максимума тогда и только тогда, когда конфигурация C' совпадает с C^0; это максимальное значение определяется равенством

$$L_{CC^0} = U_{C^0} - U_C.$$

Поэтому достаточно представить себе, что мы можем распорядиться аддитивной произвольной постоянной так, чтобы $U_{C^0} = 0$, чтобы убедиться, что потенциальная энергия $-U_C$, вычисленная в любой конфигурации C (в окрестности C^0), измеряет *максимум работы*, которую *способна* совершить система, исходя из этой конфигурации.

Рассмотрим сначала случай „а“; чтобы сделать изучение более простым, обратимся к геометрическому представлению, рассматривая нормальные координаты $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, как декартовы прямоугольные координаты линейного пространства n измерений S_n. В этом пространстве эквипотенциальные поверхности

$$-2U = \sum_{=1}^{n} \omega_i^2 x_i^2 = \text{const}$$

составляют семейство эллипсоидов, гомотетичных между собой относительно общего центра O; рассмотрим ту из этих поверхностей, уравнение которой имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i^2}{4\pi^2} x_i^2 = 1,$$

т. е. эллипсоид E, имеющий полуосями периоды $2\pi/\omega_i$ (обратные частотам) главных колебаний. Если представим себе, что индексы приписываются различным частотам так, чтобы

$$\omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \ldots \leqslant \omega_n,$$

*) Или, как еще можно сказать, увеличивается „жесткость“ системы. (*Прим. ред.*)

т. е. таким образом, чтобы $\omega_1/2\pi$ являлась основной частотой и $\omega_2/2\pi$, $\omega_3/2\pi$, ... составляли соответственно первую, вторую, ... гармоники, то максимальное расстояние точек поверхности E от центра определяется, как известно, основным периодом $2\pi/\omega_1$. Условившись в этом, допустим, согласно предположению „а", что увеличивается число связей системы наложением $p < n$ новых голономных связей, которые, естественно, удовлетворяются в конфигурации равновесия C^0 ($x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$). В непосредственной близости от C^0 и в принятом нами порядке приближения эти связи, выраженные в нормальных координатах, будут представлены p линейными независимыми уравнениями, обязательно однородными, так как эти уравнения должны удовлетворяться величинами $x_i = 0$. В пространстве S_n эти p уравнений определяют линейное пространство $n - p$ измерений S_{n-p}, проходящее через O, так что, в то время как с самого начала возможные для системы конфигурации представлялись всеми точками (достаточно близкими к началу) пространства n измерений S_n, добавление новых p связей ограничивает изменение положения изображающей точки указанным выше пространством S_{n-p}.

Чтобы лучше уяснить это рассуждение, обратимся к случаю, доступному для непосредственного представления, $n = 3$, $p = 1$, в котором речь идет об эллипсоиде E в пространстве S_3 трех измерений, с центром в начале и имеющем полуоси $\frac{2\pi}{\omega_1} \geqslant \frac{2\pi}{\omega_2} \geqslant \frac{2\pi}{\omega_3}$; в то же время изображающее пространство новой связи сводится к плоскости S_2, проходящей через начало.

Эта плоскость пересекает эллипсоид E по некоторому эллипсу E'; новый основной период и период единственной оставшейся гармоники, после добавления последней связи, определяются соответственно максимумом и минимумом расстояния точек кривой E' от O, т. е. двумя полуосями этого эллипса. Первая теорема Рэлея представляет собой прямое истолкование того геометрического факта, что большая полуось E' всегда заключена (включая концы) между максимальной $2\pi/\omega_1$ и средней $2\pi/\omega_2$ полуосями эллипсоида E.

Чтобы убедиться в этом последнем утверждении, заметим, что, в то время как большая полуось эллипса E' не может быть больше максимальной полуоси $2\pi/\omega_1$ эллипсоида E, сечением которого является E', диаметральная плоскость S_2 всегда пересекает по некоторой прямой главную плоскость x_1x_2 двух полуосей максимальной $2\pi/\omega_1$ и средней $2\pi/\omega_2$ эллипсоида E, так что полудиаметр эллипса E', лежащий на этой прямой (и, следовательно, тем более его большая полуось), не может оказаться меньше $2\pi/\omega_2$. Важно добавить, что оба крайние значения $2\pi/\omega_1$ и $2\pi/\omega_2$ большой полуоси E' действительно могут быть достигнуты при подходящем выборе секущей плоскости S_2 (т. е., механически, новой связи); первое значение будет достигнуто всякий раз, когда плоскость S_2 пройдет через наибольшую полуось эллипсоида E, второе — всякий раз, когда S_2 пройдет через среднюю полуось и будет лежать внутри того двугранного угла, образованного двумя диаметральными плоскостями круговых сечений эллипсоида E, который содержит малую полуось.

Аналогичным образом рассуждают и в общем случае $p < n$ новых связей, наложенных на колеблющуюся материальную систему с n степенями свободы. Здесь изображающее пространство S_{n-p} новой системы связей пересекает эллипсоид E по эллипсоиду E' ($n-p-1$ измерений), имеющему $n-p$ главных полуосей (периоды нового основного тона и $n-p-1$ оставшихся гармоник). Максимальная полуось E' (период нового основного тона) не может, очевидно, превосходить максимальную полуось $2\pi/\omega_1$ эллипсоида E, тогда как, с другой стороны, S_{n-p} пересекает всегда главное пространство S_{p+1} $p+1$ измерений $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$, определенное первыми $p+1$ полуосями $\frac{2\pi}{\omega_1} \geqslant \frac{2\pi}{\omega_2} \geqslant \ldots \geqslant \frac{2\pi}{\omega_{p+1}}$ эллипсоида E, по диаметральной прямой эллипсоида E', а длина соответствующего полудиаметра (и, следовательно, тем более максимальная полуось эллипсоида E') не может быть меньше $2\pi/\omega_{p+1}$.

Если примем во внимание, что оба крайних значения $2\pi/\omega_1$ и $2\pi/\omega_{p+1}$ максимальной полуоси могут быть действительно достигнуты путем надлежащего выбора секущего пространства S_{n-p} (т. е. пространства новых связей), то придем, беря частоты вместо периодов, *к первой теореме Рэлея*:

В материальной системе с n степенями свободы, колеблющейся около конфигурации устойчивого равновесия, добавление $p < n$ голономных связей, не будучи в состоянии понизить основной тон, не может и поднять его выше частоты $\frac{\omega_{p+1}}{2\pi}$, принадлежащей $(p+1)$-ой гармонике.

Прибавим к этому, что геометрическое рассмотрение, аналогичное только что изложенному, позволяет видеть, что *из других $n-p-1$ главных частот (или гармоник) новой колеблющейся системы γ-ая, при $\gamma \leqslant n-p-1$, будет всегда заключена (включая концы) между $\frac{\omega_{\gamma+1}}{2\pi}$ и $\frac{\omega_{\gamma+p+1}}{2\pi}$.*

Перейдем теперь к случаям „б" и „в", которые можно рассматривать почти одновременно. Здесь опять удобно обратиться к алгебраическим соображениям п. 12 и вспомнить, что когда имеются две квадратичные формы А и В от n переменных z_h ($h=1, 2, \ldots, n$), из которых А — определенная положительная, то отношение В/А, как бы ни изменялись z, за исключением $z_h=0$, остается всегда заключенным между наибольшим и наименьшим из корней уравнения (11) [1]. Если теперь представим себе, что A увеличивается в том смысле, что она заменяется формой A' с коэффициентами, измененными так, что соответственно одним и тем же значениям (не равным нулю одновременно) переменных всегда имеем $A' > A$, то очевидно, что как максимум, так и минимум отношения B/A могут только уменьшиться; и, наоборот, они могут только увеличиться, если увеличивается B.

Отождествим теперь, как в п. 13, форму A с живой силой T колеблющейся системы (за исключением только замены переменных $\dot{x}$ через x), а форму B — с потенциальной энергией — U; вследствие этого корни уравнения (11) можно отождествить с $\rho_i = -\omega_i^2$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Если у всех материальных точек системы или даже только у некоторых из них возрастает масса, то увеличится, при прочих равных условиях, $A = T$ в смысле, разъясненном выше, так

[1]) Так как речь идет о хорошо известной теореме, не бесполезно напомнить ее доказательство. Представим себе, что вместо первоначальных переменных z подставлены те их линейные комбинации x, которые мы назвали нормальными координатами (пп. 13, 14) и в которых обе квадратичные формы принимают канонический вид

$$A = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \qquad B = \sum_{i=1}^{n} \rho_i x_i^2,$$

где ρ_i обозначают корни уравнения (11); введем отношения

$$\alpha_i = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

представляющие собой обычное обобщение, для n переменных, направляющих косинусов ориентированной прямой, для которых существует тождество

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1.$$

Тогда будем иметь

$$\frac{B}{A} = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \alpha_i^2,$$

или, принимая во внимание только что упомянутое тождество

$$\frac{B}{A} = \rho_1^2 + \sum_{i=1}^{n} (\rho_i - \rho_1) \alpha_i^2 = \rho_n^2 - \sum_{i=1}^{n} (\rho_n - \rho_i) \alpha_i^2;$$

отсюда непосредственно следует, что если ρ_1, ρ_n суть соответственно минимум и максимум ρ_i, то

$$\rho_1 \leq \frac{B}{A} \leq \rho_n.$$

что мы будем иметь теорему Рэлея: *увеличение инерции в колеблющейся системе может только уменьшить ее основную частоту и частоту последней гармоники.*

Этому предложению можно дать более общую форму, так как тот же самый эффект от увеличения инерции распространяется и на всякую другую из остальных главных частот.

Это выводится из естественного обобщения только что использованного алгебраического замечания, в силу которого, обращаясь к геометрическому рассмотрению, изложенному в начале этого пункта, мы увидим, что также и промежуточные корни уравнения (11) приобретают характер абсолютных максимумов после введения $1, 2, \ldots, n-2$ связей.

Наоборот, если представим себе, что увеличивается потенциальная энергия $B = -V$, то можно заключить, что *увеличение емкости системы по отношению к энергии* *) *повышает или, по крайней мере, не понижает отдельных главных частот колеблющейся системы.*

§ 4. Устойчивые решения системы дифференциальных уравнений

16. Безусловная устойчивость или устойчивость по Дирихле. Как уже указывалось в п. 7, мы предполагаем распространить здесь понятие об устойчивости со случая состояний равновесия (§ 1) на случай явлений движения. При этом для более широкой применимости результатов рассмотрим вопрос в наиболее общей и абстрактной форме.

Предположим, что данный процесс определяется в любой момент посредством известного числа n произвольных и независимых параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$; пусть эти параметры имеют геометрическую, кинематическую или другую, более свойственную данному процессу природу [5]. Предположим далее, что закон, по которому эти параметры изменяются с временем, определяется известной нормальной системой дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx_h}{dt} = X_h(x|t) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \qquad (16)$$

где X_h в правой части обозначают n известных функций от аргументов x и t, обладающих всеми теми свойствами непрерывности и правильности, которые в состоянии обеспечить для системы (16), по крайней мере в некоторой области, существование и единственность решений, удовлетворяющих произвольно заданным начальным условиям.

*) Увеличение „жесткости“ системы. (*Прим. ред.*)

Обратимся здесь, так же как и в предыдущем пункте, к геометрическому представлению, рассматривая переменные как прямоугольные декартовы координаты в n-мерном пространстве S_n; как и в п. 2, назовем „отклонением" двух точек x', x'' максимум абсолютных величин $|x'_h - x''_h|$ разностей одноименных координат.

В этом пространстве S_n всякое частное решение σ

$$x_h = x_h(t) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

системы (16), т. е. всякое частное явление, определяемое этим элементарным законом, будет представлено одной определенной *интегральной кривой*; в силу упомянутых выше теорем существования и единственности, через всякую точку P_0 пространства S_n (или, по крайней мере, через всякую точку той области, в которой функции X_h удовлетворяют условию правильности), принятую за начальную, проходит одна и только одна такая кривая, так что пространство S_n (или указанная выше область) будет покрыто системой ∞^{n-1} (или конгруэнцией) интегральных кривых — изображений различных явлений, определяемых уравнениями (16).

Иногда приходится фиксировать внимание на частном решении $\bar{\sigma}$, определяемом некоторыми начальными значениями $x_h = \bar{x}_h^0$ координат при $t = t_0$, и сравнивать его с решениями σ, которые вначале близки к $\bar{\sigma}$. Если удастся установить, что все решения σ, которые получаются в результате небольшого начального возмущения, остаются при безграничном возрастании времени в непосредственной близости к $\bar{\sigma}$, то можно сказать, что общий ход явления, описываемый уравнениями (16), характеризуется одним только решением $\bar{\sigma}$, по крайней мере для некоторой области начальных данных. Решение $\bar{\sigma}$, однако, не будет характеризовать в этом смысле ход явления, если, при самом незначительном начальном возмущении, решение σ с возрастанием времени в конце концов будет значительно отличаться от $\bar{\sigma}$.

Все это оправдывает разделение решений системы дифференциальных уравнений (16) на *устойчивые* и *неустойчивые* на основании критерия, который мы здесь уточним, высказав его прямо в геометрически-кинематической форме. Частное решение (или интегральная кривая) уравнений (16), которое в момент $t = t_0$, принятый за начальный, проходит через точку $\bar{P}_0(\bar{x}_0)$, называется *устойчивым*, если для всякого сколь угодно малого положительного числа ε можно указать такое другое положительное число η, что если взять за начальную какую-нибудь другую точку $P_0(x_0)$, отклонение которой от $\bar{P}_0$ меньше η, то отклонение точек $\bar{P}$ и P друг от друга на кривых $\bar{\sigma}$ и σ для одного и того же момента времени будет неопределенно долго оставаться меньшим ε.

Для избежания недоразумений необходимо лучше выяснить смысл и свойства этого последнего условия, заключающегося в том, что отклонение точек $\bar{P}$ и P друг от друга остается *неопределенно долго* меньше ε. Если ограничиться сравнением решений $\bar{\sigma}$ и σ в промежутке времени T, хотя и большом, но вполне определенном, то всегда возможно (в тех условиях, в которых теоремы существования общих интегралов, имеющие силу при каком-нибудь t, обеспечивают им непрерывность в отношении произвольных постоянных) при всяком ε поставить ему в соответствие начальное отклонение η, достаточно малое, для того чтобы во всяком интервале времени от t_0 до t_0+T отклонение между точками в один и тот же момент времени оставалось меньше ε. Может, однако, случиться, что когда заставляют T возрастать до бесконечности, η будет стремиться к нулю (при всяком ε, заданном достаточно малым). Решение $\bar{\sigma}$ называется устойчивым, когда эта возможность исключена.

В ближайших главах мы дадим различные простые и наглядные примеры устойчивости движения.

Заметим, между прочим, что в динамических случаях, когда мы имеем голономные системы со связями, не зависящими от времени, находящиеся под действием консервативных (или даже только позиционных) сил, уравнения движения остаются неизменными при замене t на $-t$, т. е. все движения *обратимы*. Поэтому в таких случаях, как и в случаях равновесия, понятие устойчивости приложимо без ограничения времени, т. е. от наиболее отдаленного прошедшего до наиболее далекого будущего (при t, изменяющемся от $-\infty$ до $+\infty$). Но, как мы увидим далее, в некоторых случаях, в частности, когда входят силы *трения*, *вязкости* или вообще так называемые *диссипативные силы* (§ 7), движения оказываются необратимыми; тогда необходимо ограничиться для каждого отдельного движения разбором *устойчивости в будущем*, т. е. только при $t \geqslant 0$.

17. Обобщенная теорема Дирихле. В связи с содержанием предыдущего пункта мы обратим здесь внимание на одно замечание, которое само по себе не имеет большого значения, однако ценно в том отношении, что лучше выясняет, при сопоставлении, сущность теоремы Дирихле для динамических задач.

Предположим, что система (16) имеет интеграл (который может зависеть явно от t)

$$H(x|t) = \text{const}$$

и что для некоторого статического решения $\bar{\sigma}$, т. е. такого решения, для которого соответствующие x_h приводятся к постоянным и, следовательно, сохраняют постоянно свои начальные значения $\bar{x}_h^0$, функция $H(x|t)$ имеет действительный максимум или минимум *при* *любом значении* t. В таком случае статическое решение $\bar{\sigma}$ *устойчиво* в том смысле, как это разъяснено в предыдущем пункте. Доказательство по смыслу тождественно с доказательством, которое мы дали теореме Дирихле в собственном смысле, поэтому мы ограничимся ссылкой на рассуждение п. 5 или, лучше, на синтетическое интуитивное рассмотрение п. 6 [6].

Остановимся немного на сопоставлении теоремы Дирихле с этим ее обобщением. Мы должны допустить здесь, что 1) $x_h = \bar{x}_h^0$ ($h = 1, 2, \ldots, n$) является решением (статическим) уравнений (16) и 2) $H(\bar{x}^0|t)$ для $H(x|t)$ есть действительный максимум или минимум, каково бы ни было t. Оба эти предположения не зависят друг от друга и в общей их сложности являются весьма ограничительными.

Наоборот, в динамическом случае (теорема Дирихле в собственном смысле) предположение о том, что уравнения движения допускают статическое решение, т. е. что для системы существует конфигурация равновесия C^0, влечет за собой количественные условия (обращение в нуль первых производных от потенциала), необходимые для существования минимума полной энергии, так что для обеспечения действительного минимума не нужны сверх только что указанных количественных условий какие-либо другие, кроме чисто качественных. Можно сказать, что, в конце концов, большая важность теоремы Дирихле зависит от этого обстоятельства, которое *вообще* не встречается в случае какой угодно обобщенной лагранжевой системы.

Здесь сказано *вообще*, потому что, как это прямо вытекает из предыдущего рассуждения, указанное выше обстоятельство представится, помимо динамического случая, также и для обобщенных лагранжевых систем, для которых $\mathfrak{L}$ не зависит от времени; мы вернемся к этому в § 1 гл. X [7].

18. Приведенная устойчивость или устойчивость по Раусу [1]**.** Обращаясь к общему учению об устойчивости, добавим некоторые замечания, имея в виду приложения, которыми мы будем заниматься в ближайших главах.

Иногда случается, что между параметрами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, определяющими в любой момент какое-нибудь явление движения, некоторые параметры, например $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ($m < n$), выделяются среди остальных по своему значению в том смысле, что они одни достаточны для определения характерных черт хода явления. Когда

[1]) Е. Дж. Раус (Edwad John Routh) родился в Квебеке (Канада) в 1831 г., умер в Кэмбридже в 1907 г. Был преподавателем и экзаминатором и вел научную работу в Кэмбридже и Лондоне. Разработал вопросы, касающиеся линейной устойчивости (в смысле, который будет указан в п. 22) в его Essay on the stability of steady motion (Cambridge, 1877), премированном Кэмбриджским университетом. Ему принадлежит введение приведенной лагранжевой функции (гл. I, пп. 45, 46), называемой поэтому некоторыми авторами *функцией Рауса*.

исследуется устойчивость движения, то, как и раньше, сравнивают частное решение $\bar{\sigma}$ с каким-либо решением σ, близким к $\bar{\sigma}$ в начальный момент; в данном случае можно ограничиться рассмотрением одновременных отклонений для $\bar{\sigma}$ и σ только этих параметров $x_1, x_2, \ldots, x_m$, не принимая во внимание остальных.

Рассмотрим, например, особенно простое движение точки по заданной траектории при заданных силах, уравнение которого

$$m\ddot{s} = f(s, \dot{s}/t)$$

можно заменить нормальной системой первого порядка

$$\frac{ds}{dt} = \dot{s}, \quad \frac{d\dot{s}}{dt} = f(s, \dot{s}|t).$$

При сравнении частного движения $\bar{\sigma}$ и любого другого движения σ, определенных предыдущей системой, иногда может представить интерес вопрос о том, будут ли оставаться близкими скорости для одного и того же момента в том и другом движении, в то время как различие в положениях точек будет иметь небольшое значение или даже вовсе может не иметь значения. Так, в частности, если речь идет о двух равномерных движениях, естественно рассмотреть одно как тип или образец другого, когда соответствующие скорости почти равны; при этом можно отвлечься от того, что координаты точек в конце концов после длительного промежутка времени будут отличаться на сколь угодно большую величину, как бы мало ни было различие скоростей (лишь бы оно не равнялось нулю).

Во всех случаях, когда, руководствуясь соображениями устойчивости, можно или желательно ограничиться при рассмотрении отклонения частью характеристических параметров, мы будем говорить, что речь идет о *приведенной устойчивости* (или неустойчивости) или об *устойчивости по Раусу*; в противоположность этому мы назовем *безусловной устойчивостью* (или неустойчивостью), или *устойчивостью по Дирихле*, устойчивость, которой мы занимались в предыдущем пункте.

Отметим, наконец, что в некоторых случаях (главным образом в тех, в которых рассмотрение приведенной устойчивости ставится природой самого вопроса) „привилегированные" параметры $x_1, x_2, \ldots, x_m$ представляются уже отделенными от остальных в дифференциальной системе (16), поскольку эту систему можно разбить на две, первая из которых будет вида

$$\frac{dx_h}{dt} = X_h(x_1, x_2, \ldots, x_m|t) \qquad (h = 1, 2, \ldots, m), \qquad (16')$$

т. е. содержит только параметры $x_1, x_2, \ldots, x_m$, а вторая

$$\frac{dx_{m+k}}{dt} = X_{m+k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-m) \qquad (16'')$$

выражает производные от $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ в функциях от всех параметров. Поэтому, когда путем интегрирования частичной системы (16′) будут найдены $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)$, дополнительную систему можно привести, в свою очередь, к системе только с $n-m$ остальными неизвестными x_{m+k} $(k=1, 2, \ldots, n-m)$.

Очевидно, что в этих случаях устойчивость (или неустойчивость) решений полной системы (16′), (16″), *приведенной к параметрам* $x_1, x_2, \ldots, x_m$, будет тождественна с безусловной устойчивостью решений частичной системы (16′) [8].

Некоторые интересные примеры на устойчивость этого типа мы встретим в ближайших главах.

§ 5. Малые колебания около устойчивого решения системы дифференциальных уравнений. Критерии неустойчивости

19. Уравнения в вариациях. Возьмем снова систему (16)

$$\frac{dx_h}{dt} = X_h(x|t) \qquad (h=1, 2, \ldots, n)$$

и рассмотрим ее устойчивое решение $\bar{\sigma}$

$$\bar{x}_h = \bar{x}_h(t) \qquad (h=1, 2, \ldots, n);$$

представим уравнения какого-нибудь другого решения σ системы (16) в виде

$$x_h = \bar{x}_h(t) + \xi_h(t) \qquad (h=1, 2, \ldots, n), \tag{17}$$

где ξ_h обозначают n новых неизвестных функций.

Из самого определения устойчивости решения $\bar{\sigma}$ (п. 16) следует, что достаточно взять для σ начальные значения x^0 переменных x, достаточно близкие к одновременным значениям $\bar{x}^0$ решения $\bar{\sigma}$ (т. е. достаточно близкие к нулю начальные значения ξ^0 неизвестных ξ), для того чтобы функции ξ оставались *неопределенно* долго меньшими по абсолютной величине некоторого наперед заданного постоянного числа ε.

Если теперь в выражениях функций X в правых частях системы (16) мы будем рассматривать t как параметр и предположим, что самые функции X могут быть разложены в ряд Тэйлора по отношению к переменным $\xi = x - \bar{x}$, то, принимая во внимание уравнения (17), будем иметь

$$X_h = (X_h)_{x=\bar{x}} + \sum_{k=1}^{n} \xi_k \left(\frac{dX_k}{dx_k}\right)_{x=\bar{x}} + R_h \qquad (h=1, 2, \ldots, n),$$

где остаточные члены R_h относительно ξ будут по меньшей мере второго порядка. Так как для всех решений σ, вначале близких к $\bar{\sigma}$, всегда имеем $\xi_k < \varepsilon$, то этими остаточными членами R_h можно будет пренебречь всякий раз, когда значение ε будет задано достаточно малым для того, чтобы можно было его рассматривать как величину первого порядка. Допуская явно это предположение и замечая, что, так как $\bar{\sigma}$ есть решение системы (16), имеем тождественно

$$\frac{d\bar{x}_h}{dt}=(X_h)_{x=\bar{x}} \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

путем подстановки выражений (17) в уравнения (16) мы убедимся, что функции для решений σ, вначале близких к устойчивому решению $\bar{\sigma}$, определятся по меньшей мере до членов, весьма малых по сравнению с ε, из системы уравнений

$$\frac{d\xi_h}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\left(\frac{\partial X_h}{\partial x_k}\right)_{x=\bar{x}} \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{18}$$

Уравнения (18) называются *уравнениями в вариациях* системы (16) по отношению к ее устойчивому решению $\bar{\sigma}$[1]).

В заключение заметим, что функции ξ, определенные из системы (18), после подстановки в решения (17), дают приближенное представление всех решений системы (16), близких к устойчивому решению $\bar{\sigma}$, справедливое для сколь угодно большого промежутка времени, если начальные значения ξ^0 выбраны достаточно малыми. Такие решения системы (16) называются *малыми колебаниями около устойчивого решения* $\bar{\sigma}$.

С аналитической точки зрения заметим, что так как $\left(\frac{\partial X_h}{\partial x_k}\right)_{x=\bar{x}}$ после вычисления будут известными функциями от одной независимой переменной t, то уравнения в вариациях (18) образуют систему из n линейных однородных уравнений относительно n неизвестных функций ξ, так что с точки зрения соответствующего интегрирования остается в силе вся известная теория этих уравнений.

20. Вывод общего интеграла уравнений в вариациях из интеграла конечных уравнений. Ограничимся здесь замечанием, что всякий раз, когда известно общее решение уравнений (16), из него можно непосредственно вывести одним только дифференцированием общее решение системы в вариациях (18).

Действительно, пусть функции

$$x_h=f_h(t\,|\,x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0) \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{19}$$

определяют общее решение системы (16), где произвольные постоянные задаются в виде начальных значений x_h^0 какого-либо решения. Решение $\bar{\sigma}$ по предположению определяется своими

[1]) Относительно тех, кто ввел в механику математическое изучение уравнений в вариациях, см. Poincaré, Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, т. I, гл. IV, Paris, 1892.

начальными значениями $x_h^0=\bar{x}_h^0$, и на основании соотношений (17) начальные значения, определяющие любое решение σ, бесконечно близкое к $\bar{\sigma}$, будут вида $\bar{x}_h^0+\xi_h^0$, где ξ_h^0 надо рассматривать как бесконечно малые. При этих значениях x_h^0 правые части уравнений (19) можно написать в виде

$$\bar{x}_h+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_h}{\partial x_k^0}\right)_{x^0=\bar{x}^0}\xi_k^0 \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

откуда, применяя еще раз формулы (17), придем к уравнениям

$$\xi_h(t)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_h}{\partial x_k^0}\right)_{x^0=\bar{x}^0}\xi_k^0 \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

которые дают общее решение линейных уравнений в вариациях в функции от независимого переменного t и начальных смещений ξ_k^0 решения σ от $\bar{\sigma}$, а также, как это естественно, от постоянных $\bar{x}_h^0$, определяющих решение $\bar{\sigma}$.

Аналогичным образом найдем, что если для уравнений (16) известно не общее решение, а только семейство решений, зависящее от $m<n$ произвольных постоянных (существенных), то из него можно вывести только дифференцированием семейство решений для уравнений в вариациях, зависящее линейно от m произвольных постоянных.

Особенно простое приложение этого замечания мы имеем в случае системы (16), правые части уравнений которой не содержат явно t; в этом случае ясно, что если $x_h=x_h(t)$ есть частное решение, то из него непосредственно выводим класс ∞^1 решений, заменяя t на $t-t_0$, где t_0 — произвольная постоянная; дифференцируя $x_h(t-t_0)$ по t_0 и опуская дифференциал $-\delta t_0$ (который здесь появляется как мультипликативная произвольная постоянная), мы получим как частное решение системы (18) уравнения

$$\xi_h=\dot{x}_h(t-t_0) \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

21. Малые колебания около статического решения. Характеристические показатели. Критерий неустойчивости. Простой и в то же время очень важный для механики случай будем иметь, когда функции X не зависят явно от t:

$$\frac{dx_h}{dt}=X_h(x) \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad (20)$$

и, кроме того, устойчивое решение $\bar{\sigma}$, около которого рассматриваются малые колебания, является статическим.

В этом предположении уравнения в вариациях (18) будут уравнениями с постоянными коэффициентами.

Полагая для краткости

$$\left(\frac{\partial X_h}{\partial x_k}\right)_{x=\bar{x}^0} = c_{hk} \qquad (h,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

приведем уравнения в вариациях к виду

$$\frac{d\xi_h}{dt} = \sum_{k=1}^{n} c_{hk}\xi_k \qquad (h = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (21)$$

Из анализа известно, что при интегрировании системы (21) следует поступать так же, как и при интегрировании линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами с одной неизвестной функцией (ср. т. I, гл. II, пп. 42—43), т. е. следует искать частные решения вида

$$\xi_h = \lambda_h e^{zt} \qquad (h = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad (22)$$

где λ_h и z обозначают постоянные, которые затем надо определить. Подставляя функции (22) в уравнения (21), мы тотчас же увидим, что для того, чтобы эти уравнения удовлетворялись, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись n уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} c_{hk}\lambda_k = z\lambda_h \qquad (h = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

которые по отношению к n неизвестным λ являются линейными и однородными; они будут совместными только тогда, когда будет равен нулю определитель из коэффициентов при λ, т. е. когда постоянная z будет корнем алгебраического уравнения n-ой степени, называемого *характеристическим уравнением* системы (21)

$$\Delta(z) \equiv \| c_{hk} - \delta_{hk} z \| = 0, \qquad (23)$$

где по обыкновению δ_{hk} обозначает единицу, если индексы h и k совпадают, и нуль, если они не совпадают. Корни z_s ($\bar{s} = 1,\ 2,\ \ldots$) этого уравнения называются *характеристическими показателями* системы (21) или, еще лучше, статического решения $\bar{\sigma}$ уравнений (20), к которым относятся уравнения в вариациях (21).

Различные между собой характеристические показатели определяют столько же решений вида (22), линейно независимых между собой, системы (21). Здесь нет необходимости останавливаться на рассмотрении того, как находятся путем алгебраических операций другие необходимые частные решения для построения основной системы в том случае, когда число этих различных между собой характеристических показателей окажется меньше n [9]; обратимся прямо к малым колебаниям около статического решения $\bar{\sigma}$.

Легко интуитивным путем прийти к заключению, что в предполагаемом здесь случае устойчивости решения $\bar{\sigma}$ характеристические показатели не могут иметь положительную действительную часть, если говорить об устойчивости в будущем.

В самом деле, предположим, что $z=\mu+i\nu$ при $\mu>0$ есть такой показатель, и пусть функции (22) представляют собой соответствующее решение уравнений (21). Постоянные λ_h наверное не все нули; с другой стороны, вместе с решением (22) система (21) вследствие того, что она является линейной, допускает в качестве решений n функций $\eta\lambda_h e^{zt}$, где η обозначает действительную произвольную постоянную; если возьмем постоянную η достаточно малой по абсолютной величине, то будем иметь решение уравнений (21), вначале сколь угодно близкое к нулю, для которого, при заданном виде показательной функции $e^{zt}=e^{\mu t}e^{i\nu t}$, по крайней мере одна из функций ξ_h (та или одна из тех, для которых $\lambda_h \gtrless 0$) возрастает при t, стремящемся к бесконечности. Заметим, что в предыдущем рассуждении мы ввели решения, которые, вообще говоря, будут комплексными. Но если мы не будем иметь $\nu=0$ (в этом последнем случае только что изложенное рассуждение относится прямо к действительному решению), то характеристическое уравнение вместе с корнем $z=\mu+i\nu$ будет допускать также и сопряженный корень $\bar{z}=\mu-i\nu$. Полагая последовательно $\lambda_h=\rho e^{i\theta}/2$, $\lambda_h=\rho e^{-i\theta}/2$, можно получить для системы (21) действительное решение

$$\eta(\xi_h+\bar{\xi}_h)=\eta\rho e^{\mu t}\cos(\nu t+\theta),$$

которое при заданном η, близком к нулю, вследствие наличия множителя $e^{\mu t}$ нельзя рассматривать как ограниченное при стремлении t к бесконечности; это решение, колеблясь около нуля, принимает сколь угодно большие значения.

Аналогичным образом, если рассмотрим только прошедшее время, то увидим, что нельзя допустить характеристических показателей с отрицательной действительной частью.

Следовательно, для того чтобы решение $\bar{\sigma}$ было устойчивым как в прошедшем, так и в будущем, необходимо, чтобы действительные части всех характеристических показателей были равны нулю. Повидимому, можно было бы думать, что предыдущим интуитивным рассуждениям можно дать совершенно строгую форму; но в действительности аналитическое исследование устойчивости до сих пор было в состоянии установить лишь более или менее косвенные результаты. А. М. Ляпунов пришел к следующему результату, формулировкой которого мы здесь ограничимся.

Для того чтобы статическое решение уравнений (20) *было устойчивым, необходимо, чтобы все его характеристические показатели были чисто мнимыми (за исключением разве лишь одного, равного нулю)* [1]).

---

[1]) Некоторые авторы полагают $z_s=iz_s'$ и называют характеристическими показателями z_s', так что необходимое условие устойчивости будет заключаться в том, чтобы характеристические показатели были все действительными (за исключением разве одного, равного нулю).

Другими словами, мы имеем следующий критерий неустойчивости:

Статическое решение уравнений (20) *будет наверное неустойчивым, если по крайней мере один из его характеристических показателей имеет действительную часть, отличную от нуля.*

Необходимо добавить, что предыдущий результат, к сожалению, вообще говоря, необратим, так как можно показать на конкретных примерах возможность статических решений со всеми характеристическими показателями чисто мнимыми и тем не менее неустойчивых [1]) [10].

22. Динамический случай. Обращение теоремы Дирихле. Оставим пока общие рассуждения предыдущих пунктов, чтобы показать, как они связываются с задачей о малых колебаниях голономной системы около некоторой конфигурации устойчивого равновесия, изученной уже нами в § 3 при помощи уравнений Лагранжа.

С этой целью начнем с указания того, как способ, изложенный в пп. 19, 21, прилагается к системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2x_h}{dt^2}=X_h(x) \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{24}$$

которая отличается от первоначальной системы (20) только тем, что в левой части вместо производных первого порядка от неизвестных функций входят производные второго порядка. Известно, что такую систему всегда можно привести к виду (20), принимая за неизвестные функции вместе с x_h также и $\dot{x}_h=dx_h/dt$ и рассматривая вместо системы второго порядка (24) эквивалентную ей систему из $2n$ уравнений первого порядка с $2n$ неизвестными функциями

$$\frac{dx_h}{dt}=\dot{x}_h, \quad \frac{d\dot{x}_h}{dt}=X_h(x) \quad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{24'}$$

Предполагая, что для системы (24) известно статическое решение $x_h=\text{const}=\bar{x}_h^0$, будем иметь для системы (24') решение, тоже статическое, $x_h=\bar{x}_h^0$, $\dot{x}_h=0$; поэтому можно образовать соответствующие этому решению уравнения в вариациях системы (24') и дальше поступать так, как указано в предыдущем пункте.

Но при заданной частной форме уравнений (24) (именно благодаря отсутствию в правых частях первых производных от x) удобнее оперировать прямо с самими уравнениями (24). Подстановка

$$x_h=\bar{x}_h^0+\xi_h \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

---

[1]) Levi-Civita, Sopra alcuni criteri di instabilità, *Ann. di Mat.*, серия 3-я, т. 5, 1901, стр. 221—308.

приводит к тому, что уравнения в вариациях, соответствующие решению $x_h = \bar{x}_h^0$, при обозначениях предыдущего пункта принимают вид

$$\frac{d^2\xi_h}{dt^2} = \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} c_{hk}\xi_k \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \quad (25)$$

т. е. отличаются от уравнений в вариациях (21) системы (20) только тем, что в левую часть входят вторые производные от ξ вместо первых.

Если, далее, мы будем искать частные решения показательного типа $\xi_h = \lambda_h e^{zt}$ при постоянных λ и z, то для z придем к характеристическому уравнению степени $2n$

$$\Delta(z^2) \equiv \| c_{hk} - \delta_{hk} z^2 \| = 0,$$

которое может быть получено из характеристического уравнения (23) системы (20) посредством подстановки z^2 вместо z. Отсюда заключаем, что необходимое условие для устойчивости статического решения уравнений (20), найденное в предыдущем пункте (все корни уравнения $\Delta(z) = 0$ должны быть чисто мнимыми), здесь для системы (24) переходит в условие, что все корни *уравнения* $\Delta(z) = 0$ *степени* n *должны быть отрицательными.*

Заметим теперь, что предыдущие рассуждения остаются также в силе и для всякой системы вида

$$\sum_{k=1}^{n} a_{hk} \frac{d^2 x_k}{dt^2} = X_h(z) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \quad (26)$$

где a_{hk} обозначают n^2 известных функций от x с определителем $\| a_{hk} \|$, не равным тождественно нулю; действительно, такая система только по виду представляется более общей, чем система (24), так как она приводится к виду (24) после разрешения ее относительно вторых производных. Здесь важно рассмотреть непосредственно системы вида (26), потому что, как легко видеть, уравнения Лагранжа голономной системы, подчиненной связям, не зависящим от времени, и находящейся под действием консервативных сил, в непосредственной близости от конфигурации равновесия принимают вид, который, как частный случай, входит в тип уравнений в вариациях относительно статического решения системы (26) общего вида.

Чтобы проверить это, заметим прежде всего, что если обозначить через $\bar{a}_{hk}$ значения, которые принимают a_{hk} для статического решения, и при этом воспользоваться обычными обозначениями, то уравнения в вариациях системы (26) примут вид

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{hk} \frac{d^2\xi_k}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} c_{hk}\xi_k \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \quad (27)$$

так что соответствующее характеристическое уравнение будет

$$\| c_{hk} - z^2 \bar{a}_{hk} \| = 0. \tag{28}$$

С другой стороны, обращаясь к § 3, возьмем снова найденные там выражения для живой силы T и для потенциала U в непосредственной близости от конфигурации равновесия C^0. Эти выражения, если написать $\dot{z}_h$ вместо $\dot{q}_h$, что возможно на основании того, что было положено $z_h = q_h - q_h^0$, принимают вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} a_{hk} \dot{z}_h \dot{z}_k, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} \beta_{hk} z_h z_k.$$

Если на основании этих выражений составим уравнения Лагранжа, то придем к уравнениям

$$\sum_{k=1}^{n} a_{hk} \frac{d^2 z_k}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} \beta_{hk} z_k \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{27'}$$

которые и будут как раз типа уравнений (27); но, как мы уже отмечали, уравнения (27') составляют их частный случай, потому что в уравнениях (27) c_{hk}, a_{hk} суть действительные числа, не подчиненные никакому условию, тогда как a_{hk}, β_{hk} в уравнениях (27') суть коэффициенты двух квадратичных форм ($a_{hk} = a_{kh}$, $\beta_{hk} = \beta_{kh}$), первая из которых является *определенной положительной*.

Характеристическое уравнение для уравнений (27') имеет вид

$$\| \beta_{hk} - z^2 a_{hk} \| = 0, \tag{28'}$$

и поэтому получается посредством подстановки $\rho = z^2$ из уравнения (11) § 3

$$\| \beta_{hk} - \rho a_{hk} \| = 0,$$

которое в известном смысле можно рассматривать как резольвенту задачи о малых колебаниях голономной системы в окрестности конфигурации устойчивого равновесия.

Отметим попутно, что из самой формы характеристического уравнения (28), которое действительно для всех дифференциальных систем вида (27) и, в частности, для уравнений малых колебаний, следует, что если z есть его корень, то корнем будет также и $-z$. Отсюда имеем: *характеристические показатели статического решения дифференциальной системы типа* (26) *и, в частности, динамической задачи попарно равны по модулю и противоположны по знаку.*

Важнее всего то, что, применяя критерий неустойчивости предыдущего пункта, мы придем к обращению теоремы Дирихле, уже упоминавшемуся в п. 7, по крайней мере в случаях общего типа.

Речь идет о следующей теореме Ляпунова, уже указанной в упомянутом выше пункте.

Дана голономная система, находящаяся под действием консервативных сил; если потенциал U имеет в данной конфигурации C^0 системы стационарное значение, которое не является максимумом, то равновесие в C^0 не будет устойчивым, по крайней мере всякий раз, когда отсутствие максимума можно видеть из рассмотрения местных значений вторых производных от U.

Доказательство почти очевидно, так как последнее предположение в формулировке заключает в себе то, что в канонической форме потенциала (отнесенного к нормальным переменным), т. е. в выражении

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho_i x_i^2,$$

где ρ_i обозначают корни (все действительные) уравнения (11), по крайней мере один из этих корней будет положительным. Если, например, $\rho_h > 0$, то характеристическое уравнение (28') допускает два действительных корня $\pm\sqrt{\rho_h}$ (характеристические показатели), откуда следует в силу критерия предыдущего пункта, что конфигурация равновесия C^0 будет наверное неустойчивой.

Мы можем прибавить, что эта конфигурация оказывается тем менее устойчивой, чем больше будет число неотрицательных значений ρ_i. Действительно, достаточно обратиться к дифференциальным уравнениям малых колебаний, т. е. к уравнениям

$$\ddot{x}_i - \rho_i x_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

чтобы убедиться, что из нормальных переменных x_i те, которым соответствуют $\rho_i < 0$, будут во всяком случае изменяться по гармоническому закону, тогда как все те, для которых $\rho_i \geqslant 0$, при подходящем выборе начальных условий в конце концов будут возрастать неограниченно вместе с временем. На основании этого можно сказать, что конфигурация неустойчивого равновесия имеет столько *степеней неустойчивости*, сколько имеется в соответствующей канонической форме потенциала неотрицательных коэффициентов.

§ 6. Линейная устойчивость и критерий, даваемый методом малых колебаний

23. Приближенная устойчивость первого порядка или линейная. Вернемся к общим рассуждениям пп. 16, 18, чтобы по возможности быстрее перейти затем к рассмотрению дальнейших замечательных исследований.

Мы уже говорили (п. 21), что на конкретных примерах доказана недостаточность, в общем случае, необходимого условия устойчивости статического решения, найденного Ляпуновым [11].

Следует, однако, заметить, что всякий раз, как оно выполняется, т. е. всякий раз, как все характеристические показатели статического решения $\bar{\sigma}$ чисто мнимые, удается показать, что отклонение решений $\bar{\sigma}$ и σ друг от друга, вначале весьма малое, хотя и не остается неопределенно долго бесконечно малым, но обнаруживается только после более длительного промежутка времени, чем во всех других случаях, т. е. мы имеем в этом случае *устойчивость* в первом приближении, которую можно назвать *линейной*, поскольку принимается во внимание только линейная часть дифференциальных уравнений, о которых идет речь.

Когда имеет место эта линейная устойчивость, решения σ, близкие вначале к рассматриваемому решению $\bar{\sigma}$, называются попрежнему *малыми колебаниями* около $\bar{\sigma}$.

Далее, иногда при схематической постановке конкретных задач оказывается возможным считать удовлетворительным такое приближенное представление явлений, которое сохраняет свое значение если не на все время, то по крайней мере в течение конечного, но достаточно длительного промежутка времени. Это и является основанием того, что в конкретных приложениях, если не удается прийти к устойчивости в строгом смысле, удовлетворяются лишь решением вопроса, оказывается ли данное статическое решение строго неустойчивым, или же оно устойчиво в только что рассмотренном линейном смысле. А для этой цели достаточно применить так называемый *метод малых колебаний* (т. е. решение уравнений в вариациях) и критерий, даваемый рассмотрением характеристических показателей.

В дальнейшем нам придется часто рассматривать вопрос об устойчивости или в строгом смысле, когда задача допускает это, или ограничиваясь первым приближением, на основе исследования характеристических показателей. Здесь же, продолжая следовать дальше в развитии идей общего порядка, мы покажем, как сама физическая реальность во многих случаях подсказывает рассмотрение линейной устойчивости в будущем.

24. Меростатические движения и типичная форма уравнений малых колебаний около них. Рассмотрим динамическую систему с голономными связями, не зависящими от времени, на которую действуют консервативные силы, и предположим, что циклический характер некоторых лагранжевых координат допускает приложение метода игнорирования этих координат (предыдущая глава, п. 45).

Обозначая через $q_1, q_2, \ldots, q_n$ неигнорируемые координаты, сделаем дальнейшее предположение, что соответствующая *при-*

веденная лагранжева система допускает статическое решение $q_h = q_h^0 (h = 1, 2, \ldots, n)$. В действительности, движение системы, соответствующее такому решению, может называться статическим только частично, т. е. только по отношению к неигнорируемым координатам, потому что остальные координаты, вообще говоря, не будут постоянными, а будут изменяться с временем. Такое движение называется меростатическим (т. е. частично статическим); при этом следует заметить, что в конкретных задачах как раз для этого типа движений чаще всего и интересуются вопросом об устойчивости.

Вспомним, что (приведенная) лагранжева функция, которая здесь не будет зависеть от времени, содержит члены второй, первой и нулевой степени относительно $\dot{q}_k$ (предыдущая глава, п. 46), так что, обозначая ее через $\mathfrak{L}$, мы можем, при обычном значении символов, положить

$$\mathfrak{L} = T_2 + T_1 + T_0 + U,$$

где, как мы знаем, члены T_1, линейные относительно $\dot{q}_h$, имеют гиростатический характер.

Представим себе теперь, что вместо q введены n соответствующих *нормальных координат*, т. е. n таких линейных независимых между собой форм x_i от $q_h - q_h^0$, что в окрестности значений $x_i = 0$, соответствующих меростатическому движению, квадратичная часть T_2 живой силы и функция $T_0 + U$ имеют соответственно вид

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i^2, \qquad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \rho_i x_i^2,$$

который в п. 13 мы придали живой силе и потенциалу, независимо от какого-либо игнорирования координат.

Что касается части T_1 гиростатического характера, то она после замены переменных, естественно, представится в виде линейной функции относительно $\dot{x}$, а коэффициент при любом $\dot{x}_i$, разложенный в ряд в окрестности решения, о котором идет речь, будет иметь вид

$$b_i + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} x_k + \ldots \tag{29}$$

Если перейдем теперь к составлению уравнений Лагранжа для малых колебаний, то тотчас же увидим, что в них не войдут ни известные члены b_i, ни члены, опущенные в разложении (29); эти уравнения принимают в рассматриваемом случае вид

$$\ddot{x}_i - \rho_i x_i + \sum_{k=1}^{n} e_{ik} \dot{x}_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{30}$$

где для простоты положено

$$e_{ik} = b_{ik} - b_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, мы видим, что благодаря членам гиростатической природы в функции Лагранжа в уравнениях малых колебаний появляются линейные члены относительно лагранжевых нормальных скоростей с *антисимметричными* (постоянными) *коэффициентами*.

§ 7. Наличие пассивных сопротивлений. Диссипативность

25. Уравнения (30) предыдущего пункта не составляют еще наиболее общий тип уравнений малых колебаний, встречающихся при схематической постановке физических проблем.

Действительно, даже ограничиваясь случаем голономных систем со связями, не зависящими от времени, и находящихся под действием позиционных сил консервативной природы, необходимо принимать во внимание неизбежные пассивные сопротивления (трение, вязкость и пр.), которые, как мы уже видели в элементарном случае только одной степени свободы (см., например, гл. I, п. 58), можно вообще рассматривать схематически как силы, зависящие от скоростей точек системы; эти силы совершают существенно отрицательную работу на каком угодно перемещении системы.

В окрестности конфигурации равновесия $x_i = 0$ лагранжевы составляющие $X_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ таких сил будут, как правило, представлены линейными формами с постоянными коэффициентами относительно лагранжевых скоростей $\dot{x}$, и эти формы должны быть такими, чтобы выражение элементарной работы

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \, dx_i = dt \sum_{i=1}^{n} X_i \dot{x}_i$$

было отрицательным для всякого перемещения, не равного тождественно нулю, т. е. при всяком выборе значений $\dot{x}$, не равных одновременно нулю. Другими словами, квадратичная форма относительно $\dot{x}$

$$\Psi = -\sum_{i=1}^{n} X_i \dot{x}_i$$

должна быть определенной положительной.

Предположим теперь, что

$$X_i = -\sum_{k=1}^{n} d_{ik} \dot{x}_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

какова бы ни была матрица $\|d_{ik}\|$, можно воспользоваться приемом, хорошо известным из теории билинейных форм, и положить

$$d_{ik}=\gamma_{ik}+\varepsilon_{ik} \qquad (i,k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где

$$\gamma_{ik}=\frac{1}{2}(d_{ik}+d_{ki}), \qquad \varepsilon_{ik}=\frac{1}{2}(d_{ik}-d_{ki}),$$

в силу чего матрица $\|\gamma_{ik}\|$ будет симметричной, а матрица $\|\varepsilon_{ik}\|$ антисимметричной. Тогда, очевидно, будем иметь

$$\Psi=-\sum_{i=1}^{n}X_i\dot{x}_i=\sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{n}\gamma_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k,$$

$$X_i=-\frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial\dot{x}_i}-\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{ik}\dot{x}_k \qquad (i=1,\ 2,\ldots,\ n);$$

уравнения малых колебаний, в которых антисимметричные части составляющих X_i объединяются в членах гироскопического происхождения, принимают их наиболее общий вид

$$\ddot{x}_i-\rho_i x_i+\sum_{k=1}^{n}e_{ik}\dot{x}_k=-\frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial\dot{x}_i} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,n). \tag{31}$$

Этот вид является *по существу* наиболее общим; но не надо забывать (п. 24), что квадратичная часть T_2 живой силы и функция T_0+U предполагаются уже приведенными к канонической форме

$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\dot{x}_i^2, \qquad T_0+U=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho_i x_i^2,$$

т. е. относительно T_2 и T_0+U переменные x являются нормальными. Если же, наоборот, перейдем к каким угодно переменным z (линейным независимым функциям от x), то, естественно, будем иметь для T_2 и T_0+U квадратичные формы произвольного вида (§ 3):

$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n}a_{hk}\dot{z}_h\dot{z}_k, \qquad T_0+U=\frac{1}{2}\sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n}\beta_{hk}z_h z_k;$$

T_1 (предыдущий пункт) и Ψ сохранят свой вид, если в них произвести фактическую замену буквы x буквой z (конечно, числовые значения коэффициентов изменятся в соответствии с этой заменой переменных).

Окончательно, так как $\mathfrak{L}=T_2+T_1+T_0+U$, уравнения малых колебаний

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{z}_h}-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial z_h}=-\frac{1}{2}\frac{d\Psi}{d\dot{z}_h}\qquad(h=1,\ 2,\ \ldots,n)$$

в каких угодно координатах z (исчезающих в конфигурации равновесия) примут вид

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{hk}\ddot{z}_k-\beta_{hk}z_k+e_{hk}\dot{z}_k)=-\sum_{k=1}^{n}\gamma_{hk}\dot{z}_k\qquad(h=1,\ 2,\ldots,n),\qquad(31')$$

где из четырех рядов коэффициентов (постоянных) a, β, γ, e первые три являются симметричными относительно двух индексов

$$(a_{hk}=a_{kh},\quad \beta_{hk}=\beta_{kh},\quad \gamma_{hk}=\gamma_{kh}),$$

а e_{hk} — антисимметричны ($e_{hk}=-e_{kh}$).

Остается разъяснить физический смысл квадратичной формы Ψ. Для этой цели, не нарушая общности, мы можем снова взять координаты x и составить для уравнений (31) *уравнение живых сил*, умножая их соответственно на $\dot{x}_i\,dt$ и суммируя по индексу i. Таким образом, найдем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^{n}\dot{x}_i^2-\sum_{i=1}^{n}\rho_i x_i^2\right\}dt+\Psi\,dt=0;$$

отсюда прежде всего виден гиростатический характер линейных относительно $\dot{x}$ членов с антисимметричными коэффициентами; далее, если продолжать интерпретировать разность

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}(\dot{x}_i^2-\rho x_i^2)$$

как полное выражение $H=T_2-(T_0+U)$ механической энергии системы (кинетической и потенциальной), то из полученного выше уравнения живых сил следует

$$dH=-\Psi\,dt.$$

Отсюда заключаем, что квадратичная форма — Ψ, частные производные которой по $\dot{x}_i$ входят в уравнения (31) в виде членов, линейных относительно $\dot{x}_i$, равна производной по времени от полной механической энергии и поэтому в любой момент является мерой быстроты, с которой изменяется эта энергия. Характер определенной положительной формы, которым обладает Ψ, соответствует тому факту, что при естественном течении механических явлений, когда движущейся системе не сообщается энергия извне для сохранения режима движения, мы будем иметь (в силу действия трения, вязкости, пассивных сопротивлений всякого рода, представленных в добавочных членах уравнений (31)) *рассеяние энергии*, т. е. превращение энергии в низшие формы (чаще всего в теплоту).

Этим объясняется название *диссипативной функции* или *функции рассеяния*, которое, следуя Рэлею, дают (определенной положительной) квадратичной форме Ψ.

26. Вопросы устойчивости, связанные с наличием диссипативных и гиростатических членов. Выше установлена аналитически в согласии с физической действительностью возможность того, что, кроме консервативных сил, на систему могут действовать еще гиростатические и диссипативные силы; вместе с этим возникают и хорошо известные вопросы об устойчивости движения.

Отметим здесь прежде всего, что характер обратимости, которым обладают лагранжевы уравнения движения (и, следовательно, уравнения малых колебаний), когда действующие силы являются чисто консервативными, сохраняется также, когда на эти силы накладываются кинетические действия гиростатического типа. Это видно прежде всего из типичной формы уравнений (30) п. 24, которую имеют в этом случае уравнения малых колебаний. Действительно, мы замечаем, что вместе с e_{ik} антисимметричны также и $-e_{ik}$.

Но когда (независимо от гиростатических членов) входят кинетические диссипативные действия (в частности, когда в лагранжеву функцию входят билинейные члены общего типа относительно $\dot{x}$, x), то уравнения движения или соответствующие уравнения малых колебаний, принадлежащие в этом случае к типу уравнений (31) предыдущего пункта, при определенной положительной форме Ψ становятся необратимыми; при этом предположении истинный интерес вопроса будет заключаться уже не в изучении „вечной“ устойчивости *), а только в изучении устойчивости в будущем (п. 16).

После этого замечания рассмотрим ближе, как можно прийти к строгому или, по крайней мере, приближенному решению вопроса об устойчивости, сообразно различным возможным случаям действия сил. Чтобы объединить различные точки зрения, с которых рассматривается проблема соответственно различным предпосылкам, начнем с предположений, схематически наиболее простых, и постепенно будем переходить к более сложным.

Рассмотрим сначала голономную систему, находящуюся под действием только консервативных сил, и предположим, что в конфигурации C^0 соответствующий потенциал допускает действительный максимум, так что в ней существует для системы состояние устойчивого равновесия (как в прошлом, так и в будущем).

*) То есть устойчивости в прошлом и в будущем. (*Прим. ред.*)

Но с физической точки зрения такая постановка задачи не может сохранять свою силу неопределенно долго.

Как бы точно ни были осуществлены приспособления, реализующие связи, как бы ни было ослаблено влияние трения при помощи смазки или влияние других диссипативных сил посредством соответствующих устройств, рано или поздно дело кончится тем, что диссипативные действия накопятся и станут заметными. Сам собой возникает вопрос, могут ли в действительности эти диссипативные действия изменить равновесие или, по крайней мере, изменить характер устойчивости.

Легко видеть, что на этот вопрос нужно ответить отрицательно, по крайней мере постольку, поскольку диссипативные действия могут быть схематически представлены способом, указанным в предыдущем пункте. Действительно, заметим, что прежде всего эти малые диссипативные действия, благодаря их линейному характеру относительно $\dot{x}$, исчезают в конфигурации C^0 (т. е. при $x_i=\dot{x}_i=0$), так что равновесие несомненно сохранится. Что же касается устойчивости, вспомним (предыдущий пункт), что при диссипативных силах теорема живых сил дает

$$dH=-\Psi\,dt,$$

где H есть полная механическая энергия системы, а $-\Psi dt$ — элементарная работа диссипативных сил, которая, как мы видели, благодаря самой физической природе сил, совершающих ее, отрицательна.

Отсюда следует, что для любого элемента времени dt

$$\frac{dH}{dt}\leqslant 0,$$

так что, если обозначим через $H_0=c_0$ начальное значение H и через H_0+c значение, относящееся к любому будущему моменту времени $t>t_0$, будем иметь $c<c_0$. Обращаясь теперь к представлению состояний движения в обычном $2n$-мерном пространстве A_{2n} (п. 2) и к рассмотрению поверхностей уровня энергии $H=\text{const}$ (п. 6), мы непосредственно увидим, что изображающая точка P какого-нибудь движения, незначительно возмущенного вначале, будет оставаться неограниченно долго в замкнутой области той гиперповерхности, которой она принадлежала в начальный момент.

Это замечание принадлежит лорду Кельвину[1]), который ввел различие между *обыкновенной устойчивостью*, или, как мы можем

[1]) Вилльям Томсон (лорд Кельвин) родился в Бельфасте (Ирландия) в 1824 г., умер в Глазго в 1907 г., был похоронен в Вестминстерском аббатстве рядом с Ньютоном. Был профессором естествознания в Глазго с 1846 до 1889 г. и членом почти всех академий мира. Идя по стопам Карно и Фурье, он сделался одним из основателей общего учения об энергии. В области электромагнетизма он ввел свой знаменитый метод мнимых, первым углубил понятие о переменном режиме электрического тока; в частности, изучил разряд конденсатора и распространение тока в кабеле. Крупный

сказать, теоретической устойчивостью (т. е. при отсутствии пассивных сопротивлений) и *вековой устойчивостью*, которая сохраняется неизменной также при наложении и накоплении (как это неизбежно происходит в физической действительности) таких диссипативных действий. В этом смысле предыдущее замечание можно сформулировать так: *равновесие, имеющее место при действии консервативных сил в конфигурации действительного максимума для потенциала, обладает также и вековой устойчивостью.*

27. Представим себе далее, что на голономную систему вместе с действующими на нее консервативными силами оказывают влияние кинетические действия *гиростатического типа*; предполагая, что конфигурация $C^0 (x_i = \dot{x}_i = 0)$ является конфигурацией равновесия, отбросим предположение, что потенциал в ней допускает действительный максимум или, другими словами, что в отсутствие гиростатических (или диссипативных) действий конфигурация C^0 соответствует состоянию устойчивого равновесия.

За отсутствием более точных критериев для состояния равновесия системы в C^0, мы можем разобрать только линейную устойчивость, применяя метод характеристических показателей.

Дифференциальное уравнение малых колебаний будет иметь вид

$$\ddot{x}_i + \sum_{k=1}^{n} e_{ik}\dot{x}_k - \rho_i x_i = 0, \tag{30}$$

где матрица $\| e_{ik} \|$ будет антисимметричной; для составления характеристического уравнения, как это было уже разъяснено в п. 22, нет необходимости предварительно приводить дифференциальную систему к первому порядку, а достаточно найти лишь частные решения вида

$$x_i = \lambda_i e^{zt} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Подставляя эти решения в уравнения (30) и исключая λ_i, мы придем таким образом к характеристическому уравнению

$$\Delta (z) \equiv | \delta_{ij} (z^2 - \rho_i) + e_{ij} z | = 0,$$

где полином $\Delta (z)$ степени $2n$ в силу антисимметричного характера величин e_{ij} не отличается от $\Delta(-z)$, так что его можно представить через $f(z^2)$, где f обозначает вполне определенный полином степени n.

экспериментатор, он изобрел ряд технических приборов и измерительных инструментов и принимал деятельное участие в прокладке первого трансатлантического кабеля. С неутомимой энергией работал он во всех областях математического естествознания, продолжил классические результаты в гидродинамике и в геофизике, придумывая механические модели наиболее запутанных явлений и поучительные представления о структуре материи. Его трактат A Treatise on the natural philosophy, написанный в сотрудничестве с Тэтом, содержит много оригинальных и плодотворных идей.

Теперь для линейной устойчивости нашего состояния равновесия необходимо, чтобы все $2n$ корней z полинома $\Delta(z)$ были чисто мнимыми (действительная часть равна нулю), и, следовательно, чтобы все n корней z^2 полинома $f(z^2)$ были отрицательными[1]. Отсюда следует, что произведение этих корней должно иметь знак величины $(-1)^n$. С другой стороны, в силу хорошо известного свойства алгебраических уравнений это произведение (так как в полиноме $f(z^2)$ коэффициент при наивысшей степени равен единице) равно $(-1)^n f(0)$, т. е. $\rho_1\rho_2 \ldots \rho_n$. Поэтому заключаем, что *условие, необходимое* (но, конечно, недостаточное) *для того, чтобы характеристические показатели все были чисто мнимыми и, следовательно, чтобы выполнялось условие линейной устойчивости, заключается в том, чтобы произведение* $(-1)^n \rho_1\rho_2 \ldots \rho_n$ *было положительным;* или, другими словами, чтобы ни один из сомножителей ρ не был нулем и чтобы число отрицательных сомножителей ρ было четным.

Интересно обратить внимание на то обстоятельство, что это условие ни в какой мере не зависит от гиростатических членов; если оно не выполнено, то уже невозможно выполнить его присоединением какого угодно числа гиростатических членов; наоборот, если $(-1)^n \rho_1\rho_2 \ldots \rho_n > 0$, то a priori не исключена возможность, что устойчивость можно обеспечить путем введения кинетических действий гиростатического типа, хотя бы равновесие и не было устойчивым при одних консервативных силах.

Если воспользуемся теперь терминологией, установленной в п. 22, то предыдущее замечание можно высказать в следующей наглядной форме.

Введение гиростатических сил может в некоторых случаях исключить четное число, но ни в коем случае не может исключить нечетного числа степеней неустойчивости.

28. Стабилизация состояния равновесия посредством гиростатических действий. Для лучшего уяснения рассуждений предыдущего пункта рассмотрим наиболее простой из возможных случаев, $n=2$, который осуществляется, в частности, материальной точкой, движущейся в плоскости (под действием консервативной силы). Уравнения малых колебаний, если будем писать x, y вместо x_1, x_2, получат вид

$$\ddot{x} = \rho_1 x, \quad \ddot{y} = \rho_2 y;$$

если величины ρ_1, ρ_2 обе положительны, чем будет удовлетворено условие предыдущего пункта, то мы будем иметь две степени неустойчивости, происходящие, если можно так выразиться, от отталкивательной природы силы как вдоль оси x, так и вдоль оси y.

[1] Действительно, как было отмечено в п. 21, случай, когда $f(z^2)$ допускает нулевой корень, исключен, так как он был бы *двойным* корнем уравнения $\Delta(z)=0$.

Так как речь идет о четном числе степеней неустойчивости, то на основании рассуждений предыдущего пункта не исключена возможность сделать равновесие устойчивым, вводя некоторые гиростатические действия; в этом случае легко убедиться прямым путем, что этого действительно можно достигнуть.

Согласно общей теории, постоянные коэффициенты e_{ij} гиростатических членов здесь сводятся только к одному, так что, положив $e_{12}=-e_{21}=-2\omega$, мы придем к уравнениям

$$\ddot{x}-2\omega\dot{y}=\rho_1 x, \quad \ddot{y}+2\omega\dot{x}=\rho_2 y, \tag{32}$$

для которых характеристическое уравнение принимает вид

$$f(z^2)\equiv\begin{vmatrix} z^2-\rho_1 & -2\omega z \\ 2\omega z & z^2-\rho_2 \end{vmatrix}\equiv z^4+(4\omega^2-\rho_1-\rho_2)z^2+\rho_1\rho_2=0.$$

Для обеспечения линейной устойчивости достаточно выбрать ω^2 настолько большим, чтобы оба корня z^2 многочлена $f(z^2)$ были отрицательными; а для этой цели требуется, чтобы

$$(4\omega^2-\rho_1-\rho_2)^2-4\rho_1\rho_2>0, \quad 4\omega^2-\rho_1-\rho_2>0$$

или же

$$2|\omega|>\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2}. \tag{33}$$

В случае центральной отталкивающей силы, например, имеем $\rho_1=\rho_2=\rho$; поэтому уравнения (32) благодаря тому, что их можно написать в виде

$$\ddot{x}-2\omega\dot{y}-\omega^2 x=(\rho-\omega^2)x,$$
$$\ddot{y}+2\omega\dot{x}-\omega^2 y=(\rho-\omega^2)y,$$

представятся как уравнения движения точки (с массой, равной единице), отнесенной к осям, вращающимся с угловой скоростью ω, и находящейся под действием силы, являющейся производной от потенциала

$$-\frac{1}{2}(\omega^2-\rho)(x^2+y^2).$$

Эта сила при $|\omega|>\sqrt{\rho}$ будет, очевидно, притягивающей, что и дает механически наглядное обоснование заключению, полученному выше формально на основании рассмотрения характеристического уравнения.

29. Временный характер устойчивости, происходящей от гиростатических действий. Здесь нужно, однако, добавить замечание, аналогичное замечанию п. 26: рассмотренный выше случай стабилизации состояния равновесия посредством подходящих гиростатических сил может иметь значение при представлении реального явления только для сравнительно небольшого промежутка времени, потому что при длительном промежутке неизбежно проявятся обычные диссипативные действия.

В этом случае возникает также вопрос, могут ли эти действия влиять на устойчивость равновесия, и ответ будет противоположным тому, который мы имели в предположении устойчивого самого по себе (п. 26) состояния равновесия. Если состояние равновесия, само по себе неустойчивое в строгом смысле, стабилизируется (линейно) гиростатическими действиями, то пассивные сопротивления (линейные в первом приближении относительно лагранжевых скоростей) в конце концов нарушают устойчивость. Другими словами, *устойчивость, обусловленная гиростатическими силами, не имеет более векового характера.*

Не будем останавливаться здесь на общем доказательстве этого правила: оно достаточно разъяснится рассмотрением случая $n=2$, для чего надо обратиться только к предыдущему пункту.

Когда принимаются во внимание пассивные сопротивления, уравнения малых колебаний имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}-2\omega\dot{y}+\gamma\dot{x}&=\rho_1 x, \\ \ddot{y}+2\omega\dot{x}+\gamma\dot{y}&=\rho_2 y, \end{aligned} \tag{34}$$

где через γ обозначена положительная постоянная, и поскольку предполагается, что равновесие (неустойчивое само по себе) стабилизируется гиростатически, то ρ_1, ρ_2 должны быть оба положительными и, кроме того, величина $|\omega|$ должна удовлетворять условию (33).

Речь идет о том, чтобы показать, что пассивное сопротивление с составляющими $-\gamma\dot{x}$, $-\gamma\dot{y}$, как бы мала ни была γ, лишь бы она была положительной, приведет к тому, что состояние равновесия $x=y=\dot{x}=\dot{y}=0$ не будет более устойчивым в будущем (даже линейно). На основании теоремы Ляпунова такое обстоятельство будет обеспечено, как только будет доказано, что как бы ни была мала $\gamma>0$, не все корни характеристического уравнения системы (34) будут чисто мнимыми, но между ними найдется по крайней мере один, действительная часть которого будет положительной.

С этой целью составим характеристическое уравнение системы (34), которое, очевидно, будет иметь вид

$$\Delta(z)\equiv\begin{vmatrix} z^2+\gamma z-\rho_1 & -2\omega z \\ 2\omega z & z^2-\gamma z-\rho_2 \end{vmatrix}=0;$$

заметим, что если мы обозначим его корни через $z_i\,(i=1,2,3,4)$, то будем иметь

$$z_1z_2z_3z_4=\rho_1\rho_2>0,$$

$$\gamma(\rho_1+\rho_2)=z_1z_2z_3z_4\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}+\frac{1}{z_4}\right);$$

отсюда, обозначая, как обычно, через $\bar{z}_i$ комплексную величину, сопряженную с z_i ($\bar{z}_i = z_i$, если корень действителен), получим

$$\frac{\gamma(\rho_1+\rho_2)}{\rho_1\rho_2} = \frac{\bar{z}_1}{z_1\bar{z}_1} + \frac{\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} + \frac{\bar{z}_3}{z_3\bar{z}_3} + \frac{\bar{z}_4}{z_4\bar{z}_4};$$

отсюда непосредственно видно, что z_i не могут иметь все действительную часть, равную нулю, или отрицательную, так как в этом случае действительная часть суммы в правой части была бы нулем или отрицательной, в то время как левая часть является существенно действительной и положительной. Таким образом, оказывается действительно подтвержденным в случае $n=2$ то положение, что гиростатическая устойчивость не имеет векового характера.

Типичным примером, иллюстрирующим только что полученный результат, является так называемый *спящий волчок*, т. е. волчок, который, после того как его привели в весьма быстрое вращательное движение вокруг собственной оси, поставленной вертикально на горизонтальном полу, и предоставили самому себе, кажется неподвижным всякому, кто смотрит на него издали. При отсутствии вращения около собственной оси его состояние равновесия при вертикальном направлении оси будет неустойчивым (если центр тяжести выше точки опоры); когда угловая скорость вращения волчка около оси сделается достаточно большой, его состояние меростатического вращения становится устойчивым (не только в линейном, но даже и в строгом смысле), если в качестве действующей силы рассматривается только сила веса. Но если принять во внимание сопротивление воздуха, то в уравнения малых колебаний войдут диссипативные силы, и мы теоретически найдем, как это и имеет место в действительности, что угловая скорость, хотя и медленно, будет убывать, так что в конце концов волчок упадет. Исчерпывающее объяснение этого явления будет дано в гл. VIII, § 7.

§ 8. Малые колебания около какого-нибудь решения

30. Заметим, наконец, что формальный способ составления уравнений в вариациях можно также приложить к системам уравнений (16), правые части которых зависят от t, и по отношению к какому угодно решению $\bar{\sigma}$ (будет ли оно статическим или нет, будет оно устойчивым или неустойчивым). Мы придем, таким образом, к системе дифференциальных уравнений (18), которые все еще линейны относительно ξ, но, вообще говоря, содержат в коэффициентах явно переменную t. Даже и в этих случаях можно сказать, что эти уравнения определяют *малые колебания около рассматриваемого решения* $\bar{\sigma}$, но при этом подразумевается та оговорка, что если решение $\bar{\sigma}$ не является устойчивым, то приближенное представление, которое таким образом получается для σ, вначале близкого к $\bar{\sigma}$, сохраняет свое значение только внутри интервала времени, ограниченного подходящим образом. Так, из изучения уравнений в вариациях здесь можно получить критерии устойчивости или неустойчивости в *первом приближении*, но им нельзя дать простую исчерпывающую алгебраическую форму, как в случае статических решений систем, правые части которых не зависят от t. В частности, заслуживает упоминания случай *периодических решений*, т. е. случай, когда при $X(x|t)$, являющихся периодическими функциями от t с одинаковыми периодами T (или, в частности, не зависящих от t), в качестве решения $\bar{\sigma}$ принимается решение, для которого функции $x(t)$ сами будут периодическими функциями, имеющими тот же период T. Для таких случаев существует теория характеристических показателей, вполне аналогичная теории, действительной для статических решений, с той лишь разницей, что для составления характеристического уравнения недостаточно алгебраических средств; оно требует аналитических приемов более высокого порядка [12].

Хотя эта теория представляет большой интерес для приложений механики и, в частности, для небесной механики, однако мы здесь не можем заниматься ею, не выходя из рамок этой книги.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что если голономная система с идеальными связями, не зависящими от времени, находится под действием консервативных сил, то статическое условие устойчивости (т. I, гл. IX, п. 17 и гл. XIII, п. 23) является также и достаточным для устойчивости в наиболее полном динамическом понимании (§ 1).

2. Доказать инвариантность характеристического уравнения (11) по отношению к каким угодно линейным однородным преобразованиям.

Достаточно вспомнить, что если квадратичная форма подвергается произвольному линейному однородному преобразованию, то ее дискриминант умножается на квадрат модуля рассматриваемого линейного преобразования.

3. Пусть S есть материальная система, отнесенная к нормальным координатам x и находящаяся под действием некоторой консервативной системы сил, которые имеют потенциал U в окрестности конфигурации устойчивого равновесия. Тогда будем иметь (п. 13)

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\dot{x}_i^2,\quad U=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2 x_i^2.$$

Если S' есть материальная система с немного отличной живой силой $T+\delta T$ и находится под действием сил, тоже немного отличных, являющихся производными от потенциала $U+\delta U$, то при отнесении к тем же самым нормальным координатам x можно получить

$$\delta T = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{n} \alpha_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k, \qquad \delta U = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{n} \beta_{ik} x_i x_k,$$

где α и β обозначают постоянные, которые нужно рассматривать как малые первого порядка.

Доказать, что в этом порядке приближения (т. е. по крайней мере до членов второго порядка относительно α, β) квадраты ω_h^2 главных частот получают приращения, определяемые равенствами

$$\delta\omega_h^2 = \beta_{hk} - \alpha_{hk}\omega_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Как мы видели, на изменение главных частот влияют только квадратные члены возмущений δT, δU живой силы и потенциала, члены же с произведениями не вносят никаких изменений.

Если вычислим частоты во втором приближении, то найдем, что скажется также влияние членов α_{hk}, β_{hk} при $h \gtreqless k$ [1]).

4. Пусть для уравнений малых колебаний голономной системы, находящейся под действием консервативных сил в окрестности конфигурации $q_i = 0$ устойчивого равновесия, система функций

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j^0 \varphi_{ij}(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

будет решением, соответствующим произвольным начальным скоростям $\dot{q}_i = \dot{q}_i^0$ в конфигурации равновесия. Доказать, что общий интеграл с $2n$ произвольными постоянными $\dot{q}_i^0$ (начальные скорости) и q_i^0 (начальные координаты) определяется равенством

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} \{ \dot{q}_j \varphi_{ij}(t) + q_j^0 \dot{\varphi}_{ij}(t) \} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Это и есть так называемое правило Стокса [2]). Чтобы установить его, достаточно заметить, что: 1) оно действительно для уравнения $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ гармонических движений и, следовательно, в нормальных координатах, при произвольном числе степеней свободы; 2) оно имеет инвариантный характер в отношении линейных однородных преобразований координат.

5. Предположим, что для голономной материальной системы с n степенями свободы C является конфигурацией устойчивого равновесия как для одной, так и для другой из различных консервативных систем сил, являющихся производными — первая от потенциала U', вторая от потенциала U''. Обозначая через ω'_h, ω''_h $(h = 1, 2, \ldots, n)$ соответствующие главные частоты,

---

[1]) См. Рэлей, Теория звука, т. I, 1941, § 90.

[2]) Дж. Г. Стокс (George Gabriel Stokes) родился в Скрине (Ирландия) в 1819 г., умер в Кэмбридже в 1903 г. Был профессором математики в Кэмбриджском университете. Крупный математик-физик, известен как автор формулы преобразования интегралов, носящей его имя, а также благодаря своим исследованиям о волнах и оптической теории, основанной на гипотезе, приписывающей эфиру упругие свойства.

доказать, что, когда система будет подвергаться одновременному действию двух систем сил: 1) C попрежнему будет конфигурацией устойчивого равновесия; 2) главные частоты ω_h, соответствующие составной системе сил, будут связаны с ω'_h, ω''_h соотношениями

$$\sum_{h=1}^{n} \omega_h^2 = \sum_{h=1}^{n} (\omega_h'^2 + \omega_h''^2);$$

3) между главными периодами $T_h = \frac{2\pi}{\omega_h}$, $T'_h = \frac{2\pi}{\omega'_h}$, $T''_h = \frac{2\pi}{\omega''_h}$ будет существовать аналогичное соотношение

$$\sum_{h=1}^{n} T_h^2 = \sum_{h=1}^{n} (T_h'^2 + T_h''^2).$$

6. Биения. Биения представляют собой известное акустическое явление, объяснение которого мы будем иметь, рассматривая колебания, происходящие от сложения двух гармонических колебательных движений.

Предположим, что один из характеристических параметров колеблющейся системы изменяется с временем по закону

$$x = r_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + r_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2).$$

Полагаем

$$\omega_1 = \omega - \varepsilon, \quad \omega_2 = \omega + \varepsilon,$$

что, естественно, возможно во всех случаях, но, как мы увидим, приобретает особый интерес, когда постоянные частоты ω_1 и ω_2 близки друг к другу, и, следовательно, ε будет очень мало.

Положив, далее,

$$r \cos\theta = r_1 \cos(\theta_1 - \varepsilon t) + r_2 \cos(\theta_2 + \varepsilon t),$$

$$r \sin\theta = r_1 \sin(\theta_1 - \varepsilon t) + r_2 \sin(\theta_2 + \varepsilon t)$$

и приняв, как это всегда возможно, r положительным, получим для x выражение

$$x = r \cos(\omega t + \theta),$$

которое соответствовало бы гармоническому движению с периодом $2\pi/\omega$, если бы r и θ были постоянными; в действительности, в данном случае речь идет о двух функциях времени.

Из сделанного предположения следует, что r и θ зависят от времени исключительно через посредство произведения εt, которое при малом ε за интервал времени Δt достаточно короткой длительности получает ничтожное приращение $\varepsilon\Delta t$. Точнее, предположим, ε будет столь мало, что для продолжительности $2n\pi/\omega$ некоторого определенного числа периодов произведение $2n\pi\varepsilon/\omega$ будет ничтожным. В этом предположении r и θ можно рассматривать как постоянные не в абсолютном смысле, а для промежутка времени, не большего, чем n периодов. В этом промежутке времени ход изменения x можно рассматривать как приблизительно гармонический.

Естественно, что при значительной продолжительности делается заметным изменение амплитуды r и фазы θ. Особенно замечательны следствия изменения r. На основании вышеуказанных формул имеем

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(2\varepsilon t + \theta_2 - \theta_1),$$

откуда вытекает, что при неограниченном изменении t амплитуда r колеблется между крайними значениями $r_1 + r_2$ и $|r_1 - r_2|$.

Заслуживает особого упоминания случай, когда r_1 и r_2, по крайней мере приблизительно, равны, так как тогда за интервалы времени продолжительности $\pi/2\varepsilon$, значительно превосходящей период $2\pi/\omega$, амплитуда r колеблется между минимумом, приблизительно равным нулю, и максимумом r_1+r_2.

С точки зрения акустики это условие соответствует звуку постоянной высоты $\omega/2\pi$, интенсивность которого за интервалы времени, очень большие по сравнению с периодом $2\pi/\omega$, периодически изменяется от вполне определенного максимума до нуля. Мы имеем таким образом чередование звучания и тишины, которое и составляет явление биений.

7. Рассмотрим кусок нити, гибкой и почти нерастяжимой, так что можно пренебречь изменением ее длины l. Пусть нить закреплена в своих концах A и B и несет в промежуточной точке P массу m. Если предположим, что два куска нити AP, BP являются прямолинейными и подвергаются одному и тому же натяжению τ, то масса m в силу ее связи с двумя кусками нити подвергается в нормальном к AB направлении, в плоскости APB, действию силы $\tau(\sin\alpha+\sin\beta)$, где положено $\alpha=\widehat{PAB}$, $\beta=\widehat{PBA}$. Эту силу можно выразить также в виде $\tau x\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right)$, где через x обозначено расстояние P от AB и положено $AP=l_1$, $BP=l_2$.

Представим себе теперь, что, кроме P, еще в другой точке Q нити AB помещена масса, тоже равная m, причем три куска нити $AP=l_1$, $PQ=a$, $QB=l_2$ будут прямолинейными и компланарными. Предполагая, что натяжение вдоль всей нити будет τ, проверить, что на массы, расположенные в P, Q, *нормально* к AB в плоскости $APQB$ будут действовать силы, величины которых соответственно равны

$$\tau\left(\frac{x}{l_1}+\frac{x-y}{a}\right),\qquad \tau\left(\frac{y-x}{a}+\frac{y}{l_2}\right),$$

где x, y обозначают расстояния точек P, Q от прямой AB.

Предположим, наконец, что нить имеет ничтожную по сравнению с m массу и общую длину l_1+a+l_2, близкую к AB.

Если натяжение τ велико по сравнению с весом mg каждой из двух добавочных масс, то, действительно, возможно принять его постоянным не только в каждом из трех кусков нити в отдельности, но также и во всех трех кусках вместе.

При этих условиях легко поставить для этих двух масс задачу о поперечных колебаниях, т. е. о колебаниях, нормальных к AB в плоскости $APQB$. Имея в виду, что систему можно рассматривать как голономную с двумя лагранжевыми параметрами x и y, показать, что живую силу и потенциал можно выразить соответственно в виде

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2),\qquad U=-\frac{1}{2}\tau\left(\frac{x^2}{l_1}+\frac{(x-y)^2}{a}+\frac{y^2}{l_2}\right).$$

Замечая далее, что при $l_1=l_2$ выражения $x+y$, $x-y$ являются нормальными координатами в расширенном смысле, т. е. обе формы T и U могут быть одновременно приведены к ортогональному виду, вывести отсюда, что главные частоты определятся равенствами

$$\omega_1^2=\frac{\tau}{ml_1},\qquad \omega_2^2=\frac{\tau}{m}\left(\frac{1}{l_1}+\frac{2}{a}\right)=\omega_1^2\left(1+\frac{2l_1}{a}\right).$$

При каких условиях получатся биения? (См. предыдущее упражнение.)

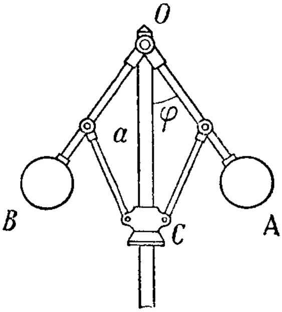
8. Малые колебания регулятора Уатта. В упражнении 22 предыдущей главы мы рассматривали схематически регулятор Уатта как голономную систему с лагранжевыми координатами θ и φ, движение которой определяется уравнениями

$$\frac{d}{dt}(I\dot\theta)=Q_\theta, \quad \frac{d}{dt}(J\dot\varphi)-\frac{1}{2}\dot\theta^2\frac{\partial I}{\partial\varphi}=\frac{\partial U}{\partial\varphi},$$

где

$$I=C+2ml^2\sin^2\varphi, \quad J=2ml^2, \quad U=2mgl\cos\varphi$$

при постоянных C, l, m, g. Составляющая Q_θ, как это было отмечено в упомянутом упражнении, представляет момент относительно оси вращения, происходящий от большего или меньшего притока пара в распределительную коробку цилиндра. В возмущенном движении, начиная от установившегося движения, при котором угол наклона φ ручек регулятора к вертикали имеет постоянное значение φ_0, этот момент, в силу того, что регулятор пропускает больше пара, если рукоятки с шарами больше расходятся, и пропускает пара меньше, если они, опускаясь, сходятся, будет иметь всегда знак, противоположный отклонению угла φ от значения φ_0. Поэтому Q_θ можно представить как функцию от разности $\varphi-\varphi_0$, имеющую восстанавливающий характер, и в первом приближении (гл. I, п. 17) положить $Q_\theta=$ $=\lambda(\varphi-\varphi_0)$ при постоянном положительном λ.



Фиг. 24.

Проверить теперь, что уравнения движения будут удовлетворяться значениями $\varphi=\varphi_0$ и $\dot\theta=\dot\theta_0$ при $\dot\theta_0^2=\frac{g}{l\cos\varphi_0}$. Это решение, меростатическое для уравнений движения регулятора, можно, очевидно, прямо рассматривать как статическое, если в этих уравнениях за неизвестные принимаются, вместо φ и θ, φ и $\dot\theta$.

Уравнения малых колебаний вблизи этого решения получатся согласно общему правилу п. 19, если положить $\varphi=\varphi_0+\psi$, $\dot\theta=\dot\theta_0+\omega$ и рассматривать ψ и ω как количества первого порядка малости. Таким образом, мы придем к двум уравнениям:

$$I_0\dot\omega+ml^2\dot\theta_0\sin 2\varphi_0\,\dot\psi+\lambda\psi=0,$$

$$\ddot\psi-\dot\theta_0\sin 2\varphi_0\,\omega+\left(\frac{g}{l}\cos\varphi_0-\dot\theta_0^2\cos 2\varphi_0\right)\psi=0,$$

где I_0 представляет собой величину I при $\varphi=\varphi_0$.

Показать, что отыскание решений вида

$$\omega=\lambda_1 e^{zt}, \quad \psi=\lambda_2 e^{zt},$$

при постоянных λ_1, λ_2, z, приводит к характеристическому уравнению

$$\left(\frac{C}{2ml^2}+\sin^2\varphi_0\right)z^3+\dot\theta_0^2\sin^2\varphi_0\left(1+3\cos^2\varphi_0-\frac{C}{2ml^2}\right)z+$$
$$+\frac{\lambda}{2ml^2}\dot\theta_0\sin 2\varphi_0=0.$$

Убедиться, что это уравнение третьей степени допускает один (действительный) отрицательный корень z_1; показать, далее, что если два других корня z_2, z_3 действительны, то по крайней мере один из них будет положительным, а если они комплексны, то оба имеют положительную действительную часть.

Наконец, из предыдущего вывести, что во всех случаях мы будем иметь неустойчивость.

Этот теоретический вывод согласуется с экспериментально установленным фактом, состоящим в том, что регулятор Уатта не достигает вполне своего назначения, потому что действует слишком быстро как при открывании, так и при закрывании клапана для впускания пара. Поэтому в современных машинах прибегают к приборам более совершенным. См. с этой целью W. Hort, Technische Schwingungslehre; 2-е изд., Berlin, 1922; § 62—65.

9. Перенос колебаний с одной степени свободы на другую. Пусть ξ и η — две лагранжевы координаты голономной системы с каким угодно числом степеней свободы, со связями, не зависящими от времени, и находящейся под действием консервативной системы сил. Рассмотрим колебания системы около одного из ее положений равновесия, соответствующего для определенности нулевым значениям ξ и η, и предположим, что эти две координаты, если и не являются сами нормальными, то представляют собой линейные комбинации с постоянными коэффициентами (и, само собой разумеется, независимые) некоторых двух нормальных координат системы.

Следовательно, выражения ξ и η в функциях от времени получатся, если составим линейные комбинации с постоянными коэффициентами из двух гармонических колебаний (главных)

$$r_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1), \qquad r_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2).$$

Заслуживает внимания частный случай, когда ξ и η определяются, по крайней мере до постоянного множителя, соответственно в виде суммы и разности двух нормальных координат, так что при постоянных h и k мы имеем

$$\frac{\xi}{h} = r_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + r_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2),$$

$$\frac{\eta}{k} = r_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) - r_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2).$$

Полагая, как в примере 6, $\omega_1 = \omega - \varepsilon$, $\omega_2 = \omega + \varepsilon$ и применяя к выражениям ξ/h и ξ/k те же преобразования, выполненные там над выражением одного только x, мы придем к выражениям вида $r\cos(\omega t + \theta)$, где величина r, если она относится к ξ/h, определяется, как мы видели, из уравнения

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(2\varepsilon t + \theta_2 - \theta_1);$$

аналогичное уравнение для r', относящегося к координате η/k, получается из предыдущего изменением в нем знака у r_2.

Отсюда следует, что когда r достигает своего наибольшего значения $r_1 + r_2$, то r', наоборот, достигает своего наименьшего значения $|r_1 - r_2|$, и обратно. Это становится особенно наглядным в случае, когда ε мало в смысле, разъясненном в упражнении 6, и r_1 приблизительно равно r_2. При этом предположении мы имеем за интервалы времени продолжительности $\pi/2\varepsilon$ попеременно максимальные колебания для одной из двух координат и минимальные (приблизительно покой) для другой. Это и есть так называемое явление переноса колебаний с одной степени свободы на другую.

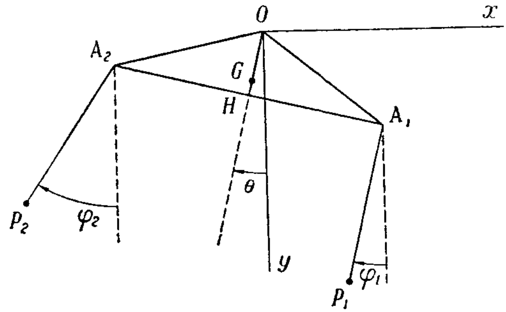
10. Явление Бернулли. Явление, рассмотренное в предыдущем упражнении, впервые было описано Д. Бернулли, наблюдавшим его в случае колебательных движений двух чашек весов.

Чтобы дать себе отчет в этом конкретном случае, обратимся к следующей схеме прибора. Тяжелый твердый треугольник AO_1A_2 $(OA_1 = OA_2 = a)$

(фиг. 25) может вращаться в вертикальной плоскости вокруг O. К точкам A_1, A_2 подвешены на шарнирах в той же самой вертикальной плоскости посредством двух твердых стержней A_1P_1, A_2P_2 равной длины l и ничтожной массы два шарика с одинаковыми массами, равными m. Очевидно, что речь идет о голономной системе с тремя степенями свободы, поскольку за лагранжевы параметры можно принять углы θ, φ_1, φ_2, которые образуют с вертикалью высота OH треугольника и два маятника A_1P_1 и A_2P_2.

Принимая за систему отсчета вертикаль Oy, направленную вниз, и горизонталь Ox, направленную произвольно, и считая углы положительными при вращении в направлении от Ox к Oy (через прямой угол), вычислим живую силу T системы и потенциал U, соответствующий ее весу, имея в виду, что мы будем изучать малые колебания в окрестности конфигурации равновесия $\theta=\varphi_1=\varphi_2=0$.

Живую силу T можно рассматривать как сумму живых сил твердого треугольника и двух шариков. Первая равна $I\dot{\theta}^2/2$, где I обозначает момент



Фиг. 25.

инерции треугольника относительно точки O, а остальная часть определяется выражением

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2),$$

где x_1, y_1, x_2, y_2 суть координаты точек P_1 и P_2; если положим $\alpha=\widehat{HOA_2}=\widehat{A_1OH}$, то для координат найдем выражения

$$x_1=a\sin(\alpha-\theta)-l\sin\varphi_1,\quad x_2=-a\sin(\alpha+\theta)-l\sin\varphi_2,$$
$$y_1=a\cos(\alpha-\theta)+l\cos\varphi_1,\quad y_2=a\cos(\alpha+\theta)+l\cos\varphi_2.$$

В окрестности конфигурации равновесия $\theta=\varphi_1=\varphi_2=0$ три параметра Лагранжа и их первые производные по времени можно рассматривать как величины первого порядка, так что, дифференцируя по t предыдущие формулы и пренебрегая членами порядка выше первого, можно принять

$$\dot{x}_1=-a\dot{\theta}\cos\alpha-l\dot{\varphi}_1,\quad \dot{x}_2=-a\dot{\theta}\cos\alpha-l\dot{\varphi}_2,$$
$$\dot{y}_1=a\dot{\theta}\sin\alpha,\qquad \dot{y}_2=-a\dot{\theta}\sin\alpha.$$

В результате получим

$$2T=I\dot{\theta}^2+m\{2a^2\dot{\theta}^2+l^2(\dot{\varphi}_1^2+\dot{\varphi}_2^2)+2al\cos\alpha\dot{\theta}(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2)\}.$$

Что же касается потенциала, то, обозначив через G центр тяжести треугольника, который, очевидно, является точкой, лежащей на высоте OH, положив $OG = \rho_0$ и обозначив через m_0 массу треугольника, очевидно, будем иметь

$$U = g\{m_0\rho_0 \cos\theta + m(y_1 + y_2)\} + \text{const}.$$

Достаточно принять во внимание выражения y_1, y_2 и пренебречь членами порядка выше второго (вспомним из п. 13, что в конфигурации равновесия можно принять $U = 0$ и что здесь существенными членами будут члены второго порядка, потому что члены первого порядка исчезают), чтобы привести потенциал к виду

$$U = -\frac{1}{2} g\{(m_0 l_0 \rho_0 + 2am\cos\alpha)\theta^2 + lm(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\},$$

который, очевидно, имеет характер определенной отрицательной формы по отношению к аргументам θ, φ_1, φ_2.

Чтобы одновременно определить нормальные координаты и главные частоты, достаточно совместно привести к каноническому виду две квадратичные формы T и U (п. 13). Не прибегая к общему правилу, которое потребовало бы решения уравнения третьей степени, мы придем к цели путем двух последовательных линейных преобразований, которые приведут от θ φ_1, φ_2 к некоторым трем новым нормальным координатам ξ, η, ζ (в широком смысле, определенном в п. 13).

Выполним прежде всего подстановку, очевидно ортогональную,

$$\psi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{\sqrt{2}}, \qquad \xi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\sqrt{2}},$$

в результате которой, вводя безразмерные постоянные

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}\,a\cos\alpha}{l}, \qquad \mu^2 = \frac{I}{ml^2} + 2\frac{a^2}{l^2} = \frac{I}{ml^2} + \frac{\lambda^2}{\cos^2\alpha},$$

$$\nu^2 = \frac{m_0\rho_0 + 2ma\cos\alpha}{ml},$$

для T и U получим выражения

$$2T = ml^2\{\mu^2\dot\theta^2 + \dot\psi^2 + \dot\xi^2 + 2\lambda\dot\theta\dot\psi\},$$

$$U = -\frac{1}{2} mgl(\nu\theta^2 + \psi^2 + \xi^2).$$

Положим далее

$$\psi = \eta\cos\gamma + \zeta\sin\gamma, \quad \nu\theta = -\eta\sin\gamma + \zeta\cos\gamma,$$

где угол γ определяется на основании условия

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{2\lambda\nu}{\mu^2 - \nu^2}.$$

В переменных ξ, η, ζ формы T и U принимают ортогональный вид

$$T = \frac{1}{2} ml^2(\dot\xi^2 + b^2\dot\eta^2 + c^2\dot\zeta^2),$$

$$U = -\frac{1}{2} mgl(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2),$$

где

$$b^2 = \frac{\mu^2}{\nu^2}\sin^2\gamma + \cos^2\gamma - \frac{\lambda}{\nu}\sin 2\gamma,$$

$$c^2 = \frac{\mu^2}{\nu^2}\cos^2\gamma + \sin^2\gamma + \frac{\lambda}{\nu}\sin 2\gamma,$$

а отсюда непосредственно получается (п. 13), что квадраты главных частот определяются равенствами

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} b^2, \quad \omega_3^2 = \frac{g}{l} c^2.$$

Все это сохраняет свое значение и в общем случае. Примем теперь во внимание специальные условия, характеризующие явление, которое мы намерены истолковать, чтобы вывести из них некоторые оценки порядка величин для постоянных, которые входят в рассмотрение.

В условиях явления Бернулли a и l нужно рассматривать как количества одного и того же порядка, в то время как расстояние $OH = a\cos\alpha$, а следовательно, и подавно $OG = \rho_0$ должны считаться малыми (первого порядка) по сравнению с l; число λ будет поэтому величиной первого порядка. То же самое можно сказать о каждой из двух масс m по сравнению с массой m_0 рамы треугольника. Из этих предположений следует, что в выражении числа ν^2, которое можно написать в виде

$$\nu^2 = \frac{m_0\rho_0}{ml} + 2\frac{a\cos\alpha}{l},$$

второй член наверное мал; но они не позволяют сказать то же самое о первом члене, который может быть представлен в виде отношения двух малых величин ρ_0/l, m/m_0. Мы здесь дополним предположения, высказанные выше, допуская, что прибор сконструирован таким образом, чтобы первое отношение было мало по сравнению со вторым; на основании этого предположения ν^2 можно рассматривать как величину первого порядка.

Если, кроме того, возьмем снова постоянную μ^2 и в ее выражение вместо I подставим его значение $m_0\delta^2$, где δ есть соответствующий радиус инерции, то из выражения

$$\mu^2 = \frac{m_0}{m}\frac{\delta^2}{l^2} + \frac{\lambda^2}{\cos^2\alpha}$$

увидим, что, рассматривая $\lambda/\cos\alpha = \sqrt{2a}/l$ и δ/l как величины конечные, мы должны будем считать μ^2 за очень большую величину вследствие наличия множителя m_0/m, где m по предположению мало по сравнению с m_0.

Наконец, мы можем в данном случае воспользоваться еще тем, что как λ, так и ν^2 и $1/\mu^2$ можно рассматривать как малые величины первого порядка, а $\lambda^2/\cos^2\alpha$ считать конечным числом и при этом таким, что порядок величины членов с ν или $1/\mu$, при умножении на это число, не изменится. Конечно, из предположения, что ν^2 и $1/\mu^2$ будут первого порядка, не следует, что такими же будут ν и $1/\mu$; но речь идет все же о величинах тоже всегда малых и таких, о которых можно сказать, что они порядка $1/2$ и что в произведении они дают величину ν/μ первого порядка.

Заметим теперь, что выражение для $\operatorname{tg} 2\gamma$ может быть написано в виде

$$\frac{2\lambda\dfrac{\nu}{\mu^2}}{1 - \dfrac{\nu^2}{\mu^2}},$$

где числитель порядка выше первого (можно сказать порядка $5/2$), тогда как знаменатель близок к 1; поэтому, обозначая, как обычно, через (n) члены порядка не ниже n, можно положить

$$\gamma = \frac{\lambda\nu}{\mu^2}(1 + (2))$$

и, следовательно,

$$\cos^2\gamma = 1 + (5), \quad \sin^2\gamma = \frac{\lambda^2\nu^2}{\mu^4}(1 + (2)), \ \sin 2\gamma = \frac{2\lambda\nu}{\mu^2}(1 + (2)).$$

При этом порядке приближения непосредственно найдем

$$b^2 = 1 - \frac{\lambda^2}{\mu^2} + (5), \quad c^2 = \frac{\mu^2}{\nu^2} + (3)$$

или, пренебрегая только членами пятого порядка по сравнению с единицей (что позволяет пренебречь членами третьего порядка по сравнению с отношением μ^2/ν^2, которое самое большее есть величина второго порядка),

$$b^2 = 1 - \frac{\lambda^2}{\mu^2}, \quad c^2 = \frac{\mu^2}{\nu^2}.$$

Так как c оказывается очень большим, то же будет верно и для ω_2; а так как

$$\omega_2^2 = \omega_1^2\left(1 - \frac{\lambda^2}{\mu^2}\right),$$

то две главные частоты ω_1, ω_2, соответствующие координатам ξ, η, будут близки друг к другу.

С другой стороны, в силу малости γ координату ψ можно положить просто равной η, так что первоначальные координаты φ_1, φ_2 можно выразить в виде

$$\varphi_1 = \frac{\psi + \xi}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_2 = \frac{\psi - \xi}{\sqrt{2}};$$

они представятся, таким образом, в виде суммы и разности двух координат, из которых первая строго, а вторая приблизительно нормальна (в широком смысле). Поэтому будут приложимы рассуждения, изложенные в предыдущем упражнении.

11. Написать уравнения Лагранжа для тяжелой точки, удерживаемой без трения на эллиптическом параболоиде

$$2z = ax^2 + by^2,$$

где a и b обозначают две положительные постоянные, и ось z направлена вертикально вверх. Рассматривая, в частности, малые колебания около положения устойчивого равновесия $x = y = 0$, показать, что частоты главных колебаний суть $2\pi/a$ и $2\pi/b$. (См. упражнение 27 гл. II.)

12. Для живой силы T свободной точки с единичной массой в цилиндрических координатах ρ, θ, z (см., например, гл. II, п. 46) имеем выражение

$$T = \frac{1}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2 + \dot z^2).$$

Если сила, приложенная к точке, является производной от симметрического, т. е. не зависящего от θ, потенциала $U(\rho, z)$, то угол θ будет игнорируемой координатой, и мы будем иметь (гл. V, п. 42) интеграл момента количества движения относительно оси симметрии Oz

$$\rho^2\dot\theta = \text{const} = c.$$

Так как приведенная функция Лагранжа (гл. V, п. 46) имеет здесь вид

$$\mathfrak{L}^* = T + U - c\dot{\theta} = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2) + U - \frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho^2},$$

то движение, определяемое двумя лагранжевыми уравнениями для координат ρ и z, очевидно, будет таким, какое имела бы свободная точка на плоскости с декартовыми координатами ρ и z, если бы она находилась под действием консервативной силы, производной от потенциала

$$U(\rho, z) - \frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho^2}.$$

Проверить, что всякому возможному положению M равновесия в этом плоском движении соответствует в пространственной задаче меростатическое решение, а именно круговое равномерное движение с угловой скоростью c/ρ_0^2, где ρ_0 есть постоянная величина координаты ρ точки M (радиус круговой траектории). Постоянная интегрирования c связана с ρ_0 уравнением $c^2 = -\rho_0^3 a_1$, где a_1 обозначает величину $\partial U/\partial\rho$ в точке M.

Обозначая через a_{11}, a_{12}, a_{22} значения вторых производных от U в точке M по ρ и z, доказать, что условие (приведенной) устойчивости кругового движения определяется равенством

$$\left(a_{11} + \frac{3}{\rho_0}a_1\right)a_{22} - a_{12}^2 > 0.$$

13. Применить рассуждения предыдущего упражнения к случаю

$$U = \frac{k}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + gz,$$

при постоянных k и g, который, очевидно, соответствует совместному действию ньютонианского притяжения к полюсу и однородного поля силы. Доказать, что условие устойчивости меростатического кругового решения в этом случае можно истолковать в следующей геометрической форме: если 2α есть визуальный угол траектории относительно полюса (или, другими словами, α есть угол полураствора кругового конуса, проектирующего из полюса траекторию), то должно быть $\cos\alpha > 1/3$.

14. Подтвердить способом, аналогичным указанному в упражнении 12, что если в плоскости в полярных координатах ρ и θ рассматривается движение точки под действием центральной силы с симметрическим потенциалом $U(\rho)$, то возможны круговые движения, условие устойчивости которых определяется при обозначениях упражнения 12 неравенством

$$a_{11} + \frac{3}{\rho_0}a_1 > 0,$$

и рассмотреть, в частности, случай

$$U = -\frac{k}{(\nu - 1)\rho^{\nu-1}}$$

при постоянных k и ν, второе из которых отлично от 1.

Отметить, что этот случай соответствует центральной притягивающей или отталкивающей силе, по величине обратно пропорциональной ρ^ν, и снова найти условие $\nu < 3$ п. 10 гл. II.

15. Обращаясь к п. 47 гл. II, принять функцию Лагранжа в виде

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}[\dot{z}^2(1 - f'^2) + \dot{\theta}^2 f^2] + gz,$$

соответствующем движению тяжелой точки, которая удерживается без трения на поверхности вращения $\rho = f(z)$. Принимая во внимание интеграл $\dot\theta f^2 = c$, можно определить закон, по которому z изменяется с временем, посредством уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}^*}{\partial \dot z} - \frac{\partial \mathfrak{L}^*}{\partial z} = 0,$$

где $\mathfrak{L}^*$ — приведенная функция Лагранжа

$$\mathfrak{L}^*(z, \dot z) = \mathfrak{L} - c\dot\theta = \frac{1}{2}\dot z^2(1 + f'^2) + gz - \frac{1}{2}\frac{c^2}{f^2}.$$

Проверить, что уравнение относительно z допускает статическое решение $z = z_0 = \text{const}$, если z_0 и c связаны соотношением

$$c^2 = -g\frac{f_0^3}{f_0'},$$

где индексом 0 отмечаются значения f и ее производных при $z = z_0$.

Всякому такому решению будет соответствовать на поверхности равномерное движение по параллели с высотой $z = z_0$.

Вывести из предыдущих формул, что эти круговые движения возможны только вдоль параллелей той зоны поверхности, где она обращена вогнутостью вверх.

Кроме того, полагая в $\mathfrak{L}^*$ $z = z_0 + \zeta$, определить уравнение малых колебаний вблизи решения $z = z_0$ и проверить, что условие устойчивости определяется неравенством

$$3f_0'^2 > f_0 f_0''.$$

16. В тексте мы рассматривали уравнения малых колебаний для голономной системы со связями, не зависящими от времени, и находящейся под действием консервативных сил. Если система допускает игнорируемые координаты и вычисляется приведенная функция Лагранжа, то появляются, как мы знаем (гл. V, п. 46), гиростатические члены. В п. 24 мы указали форму (30), которая в этом случае свойственна уравнениям малых колебаний около положения устойчивого равновесия; было показано, что гиростатические члены не влияют на интеграл энергии, из рассмотрения которого также и в этом случае становится очевидной устойчивость на основании критерия Дирихле.

Предполагая, что речь идет о действительном устойчивом равновесии, можно распространить на этот случай результат п. 13, заключающийся в том, что малые колебания всегда будут составляться из некоторого числа n чисто гармонических колебаний.

Доказательство по существу основывается на том обстоятельстве, что если положить, как в п. 27, $x_h = \lambda_h e^{i\omega t}$, то постоянная ω^2 должна будет удовлетворять алгебраическому уравнению n-ой степени с существенно положительными корнями[1]).

17. Система (31') п. 25 определяет малые колебания в наиболее общем случае, когда входят одновременно гиростатические и диссипативные действия. Соответственно решениям

$$z_k = \lambda_k e^{zt} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

[1]) См. Е. Т. Уиттекер, Аналитическая динамика, 1937, гл. VII, § 84.

где λ_k и z суть подлежащие определению постоянные, уравнения (31′) принимают вид

$$\sum_{k=1}^{n} u_{hk}\lambda_k = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{76}$$

где для краткости положено

$$u_{hk} = \alpha_{hk}z^2 + (\gamma_{hk} + e_{hk})z - \beta_{hk} \quad (h, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Характеристическое уравнение степени $2n$ относительно z будет, следовательно,

$$u(z) = \| u_{hk} \| = 0,$$

и приводится, как это естественно, к виду (28′), когда отсутствуют гиростатические и диссипативные действия.

18. Обозначая через λ_h, λ'_h n пар произвольных чисел, введем для квадратичной формы, которую мы будем рассматривать как живую силу, и для ее полярной формы обозначения

$$T_{\lambda\lambda} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} \alpha_{hk}\lambda_h\lambda_k, \qquad T_{\lambda\lambda'} = T_{\lambda'\lambda} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} \alpha_{hk}\lambda_h\lambda'_k$$

и припишем аналогичные значения символам $\Psi_{\lambda\lambda}$, $\Psi_{\lambda\lambda'} = \Psi_{\lambda'\lambda}$, $V_{\lambda\lambda}$, $V_{\lambda\lambda'} = V_{\lambda'\lambda}$, соответствующим квадратичным формам, которые будем истолковывать как диссипативную функцию и потенциальную энергию (п. 25)

$$\Psi = \frac{1}{2}\sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} \gamma_{hk}\dot{z}_h\dot{z}_k, \quad V = -(T_0 + U) = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} \beta_{hk}z_hz_k.$$

Если, в частности, λ_h имеют то же значение, что и в предыдущем упражнении, то из определяющих эти величины уравнений следует, что

$$\sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} u_{hk}\lambda_h\lambda_k = 0.$$

Проверить, что в силу тождеств $e_{hk} + e_{kh} = 0$ соотношение это можно написать в виде

$$z^2T_{\lambda\lambda} + 2z\,\Psi_{\lambda\lambda} + V_{\lambda\lambda} = 0,$$

и вывести отсюда, что если квадратичная форма V является также определенной положительной (как это бывает, когда решение $y_k = 0$ является устойчивым), то всякий действительный характеристический показатель необходимо должен быть отрицательным.

Можно доказать более общее предположение: *если отсутствуют гиростатические члены ($e_{hk} = 0$), но входят диссипативные действия, то каждый характеристический показатель z имеет действительную часть существенно отрицательную.*

Чтобы установить этот результат, достаточно рассмотреть случай комплексного z, $z = \mu + i\nu$, при $\nu \neq 0$, так как предположение $\nu = 0$ уже рассмотрено ранее.

Вместе с z корнем характеристического уравнения (с действительными коэффициентами) будет также и сопряженная с ним величина $\bar{z} = \mu - i\nu$, которой будут соответствовать решения вида

$$y_k = \bar{\lambda}_k e^{\bar{z}t} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

где $\bar{\lambda}_k$ обозначают величины, сопряженные с λ_k.

Обозначая через $\bar{u}_{hk}$ трехчлены

$$\alpha_{hk}\bar{z}^2 + \gamma_{hk}\bar{z} - \beta_{hk} \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n),$$

сопряженные с u_{hk}, будем одновременно иметь

$$\sum_{k=1}^{n} u_{hk}\lambda_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} \bar{u}_{hk}\bar{\lambda}_k = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

а отсюда следуют два уравнения

$$\sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} u_{hk}\bar{\lambda}_h\lambda_k = 0, \quad \sum_{\substack{h=1\\k=1}}^{n} \bar{u}_{hk}\lambda_h\bar{\lambda}_k = 0,$$

которые, благодаря отсутствию антисимметричных коэффициентов e_{hk}, можно написать также в виде

$$z^2 T_{\lambda\bar{\lambda}} + 2z\Psi_{\lambda\bar{\lambda}} + V_{\lambda\bar{\lambda}} = 0, \quad \bar{z}^2 T_{\lambda\bar{\lambda}} + 2\bar{z}\Psi_{\lambda\bar{\lambda}} + V_{\lambda\bar{\lambda}} = 0,$$

т. е. они приводятся к одному и тому же уравнению второй степени, удовлетворяющемуся как величиной z, так и $\bar{z}$. Отсюда получим

$$\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \mu = -\frac{\Psi_{\lambda\bar{\lambda}}}{T_{\lambda\bar{\lambda}}};$$

так как Ψ и T являются определенными положительными формами, а аргументы λ и $\bar{\lambda}$ сопряжены между собой, то заключаем согласно утверждению, что $\mu < 0$[1]).

19. Вынужденные колебания голономной системы, находящейся под действием консервативных сил в окрестности конфигурации устойчивого равновесия, в нормальных координатах x_h определяются уравнениями вида

$$\ddot{x}_h + \omega_h^2 x_h = X_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

где ω обозначают постоянные главных частот свободных колебаний и X являются лагранжевыми составляющими добавочных сил. Как и в случае одной степени свободы (гл. I, пп. 61, 62), наиболее интересным с физической точки зрения видом добавочных сил являются периодические силы. Даже и здесь, в силу линейности уравнений малых колебаний, если x'_h, x''_h суть общие интегралы, соответствующие силам X'_h, X''_h, то $x'_h + x''_h$ будет наибо-

[1]) См. Рэлей, Теория звука, 1941, т. I, § 103а.

лее общим решением, соответствующим составной силе $X'_h + X''_h$; это замечание распространяется и на случай скольких угодно составляющих сил. Это обстоятельство, как было отмечено в п. 66 гл. I, позволяет привести случай произвольной периодической силы к сумме сил или постоянных, или синусоидальных. В случае постоянных сил мы приходим к задаче о смещении равновесия (§ 2), так что, в конечном счете, остается только рассмотреть предположение, что силы имеют вид $\xi_h \sin \Omega t$, где ξ_h и Ω постоянные.

При этом предположении *для каждой нормальной координаты* сохраняют силу рассуждения п. 64 гл. I; в случае, когда Ω отлична от всех ω_k, можно указать для отдельных x_k синусоидальные колебания, имеющие тот же период, что и X_k, т. е., еще точнее, выражения вида $\lambda_k \sin \Omega t$, где λ_k имеют значения $\xi_k/(\omega_k^2 - \Omega^2)$.

В более общем случае, когда будут входить гиростатические и диссипативные действия, уравнения вынужденных колебаний в окрестности конфигурации устойчивого равновесия, на основании уравнений (31) п. 25 будут иметь вид

$$\ddot{x}_h + \omega_h^2 x_h + \sum_{k=1}^{n} (e_{hk} + \gamma_{hk}) \dot{x}_h = X_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n);$$

также и здесь, на основании того, что было сказано выше, нужно по существу сосредоточить внимание на случае, когда X_h будут вида $\xi_h \sin \Omega t$.

Далее, как известно из теории линейных дифференциальных уравнений и как, к тому же, это было показано при изложении §§ 5, 6, действительное отыскание соответствующих решений аналитически будет выполняться особенно легко и быстро, если вместо синусоидальных функций $X_h = \xi_h \sin \Omega t$ мы будем рассматривать комплексные показательные функции (при действительных ξ_h)

$$X_h = \xi_h e^{i\Omega t} = \xi_h (\cos \Omega t + i \sin \Omega t) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

и в соответствии с этим будем искать решение в виде

$$\lambda_h e^{i\Omega t} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

где λ_h обозначают комплексные постоянные. Когда будет найдено одно такое решение и мы, как это всегда возможно, положим

$$\lambda_h = j_h e^{-i\theta_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

при действительных j_h, θ_h и $j_h \geqslant 0$, тогда для x_h будем иметь выражения

$$x_h = j_h e^{i(\Omega t - \theta_h)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

которые с их составляющими по действительной и по мнимой осям, равными

$$j_h \cos(\Omega t - \theta_h), \; j_h \sin(\Omega t - \theta_h) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

дадут прямо решения, соответствующие силам

$$\xi_h \cos \Omega t, \; \xi_h \sin \Omega t \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Эти последние представляют действительные части и коэффициенты при мнимой единице i во вспомогательном комплексном выражении силы, введенном в рассмотрение искусственным аналитическим приемом.

Далее, $x_h = \lambda_h e^{i\Omega t}$ (при комплексных λ_h) будут действительно решениями указанных выше уравнений вынужденных колебаний при $X_h = \xi_h e^{i\Omega t}$ (ξ_h действительные числа), если n комплексных постоянных λ_h удовлетворяют n линейным уравнениям

$$(\omega_h^2-\Omega^2)\lambda_h+i\Omega\sum_{k=1}^{n}(e_{hk}+\gamma_{hk})\lambda_k=\xi_h \qquad (h=1,2,\ldots,n).$$

Так как по крайней мере хотя бы одна из величин ξ должна быть принята отличной от нуля, если мы не хотим возвратиться к свободным колебаниям, то речь идет о неоднородных уравнениях; следовательно, конечные и определенные решения будут существовать при условии, что будет отличен от нуля определитель

$$\nabla=\|\delta_{hh}(\omega_h^2-\Omega^2)+i(e_{hk}+\gamma_{hk})\|,$$

где $\delta_{hh}=1$ и $\delta_{hk}=0$ при $h\neq k$.

При отсутствии гиростатических и диссипативных действий, т. е. при $e_{hk}=\gamma_{hk}=0$, этот определитель, очевидно, не будет исчезать при единственном условии, что величина Ω отлична от всех ω_h. Поэтому в общем случае наверное будем иметь $\nabla\neq 0$, когда $\Omega\neq\omega_h$ (при $h=1,2,\ldots,n$), а коэффициенты e и γ достаточно малы.

При таком предположении решения λ_h предыдущих линейных уравнений, вообще говоря, будут комплексными числами, которые, если отделить в соответствующих экспоненциальных выражениях x_h действительную часть от мнимой, представят, как это уже было показано, колебания, имеющие тот же период, что и период добавочной силы; кроме того, для всякого отдельного x_h можно определить запаздывание фазы θ_h.

Рассматривая e_{hk}, γ_{hk} как количества первого порядка, доказать, что решение указанных выше линейных уравнений дает

$$\lambda_h=\frac{\xi_h}{\omega_h^2-\Omega^2}-i\Omega\sum_{k=1}^{n}(e_{hk}+\gamma_{hk})\frac{\xi_k}{\omega_k^2-\Omega^2} \qquad (h=1,2,\ldots,n).$$

Отсюда с тем же приближением следует, что

$$j_h=\left|\frac{\xi_h}{\omega_h^2-\Omega^2}\right|,$$

и при $\xi_h=0$

$$\theta_h=\pm\frac{\pi}{2},$$

при $\xi_h\neq 0$

$$\theta_h=\frac{\omega_h^2-\Omega^2}{\xi_h}\sum_{k=1}^{n}(e_{hk}+\gamma_{hk})\frac{\xi_k}{\omega_k^2-\Omega^2}.$$

20. Если относительно нормальных координат X_h', X_h'' являются составляющими двух различных добавочных синусоидальных сил, имеющих одну и ту же частоту Ω, и x_h', x_h'' обозначают выражения, которые имеют координаты при вынужденных колебаниях, вызываемых этими силами, то при отсутствии гиростатических действий имеем *(теорема взаимности)*

$$\sum_{h=1}^{n}X_h'x_h''=\sum_{h=1}^{n}X_h''x_h'.$$