

ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОЙ ТОЧКИ И ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ПО ЗАДАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

§ 1. Общие соображения. Первые интегралы

1. Рассмотрим прежде всего движение свободной материальной точки P , находящейся под действием силы F . Заметим при этом, что наиболее важными конкретными задачами, приводящими к движению свободной точки (или системы точек) будут:

1°. Баллистические задачи, при решении которых приходится принимать во внимание, что система отсчета, связанная с землей, не является галилеевой, если траектория имеет значительные размеры.

2°. Задачи небесной механики. Мы уже видели (т. I, гл. VII, § 9), что, исходя из основного уравнения $ma = F$, можно получить, проектируя его на оси галилеевой системы координат, три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= X(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}|t), \\ m\ddot{y} &= Y(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}|t), \\ m\ddot{z} &= Z(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}|t). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Задача об определении движения свободной точки сводится к интегрированию этой системы дифференциальных уравнений второго порядка по отношению к трем неизвестным функциям x, y, z от одной независимой переменной t , так что при предположенных условиях для точки P возможны ∞^6 отличных друг от друга движений в соответствии с возможным выбором шести произвольных постоянных, от которых зависит общее решение системы (1).

Чтобы выбрать одно из этих движений, необходимо добавить столько дополнительных условий, сколько будет достаточно для определения шести постоянных интегриации. Наиболее простой и обычный способ для этой цели состоит в указании положения и скорости, которые движущаяся точка должна иметь в заданное мгновение (удобнее всего в начальный момент движения).

Отметим также, что интегралы системы (1), вообще говоря, не могут быть получены в конечной форме, и интегрирование выполняется только при помощи разложения в ряды.

Добавим еще, что в каждом случае, чтобы облегчить решение задачи, надо стараться определить какой-нибудь *первый* интеграл системы (1). Так называют всякое соотношение вида

$$f(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}|t) = \text{const}, \quad (2)$$

которое является *необходимым* следствием уравнений (1), т. е. тождественно удовлетворяется при подходящем значении постоянной в правой части всякой отдельно взятой тройкой функций x , y , z , удовлетворяющих системе (1), и не содержит вторых производных от неизвестных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Знание первых интегралов явно облегчает интегрирование системы (1), так как позволяет заменить все уравнения движения или часть их (смотря по тому, будут ли найдены три независимых первых интеграла относительно \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} или меньше трех) уравнениями типа (2), являющимися уравнениями первого порядка.

Если удастся найти более трех независимых интегралов, можно будет произвести дальнейшие упрощения.

2. Существует довольно широкая категория сил, для которых легко найти первые интегралы:

а) Предположим, например, что сила F , приложенная к материальной точке P , *постоянно перпендикулярна к некоторой неподвижной прямой* (или, в частности, равна нулю). Примем эту прямую за ось z , тогда наше предположение будет равносильно условию $Z=0$, поэтому третье уравнение системы (1) при интегрировании даст

$$m\dot{z} = c_1, \quad mz = c_1t + c_2.$$

Это два простейших интеграла, второй из которых есть не что иное, как общий интеграл первого; первый же интеграл, очевидно, показывает, что составляющая количества движения по оси z , т. е. по неподвижной оси, перпендикулярной, по предположению, к направлению действующей силы, остается постоянной. Он называется поэтому *интегралом количества движения*.

Второй интеграл показывает, что соответствующая координата есть линейная функция времени.

б) В качестве следующего примера рассмотрим случай, когда *сила F постоянно пересекает неподвижную прямую* (или, в частности, равна нулю). То же будет иметь место в силу уравнений (1) и для вектора ta , приложенного к точке P . Отсюда следует, что момент этого вектора относительно рассматриваемой неподвижной прямой равен нулю. Но если примем эту прямую за ось z , то этот момент (скалярный) определится соответствующей составляющей векторного произведения $\overline{OP} \times ta$, откуда получим уравнение

$$m(x\ddot{y} - y\ddot{x}) = 0, \quad (3)$$

которое сразу же дает первый интеграл

$$m(x\dot{y} - y\dot{x}) = \text{const}. \quad (4)$$

Этот первый интеграл носит название *интеграла площадей* или *интеграла момента количества движения*, так как он выражает

постоянство секторной скорости (т. I, гл. II, п. 20) проекции точки P на плоскость $z=0$ или (что сводится к тому же), постоянство момента количества движения точки относительно оси z .

Если существует первый интеграл (4), то можно сказать, что движение подчиняется *закону площадей* на плоскости $z=0$ относительно точки O ; написав этот интеграл в виде

$$x\dot{y} - y\dot{x} = c, \quad (5)$$

будем иметь постоянную c (удвоенную секторную скорость относительно точки O проекции точки P на плоскость $z=0$), называемую *постоянной площадей*.

Поэтому можно сказать, что *для движения точки под действием силы, постоянно пересекающей некоторую ось, на любой плоскости, перпендикулярной к этой оси, имеет место закон площадей относительно точки, в которой рассматриваемая плоскость пересекает ось.*

Таким же образом, если сила постоянно пересекает ось x или ось y , мы будем иметь соответственно тот или другой из двух первых интегралов

$$m(y\dot{z} - z\dot{y}) = \text{const}, \quad m(z\dot{x} - x\dot{z}) = \text{const}.$$

Если, далее, речь идет о *центральной* силе F (т. I, гл. VII, п. 29, в) и точка O есть ее центр, то ускорение a точки P в силу своей пропорциональности силе F в любом положении точки будет проходить через O (или, в частности, будет равно нулю). Вследствие этого движение будет *центральной*, и будет иметь место уравнение

$$\overrightarrow{OP} \times \mathbf{v} = c, \quad (6)$$

выражающее постоянство секторной скорости относительно точки O в векторной форме. Это уравнение равносильно системе трех первых интегралов, написанных выше (интегралов площадей относительно трех координатных осей с началом в точке O).

Из уравнения (6), как мы знаем (т. I, гл. II, пп. 46—47), следует, что движение будет плоским и, еще точнее, будет происходить в плоскости, проходящей через центр.

в) Если сила F , приложенная к точке P , *консервативна*, то уравнения (1) допускают, как мы знаем (т. I, гл. VIII, п. 11), *интеграл* (первый) *живых сил*

$$T - U = E,$$

где согласно обычным обозначениям T есть живая сила точки, U — потенциал силы и E — полная энергия (постоянная).

§ 2. Движение точки под действием центральной силы

3. Наиболее известным примером динамической задачи, которая благодаря наличию соответствующего числа первых интегралов оказывается интегрируемой в квадратурах, является задача о движении свободной точки под действием *центральной* силы F .

В этом случае, как мы видели в предыдущем пункте (б), прежде всего существует векторный интеграл площадей (б); движение, следовательно, происходит в некоторой плоскости, проходящей через центр силы O . Эту плоскость движения удобно принять за одну из координатных плоскостей, например за плоскость $z = 0$, в силу чего из трех (скалярных) интегралов площадей

$$\dot{z} - z\dot{y} = \text{const}, \quad z\dot{x} - x\dot{z} = \text{const}, \quad x\dot{y} - y\dot{x} = \text{const},$$

два первых сведутся к тождеству, так как в любой момент z и \dot{z} (а также и соответствующие постоянные в правой части) будут равны нулю, третье же уравнение

$$x\dot{y} - y\dot{x} = c$$

дает действительно соотношение между двумя неизвестными координатами и их производными.

С другой стороны, F как центральная сила консервативна (т. I, гл. VII, п. 29, в); точнее, если, как это обычно принято в теории центральных сил, обозначим через r расстояние OP и через $\varphi(r)$ составляющую по направленной прямой OP силы F (отнесенной к единице массы), то потенциал U будет определенной функцией от r (по крайней мере с точностью до аддитивной постоянной), определяемой равенством

$$\frac{dU}{dr} = \varphi(r), \quad (7)$$

т. е.

$$U(r) = \int_{r_0}^r \varphi(r) dr.$$

На основании п. 2, б в этом случае имеет место интеграл живых сил; если для простоты за единицу массы принять массу движущейся точки, то этот интеграл примет вид:

$$\frac{v^2}{2} - U(r) = E; \quad (8)$$

из существования двух первых интегралов (5) и (8), как мы увидим, и вытекает интегрируемость в квадратурах задачи (приведенной к плоскости xy) о движении свободной точки под действием центральной силы.

Заметим еще, что в плоскости движения xu неизвестными являются координаты x , y движущейся точки P , и обе эти неизвестные можно определить (с точностью до начальных условий) из уравнений, представляющих два первых интеграла (5) и (8) и составляющих систему двух дифференциальных уравнений первого порядка. Интегрирование этой системы введет две произвольные постоянные, так что, если мы примем во внимание, что c и E тоже являются постоянными (постоянная площадей и постоянная энергии), то увидим, что рассматриваемое нами движение зависит от четырех произвольных постоянных.

Далее, если движение относится к произвольным осям, то необходимы еще два параметра для определения плоскости движения (проходящей через центр O), так что окончательно получится шесть произвольных постоянных, т. е. как раз столько, сколько и должно появиться в общем интеграле всякой задачи о движении свободной точки под действием какой угодно силы.

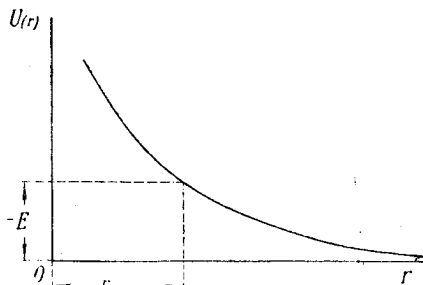
4. Прежде чем приступить к интегрированию системы (5), (8), остановимся немного на одном замечании качественного характера, относящемся к случаю, когда полная энергия E движущейся точки оказывается отрицательной и потенциал U при беспредельном возрастании r стремится к конечному пределу. Пользуясь произволом выбора аддитивной постоянной интегрирования, этот предел можно всегда сделать равным нулю, как в случае потенциала Ньютона.

Из интеграла живых сил следует, что $U(r) \geq -E$, так как $v^2 \geq 0$. Если $E < 0$, то $(-E)$ есть наименьшее возможное значение функции $U(r)$ при движении точки. Отсюда, ввиду того, что при $r \rightarrow \infty$ потенциал $U(r)$ исчезает, следует, что при движении точки r имеет конечный верхний предел (фиг. 11). Таким образом мы видим, что если потенциал $U(r)$ центральной силы в бесконечности есть правильная функция, а полная энергия движущейся точки отрицательна, то вся орбита расположена на конечном расстоянии.

В случае притягивающих сил, так как

$$\varphi(r) < 0, \quad U(r) = - \int_r^{\infty} \varphi(r) dr > 0,$$

полная энергия E может оказаться отрицательной, тогда как в случае отталкивающих сил она всегда положительна, так что



Фиг. 11.

в этом последнем случае только что сделанное замечание неприложимо.

5. Обращаясь теперь к интегрированию системы (5), (8), начнем с преобразования ее. Отнесем ее к полярным координатам r и θ , имеющим полюс в точке O и полярную ось, направленную по оси x . На основании известных формул (см. т. I, гл. II, п. 19, 20)

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta; \quad x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\theta}, \quad v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

получим дифференциальные уравнения задачи в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{r}^2\dot{\theta} &= c, \\ \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) &= U(r) + E. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Прежде всего полезно рассмотреть частный случай, когда постоянная площадей c равна нулю. Если исключим не имеющее интереса предположение о состоянии покоя точки P в центре силы ($r=0$), то будем иметь $\dot{\theta}=0$, т. е. $\theta = \text{const}$, так что в данном случае речь идет о прямолинейном движении (вдоль прямой, проходящей через центр), и исследование закона движения, т. е. определение r в функции от t , сведется к изучению уравнения живых сил, которое принимает вид

$$\dot{r}^2 = 2[U(r) + E].$$

За исключением различия в обозначениях мы снова получим уравнение типа, подробно разобранный в § 6 предыдущей главы. Применяя непосредственно полученные там выводы, мы заключаем, что возможными движениями будут колебательные периодические движения (между простыми нулями функции $U(r) + E$, где она остается положительной) или аperiodические самое большее с одним обращением направления. В этом последнем случае речь будет идти либо о движении к асимптотической точке на конечном расстоянии (т. е. к кратным нулям функции $U(r) + E$), либо о движении к бесконечно удаленной точке (если в направлении начальной скорости не встретится ни одного нуля функции $U(r) + E$). Наконец, возможны и состояния равновесия (во всяком возможном кратном нуле функции $U(r) + E$).

6. Принимая теперь постоянную c отличной от нуля, из закона площадей получим, что угол θ будет изменяться вместе с t всегда в одном и том же направлении, так как $\dot{\theta}$ постоянно имеет один и тот же знак. Не ограничивая общности, можно предположить, что $c > 0$ (так как в случае необходимости можно изменить положительное направление отсчета угла θ на обратное), так что θ будет возрастать вместе с t .

Можно получить теперь дифференциальное уравнение траектории (или *орбиты*, как часто говорят в теории центрального движения), исключая из уравнения (9) время и принимая за независимое переменное угол θ вместо t , что возможно, так как θ является монотонной функцией от t .

Если, интегрируя полученное таким образом дифференциальное уравнение, мы придем к полярному уравнению орбиты $r = r(\theta)$, то качественная картина движения получится из интеграла площадей

$$r^2 \dot{\theta} = c.$$

Именно, подставляя в это уравнение вместо r выражение его в функции от θ , мы получим дифференциальное уравнение, которое, очевидно, интегрируется посредством разделения переменных, т. е. посредством одной квадратуры, и дает выражение θ в функции от t , т. е. закон движения (по известной уже орбите).

7. Для того чтобы из уравнений (9) вывести дифференциальное уравнение, характеризующее неизвестное уравнение орбиты $r = r(\theta)$, достаточно рассмотреть в уравнении живой силы r как сложную функцию от t через посредство θ и исключить затем $\dot{\theta}$ при помощи уравнения площадей. Таким образом, для орбиты получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{c^2}{2} \left\{ \left(\frac{d}{d\theta} \frac{1}{r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right\} = U(r) + E. \quad (10)$$

Заметим еще, что уравнение (10) является первым интегралом дифференциального уравнения второго порядка, к которому можно прийти и прямым путем, прилагая к настоящему случаю формулу Бинэ (т. I, гл. II, п. 53). Эта формула, как мы знаем, дает выражение ускорения (радиального) для центрального движения, каким и является наше движение (п. 4). Если мы напишем, что ускорение (радиальное) движущейся точки (по предположению масса ее равна единице) должно быть равно соответствующей составляющей силы, т. е. $\varphi(r)$, то получим упомянутое уравнение второго порядка

$$-\frac{c^2}{r^2} \left(\frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) = \varphi(r). \quad (11)$$

Если возьмем производные от обеих частей уравнения (10) по θ и примем во внимание уравнение (7), то увидим, что уравнение (10) (зависящее от произвольной постоянной E) дает как раз первый интеграл уравнения (11).

Относительно уравнения (11) заметим еще, что, если выполнить замену зависимого переменного посредством соотношения

$$u = \frac{1}{r}, \quad (12)$$

то оно примет вид, который будет полезен в дальнейшем:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{1}{c^2 u^2} \varphi\left(\frac{1}{u}\right). \quad (11')$$

8. При изучении орбиты мы будем исходить из соответствующего дифференциального уравнения первого порядка (10). Если выполнить в нем замену зависимого переменного (12) и положить

$$\frac{2}{c^2} \left\{ U\left(\frac{1}{u}\right) + E \right\} - u^2 = \Phi(u), \quad (13)$$

то уравнение (10) примет вид

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \Phi(u); \quad (14)$$

если не обращать внимания на различие в обозначениях, то мы имеем здесь знакомое уравнение типа (8') из § 6 предыдущей главы.

Это уравнение интегрируется одной квадратурой, так что, принимая во внимание замечания п. 6, мы найдем, как уже упоминалось в п. 3, что *задача о движении свободной точки под действием центральной силы всегда может быть разрешена посредством двух квадратур.*

Более того, здесь благодаря самой форме дифференциального уравнения (14) мы можем предвидеть поведение u при изменении θ , т. е. геометрическую природу орбиты в каждом отдельном случае, на основе общих выводов § 6 предыдущей главы. Необходимо только в кинематической интерпретации заменить независимую переменную t геометрической величиной θ . Так, например, в наиболее интересном случае, когда начальное значение u_0 заключено в промежутке между двумя простыми нулями u_1 , u_2 (включая концы) функции $\Phi(u)$, между которыми $\Phi(u)$ является правильной и положительной, функция $u(\theta)$ при возрастании θ будет сколь угодно долго колебаться между крайними значениями u_1 , u_2 . При каждом прохождении u от u_1 до u_2 или обратно θ будет возрастать на некоторую постоянную величину Θ (аналогичную продолжительности τ одного простого колебания в § 6 предыдущей главы), которая (если положим $u_1 < u_2$) определится равенством

$$\Theta = \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{\Phi(u)}}. \quad (15)$$

Для того чтобы выяснить геометрический смысл этого результата, вспомним, что $u = \frac{1}{r}$: вся орбита разворачивается в круговом

кольце, заключенном между двумя концентрическими окружностями с центром в O и радиусами $r_1 = \frac{1}{u_1}$, $r_2 = \frac{1}{u_2}$, и касается последовательно то одной, то другой из этих окружностей таким образом, что разность углов двух последовательных точек касания всегда равна постоянной Θ . Эти точки касания называются апсидами и, поскольку они попеременно соответствуют максимумам и минимумам радиуса-вектора r , их обыкновенно различают, называя первые афелиями и вторые перигелиями, что связано с движением Земли вокруг Солнца (*ἥλιος*). Угол Θ , определяемый равенством (15), называется *апсидальным углом*.

Когда Θ соизмеримо с 2π , орбита будет замкнутой, в противном случае она должна бесконечное число раз обертываться вокруг центра. В последнем предположении посредством некоторого рассуждения (которого мы здесь не будем приводить, оставляя его до п. 39, где оно будет применено к особенно наглядному случаю) доказывается, что орбита *практически заполняет* круговое кольцо в том смысле, что, какую бы точку внутри кольца мы ни выбрали, орбита в конце концов пройдет от нее на расстоянии, меньшем любого наперед заданного числа.

9. Круговые орбиты. В частном случае, когда начальное значение u_0 переменной u есть кратный нуль функции $\Phi(u)$, u будет сохранять свое значение u_0 , как бы ни изменялся угол θ , и мы будем иметь простой, но особенно интересный случай *круговой орбиты* с радиусом $r_0 = \frac{1}{u_0}$, которая в силу закона площадей будет описываться с постоянной угловой скоростью $\frac{c}{r_0^2}$ и, следовательно, равномерно.

Изучение этих круговых орбит очень удобно связать с дифференциальным уравнением второго порядка (11'); если положим в этом уравнении

$$\Psi(u) = -\frac{1}{c^2 u^2} \varphi\left(\frac{1}{u}\right) - u, \quad (16)$$

то можно написать его в виде

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = \Psi(u). \quad (17)$$

Для того чтобы существовала орбита, удовлетворяющая этому уравнению, которая была бы окружностью с радиусом a , очевидно, необходимо и достаточно, чтобы это уравнение удовлетворялось постоянной $u_0 = \frac{1}{a}$, т. е. чтобы имело место равенство

$$\Psi(u_0) = 0. \quad (18)$$

Допуская существование такого нуля функции $\Psi(u)$, можно связать с соответствующей круговой орбитой изучение орбит, близких к ней, т. е. таких, для которых

$$u = u_0 + \varepsilon(\theta), \quad (19)$$

где неизвестную функцию $\varepsilon(\theta)$ для всех значений θ или по крайней мере для значений, лежащих в заданном интервале, можно рассматривать как бесконечно малую величину первого порядка. Допуская это и принимая во внимание соотношение (18), будем иметь

$$\Psi(u_0 + \varepsilon) = \varepsilon\Psi'(u_0),$$

если пренебречь членами, содержащими ε^2 . Из уравнения (17) и соотношения (19) мы получим для неизвестной функции $\varepsilon(\theta)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\theta^2} = \varepsilon\Psi'(u_0). \quad (20)$$

Так как это уравнение является линейным с постоянными коэффициентами, то оно может быть проинтегрировано в конечном виде (см. т. I, гл. II, пп. 43, 44).

Если $\Psi'(u_0) < 0$, то достаточно положить $\Psi'(u_0) = -\omega^2$, чтобы уравнению (20) придать вид

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\theta^2} + \omega^2\varepsilon = 0;$$

общее решение этого уравнения определяется равенством

$$\varepsilon = p \cos(\omega\theta + q), \quad (21)$$

где p и q — произвольные постоянные. При изменении θ функция ε будет колебаться между p и $-p$; если примем p достаточно малым по абсолютной величине, то будем иметь орбиту, определяемую равенством (19) и уклоняющуюся сколь угодно мало от круговой при всяком возможном значении θ . По этой причине круговая орбита, для которой $\Psi'(u_0) < 0$, называется *устойчивой*.

Орбита (19) пересекает круговую орбиту при тех значениях θ , при которых ε обращается в нуль. Апсидальный угол (разность аномалий между последовательными максимумом и минимумом ε , а следовательно, u и r), который в этом случае совпадает с разностью аномалий между двумя последовательными пересечениями с круговой орбитой, определится равенством

$$\frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\sqrt{-\Psi'(u_0)}},$$

как это следует из формулы (21). Когда $\Psi'(u_0) > 0$, равенство (20) перейдет в следующее:

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\theta^2} = \omega^2\varepsilon, \quad (22)$$

где

$$\omega = \sqrt{\Psi'(u_0)}.$$

Из выражения для общего решения

$$\epsilon = c_1 e^{\omega \theta} + c_2 e^{-\omega \theta}$$

видно, что, как бы ни выбирались начальные условия (постоянные интегрирования), функция ϵ по абсолютному значению в конце концов будет возрастать беспредельно при изменении θ в том или другом направлении. Поэтому предположение о том, что может существовать орбита, бесконечно близкая к круговой, на основании которого мы получили дифференциальное уравнение (20), оправдывается a posteriori только для достаточно малой дуги, т. е. для достаточно ограниченного интервала значений θ . К аналогичному заключению мы приходим и в том случае, когда $\Psi'(u_0) = 0$.

Естественно поэтому, в случае когда $\Psi'(u_0) \geq 0$, называть круговую орбиту, рассматриваемую в целом, *неустойчивой*.

Рассмотрим, например, случай центральной силы, обратно пропорциональной ν -ой степени расстояния от центра, т. е. предположим

$$\varphi(r) = \frac{k}{r^\nu} = k u^\nu \quad (23)$$

при постоянном (положительном или отрицательном) k .

На основании определения (16) функции $\Psi(u)$ будем иметь

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= -\frac{k}{c^2} u^{\nu-2} - u = -\frac{1}{c^2 u^2} \varphi\left(\frac{1}{u}\right) - u, \\ \Psi'(u) &= (2 - \nu) \frac{k}{c^2} u^{\nu-3} - 1 = \frac{2 - \nu}{c^2 u^2} \varphi\left(\frac{1}{u}\right) - 1. \end{aligned}$$

Из равенства $\Psi(u_0) = 0$ следует

$$\varphi\left(\frac{1}{u_0}\right) = -c^2 u_0^2$$

и поэтому

$$\Psi'(u_0) = \nu - 3.$$

Следовательно, при законе действия силы, определяемом равенством типа (23), круговые орбиты будут устойчивыми, если $\nu < 3$, и неустойчивыми, если $\nu \geq 3$.

10. Сила притяжения, пропорциональная расстоянию. В этом случае орбита представляет собой эллипс (в частности окружность или прямую) с центром в центре притяжения O . Это почти непосредственно следует из дифференциальных уравнений второго порядка (1) в декартовых координатах. Действительно, если ω^2 есть постоянное отношение величины силы (отнесенной к единице массы) к расстоя-

нию OP точки от центра, то для точки P с массой, равной 1, будем иметь два уравнения движения

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad \ddot{y} = -\omega^2 y,$$

из которых непосредственно следует, что проекции точки P на оси координат совершают гармоническое колебательное движение с одним и тем же центром O и с одной и той же частотой ω (т. е. с одним и тем же периодом).

В конечном виде будем иметь уравнения

$$x = r_1 \cos(\omega t + \theta_1), \quad y = r_2 \cos(\omega t + \theta_2), \quad (24)$$

где $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2$ — четыре произвольных постоянных, из которых первые две можно предполагать положительными, а две другие — заключенными между $-\pi$ и π . Если уравнения (24) напишем в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= r_1 (\cos \omega t \cos \theta_1 - \sin \omega t \sin \theta_1) \\ y &= r_2 (\cos \omega t \cos \theta_2 - \sin \omega t \sin \theta_2), \end{aligned} \right\} \quad (24')$$

то увидим, что они разрешимы относительно $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$, кроме случая, когда $\sin(\theta_1 - \theta_2) = 0$, т. е. $\theta_1 = \theta_2$, или же $\theta_1 = \theta_2 \pm \pi$ (гармонические колебания, совпадающие по фазе или с разностью фаз в полпериода, в смысле, указанном в примечании на стр. 69). В обоих этих исключительных случаях соответственно получим, разделив почленно равенства (24'),

$$\frac{x}{r_1} = \pm \frac{y}{r_2},$$

откуда и заключаем, что речь идет о гармоническом прямолинейном движении.

В общем случае, т. е. в предположении, что $\sin(\theta_1 - \theta_2) \neq 0$, из равенства (24') получим:

$$\cos \omega t = \frac{r_1 y \sin \theta_1 - r_2 x \sin \theta_2}{r_1 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}, \quad \sin \omega t = \frac{r_1 y \cos \theta_1 - r_2 x \cos \theta_2}{r_1 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Возводя в квадрат и складывая, будем иметь уравнение

$$r_2^2 x^2 + r_1^2 y^2 - 2r_1 r_2 x y \cos(\theta_1 - \theta_2) = r_1^2 r_2^2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2),$$

представляющее эллипс с центром в центре притяжения (в частности, окружность при $r_1 = r_2$ и $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$, т. е. когда оба гармонических колебания имеют равные амплитуды и по фазе отличаются на четверть периода).

Поэтому, если исключим случай круговой орбиты, мы будем иметь четыре апсида соответственно числу вершин эллипса, и апсидальный угол будет прямым.

11. Поучительно найти этот последний результат, относящийся к апсидам, при помощи общих рассуждений пп. 5—8; тогда мы

будем иметь то преимущество, что установим соотношение, в случае эллиптической орбиты связывающее длины главных полуосей a , b с механическими постоянными интегриации (постоянной c — площадей и постоянной E — энергии).

Если $c = 0$, то можно говорить о прямолинейном движении по прямой, проходящей через центр O (п. 5), а так как действующая сила, согласно ее определению, имеет характер восстанавливающей силы, то движение будет гармоническим (предыдущая глава, п. 18).

Предположим поэтому, что $c > 0$ (п. 6). Радиальная составляющая силы и потенциал (в предположении, что аддитивная произвольная постоянная выбрана так, что он обращается в нуль в точке O) определяются соответственно равенствами

$$\varphi(r) = -\omega^2 r, \quad U(r) = -\frac{1}{2} \omega^2 r^2.$$

Поэтому, вводя, как обычно, переменную $u = \frac{1}{r}$ для определения орбиты, получим уравнение (14)

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \Phi(u),$$

где

$$\Phi(u) = \frac{2}{c^2} \left\{ E - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{u^2} - \frac{c^2}{2} u^2 \right\}. \quad (25)$$

Чтобы исследовать характер движения, достаточно рассмотреть возможное распределение нулей функции $\Phi(u)$ между $u = 0$ и $u \rightarrow +\infty$ (поскольку u как величина, обратная радиусу-вектору, существенно положительна). Функция $\Phi(u)$ стремится к $-\infty$ как при $u \rightarrow 0$, так и при $u \rightarrow +\infty$. С другой стороны, непосредственно можно проверить, что ее производная обращается в нуль только при $u = \sqrt{\frac{\omega}{c}} = u^*$; поэтому $\Phi(u)$ в этой точке необходимо имеет максимум, причем до наступления максимума (т. е. при $0 \leq u < u^*$) она постоянно возрастает, а после него (т. е. при $u > u^*$) постоянно убывает.

Этот максимум $\Phi(u^*)$, зависящий естественно от постоянных c и E , т. е. по существу от начальных условий, не может быть отрицательным для действительного движения (гл. I, п. 25). Если $\Phi(u^*) = 0$, то u^* будет двукратным корнем уравнения $\Phi(u) = 0$, при всяком же другом значении будем иметь $\Phi(u) < 0$, так что единственным действительным решением уравнения (14) является круговая орбита $u = u^*$ (п. 9). Наконец, когда $\Phi(u^*) > 0$, функция $\Phi(u)$ необходимо будет иметь два простых нуля u_1, u_2 : первый — заключенный между 0 и u^* (исключая концы), и второй — больший, чем u^* ; u_1 и u_2 ограничивают единственный промежуток значений u , внутри которого функция $\Phi(u)$ остается положительной.

Мы имеем, следовательно, случай, когда u колеблется между двумя крайними значениями u_1 и u_2 . Чтобы определить соответ-

ствующий апсидальный угол Θ , заметим, что функцию $\Phi(u)$, как это вытекает из (25), можно рассматривать как функцию от аргумента u^2 ; при членах с u^2 она имеет коэффициент -1 , и так как она имеет два нуля: $u^2 = u_1^2$ и $u^2 = u_2^2$, то мы можем написать

$$\Phi(u) = \frac{1}{u^2} (u^2 - u_1^2)(u_2^2 - u^2).$$

Поэтому на основании формулы (15) имеем

$$\Theta = \int_{u_1}^{u_2} \frac{udu}{\sqrt{(u^2 - u_1^2)(u_2^2 - u^2)}};$$

полагая

$$u^2 = \frac{1}{2} (u_1^2 + u_2^2) - \frac{1}{2} (u_2^2 - u_1^2) \cos \xi$$

и, следовательно,

$$udu = \frac{1}{4} (u_2^2 - u_1^2) \sin \xi d\xi,$$

$$u^2 - u_1^2 = \frac{1}{2} (u_2^2 - u_1^2) (1 - \cos \xi), \quad u_2^2 - u^2 = \frac{1}{2} (u_2^2 - u_1^2) (1 + \cos \xi),$$

получим

$$\Theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi d\xi = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, действительно имеем четыре апсида, попарно диаметрально противоположные (вершины эллиптической орбиты).

Если возьмем снова радиус-вектор $r = \frac{1}{u}$ и примем во внимание, что $u_1 < u_2$, то увидим, что полуоси этой орбиты определяются равенствами $a = \frac{1}{u_1}$, $b = \frac{1}{u_2}$.

12. Замечание относительно случая отталкивающей центральной силы. В этом случае радиальная составляющая сила $\varphi(r) = \frac{dU}{dr}$ остается положительной при всяком (положительном) значении r . Отсюда следует, что производная

$$\frac{dU}{du} = -r^2 \frac{dU}{dr}$$

постоянно отрицательна, и такой же будет [ср. (13)] при изменении u от 0 до ∞ производная

$$\frac{d\Phi}{du} = \frac{2}{c^2} \frac{dU}{du} - 2u.$$

Поэтому функция $\Phi(u)$ изменяется постоянно в одном и том же направлении и, следовательно, может обратиться в нуль самое большее один раз. Отсюда следует, что орбита имеет самое большее один апсид.

Легко видеть, что когда апсид существует, он необходимо является перигелием. Действительно, ускорение во всяком случае составляет острый (или прямой) угол с нормалью к траектории, обращенной в сторону вогнутости (т. I, гл. II, п. 26). То же самое можно сказать и относительно силы и, следовательно, так как сила является центральной отталкивающей, относительно радиуса-вектора. Поэтому кривая в окрестности любой ее точки является выпуклой относительно центра силы. Так как в возможном апсиде касательная перпендикулярна к радиусу-вектору, то он необходимо представляет собой минимум. Следовательно, это действительно есть перигелий.

В этом можно убедиться и чисто аналитическим путем при помощи следующего рассуждения.

Дифференцируя уравнение (14) по θ , получим

$$2 \frac{du}{d\theta} \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{d\Phi}{du} \frac{du}{d\theta},$$

или, полагая временно $\frac{du}{d\theta} \neq 0$, т. е. исключая временно апсид ($\frac{du}{d\theta} = 0$),

$$2 \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{d\Phi}{du}.$$

Вследствие непрерывности это соотношение останется в силе также и для временно исключенного положения в апсиде.

Так как $\frac{d^2u}{d\theta^2}$, так же как и $\frac{d\Phi}{du}$, отрицательно, то мы заключаем, что если при изменении θ переменная u проходит через предполагаемый существующим нуль функции $\Phi(u)$, то она имеет там максимум, а радиус-вектор $r = \frac{1}{u}$ — соответственно минимум.

§ 3. Основная задача внешней баллистики. Замечание о вторичных задачах ¹⁾*)

13. Предпосылки и формулировка основной задачи. Внешняя баллистика изучает движение снаряда с момента выхода его из канала ствола орудия. Если снаряд уподобляется материальной точке, то

¹⁾ Для углубленного изучения этих вопросов, имеющих очевидную важность для военных наук, мы отсылаем к специальным трактатам, из которых укажем здесь только на следующие: F. S i a c c i, *Balistica*, 2-е изд., Torino, 1888; G. V i a n c h i, *Corso teorico-pratico di Balistica esterna*, текст и числовые таблицы (посмертное издание), Torino, 1922; C. C r a n z, *Lehrbuch der Balistik*, 4m., Leipzig, 1910—1918; P. C h a r b o n n i e r, *Traité de Balistique extérieure*, t. I, Paris, 1921.

*) См. также Н. Забудский, *Внешняя баллистика*, Петербург, 1895; Вентцель Д. А., Окунев Б. Н., Шапиро Я. М., *Внешняя баллистика*, Ленинград, т. I, III (1933), т. II (1934). L e v i - C i v i t a e A m a l d i, *Principi di Balistica esterna*, Bologna, 1935. (*Прим. ред.*)

перед нами возникает задача изучить движение тяжелой (свободной) точки P , брошенной в воздух с какого-нибудь места земной поверхности с произвольной начальной скоростью ϑ_0 . Как уже отмечалось в начале главы, эта задача представляет собой одну из немногих задач о движении свободной материальной точки, встречающихся в действительности; баллистическое истолкование ее является как раз таким, которое освещает в ней все существенно важное.

Если отвлечься не только от движения Земли (относительно неподвижных звезд), но также и от сопротивления воздуха, то останется только рассмотреть движение в пустоте под действием силы тяжести, которую в достаточно ограниченном пространстве можно рассматривать как постоянную по величине и направлению.

Таким образом, снова приходим к уже рассмотренной в кинематической постановке задаче в § 6 гл. II т. I.

Но, как мы уже подчеркивали в свое время, схематическое представление, которое мы получили о движении тяжелой точки, является первым приближением, справедливым для очень малых траекторий и, следовательно, при малых начальных скоростях. В случае же скоростей, даваемых современными орудиями, сопротивление воздуха коренным образом изменяет картину движения снаряда; так, например, для ружейной пули, имеющей начальную скорость 625 м/сек, теория параболического движения (соответственно углу возвышения в 45°) дала бы максимальную горизонтальную дальность в 40 км и высоту подъема в 4 км (см. т. I, гл. II, п. 32), опытным же путем установлено, что в действительности максимальная горизонтальная дальность, которая получается при угле возвышения около 32° , немного превосходит 3 км, а высота подъема не превосходит $1/2$ км.

Мы дадим здесь описание движения снаряда, ближе соответствующее действительности. С этой целью, отвлекаясь пока от вращения Земли и изменения силы тяжести вдоль траектории, мы будем учитывать сопротивление воздуха, т. е. будем изучать задачу о движении тяжелой материальной точки, брошенной с произвольной начальной скоростью в воздухе, предполагая, что последний оказывает сопротивление движению. Это и есть так называемая *основная задача* баллистики (внешней).

Существенным для постановки такой задачи является уточнение, зависящее от поведения сопротивления воздуха, которое, так как речь идет о поступательном движении снаряда, можно схематически представить так, как это сделано в п. 23 первой главы. Согласно этому, в любой момент сопротивления воздуха имеет направление, прямо противоположное скорости ϑ снаряда, и задается в виде некоторой величины, зависящей от плотности ρ среды и от абсолютного значения v скорости по закону, устанавливаемому опытным путем. Эта величина f сопротивления воздуха, отнесенная к единице

массы (которая, по Сиаччи, называется в баллистике *замедлением*) определяется функцией следующего вида:

$$f = \frac{\mu i}{C} F(v), \quad (26)$$

где i обозначает коэффициент, зависящий от формы снаряда, C — так называемый *баллистический коэффициент* и $F(v)$ — существенно положительную конечную и непрерывную функцию от v . Баллистический коэффициент C прямо пропорционален весу p снаряда и обратно пропорционален площади миделева сечения (гл. I, § 5, п. 22), т. е., так как речь идет о круглых снарядах, квадрату (a^2) радиуса a ; точнее,

$$C = \frac{p}{1000 a^2},$$

где предполагается, что вес p измерен в килограммах, а радиус a в метрах.

Для данного снаряда величины i и C сами по себе являются постоянными, тогда как плотность воздуха μ может оставаться постоянной только при выстрелах с незначительной высотой поднятия снаряда. Но в современной баллистике приходится изучать также и выстрелы, при которых высота поднятия достигает нескольких километров. Тогда необходимо принимать во внимание изменение плотности μ с высотой и поэтому рассматривать сопротивление f как функцию не только от v , но и от высоты снаряда, так как μ изменяется с высотой¹⁾.

Наконец, что касается существенно положительной функции $F(v)$, то, даже отвлекаясь от всякого количественного предположения, надо иметь в виду (например, на основании диаграммы Сиаччи), что не только сама функция $F(v)$, но и отношение $\frac{F(v)}{v}$ постоянно возрастает вместе с v , откуда следует, что функция $F(v)$, постоянно возрастая, стремится к бесконечности вместе с v .

Таковы предпосылки основной задачи баллистики в ее наиболее общей постановке. Имея в виду в предстоящем изложении исследовать выстрелы, при которых высота не слишком велика, мы ограничимся упрощенным предположением $\mu = \text{const}$, т. е. будем считать сопротивление f зависящим только от v . При этом заметим, что все качественные результаты, которые мы получим в ближайших пп. 18—20, останутся в силе также и в случае закона сопротивления вида (26) при μ , изменяющемся с высотой, *лишь бы μ убывало при возрастании высоты полета снаряда.*

¹⁾ С этой целью см. две статьи E. Cavalli, озаглавленные „Il problema balistico dell'avvenire“ в „*Riv. di Art. e Genio*“, 1921—1922.

Последнее замечание: не делая предположения, что сопротивление f исчезает вместе со скоростью¹⁾, допустим, что $f(0) < g$. Это равносильно предположению, что сопротивление воздуха при скорости, равной нулю, оказывается меньше веса снаряда.

Отсюда вытекает непосредственное следствие, которым мы воспользуемся в дальнейшем. Так как непрерывная функция $f(v)$, так же как $F(v)$, стремится к бесконечности, всегда возрастая вместе с v , то это справедливо и для разности $f(v) - g$. Таким образом, из того, что эта разность при $v=0$ отрицательна, мы заключаем, что она при изменении v от 0 до ∞ обращается в нуль только один раз. Обозначим через v_1 единственный конечный и положительный корень уравнения

$$f(v) - g = 0, \quad (27)$$

существование которого таким образом доказано.

14. Уравнение основной задачи. Если для простоты за единицу массы примем массу снаряда и обозначим через a и v ускорение и скорость снаряда, через t — единичный вектор скорости v , через g — ускорение (вектор) силы тяжести, предполагая его постоянным, то уравнение основной задачи будет иметь вид

$$[a = g - f(v)t. \quad (28)$$

Если начальная скорость v_0 вертикальна или, в частности, равна нулю (снаряд, предоставленный самому себе без начального импульса на некоторой высоте), то движение благодаря полной симметрии будет прямолинейным и вертикальным, и его можно было бы изучить, исходя из соображений, аналогичных тем, которые были развиты для частного случая сопротивления, пропорционального квадрату скорости (§ 9 предыдущей главы).

Поэтому мы ограничимся здесь рассмотрением случая, когда начальная скорость v_0 не совпадает с вертикалью; сейчас же заметим на основе соображения о симметрии, подобного только что упомянутому (которое, кроме того, можно было бы строго формулировать на основании уравнения (28)), что движение будет происходить в вертикальной плоскости, проходящей через начальную скорость v_0 .

Фиксируем теперь систему отсчета. За начало O координатных осей возьмем место выстрела или, точнее, центр отверстия ствола орудия в момент выстрела. За ось x возьмем горизонтальную прямую в плоскости движения, направленную в сторону выстрела, за ось y — вертикаль, направленную вниз; далее обозначим через φ угол наклона траектории, т. е. угол между единичным вектором t (касательной к траектории в направлении движения) и осью x . Если предположим,

¹⁾ К этому допущению $f(0) \geq 0$ мы обращаемся лишь для того, чтобы не исключать биномиальные законы сопротивления типа $a + bv^n$, с постоянными положительными a, b, n .

принимая во внимание обычные условия стрельбы, что начальная скорость v_0 направлена вверх от горизонтальной плоскости, то начальное значение угла наклона φ будет определено заданием некоторого отрицательного угла $-\alpha$, где $0 < \alpha < \pi/2$.

Уравнение (28) при проектировании на введенные таким образом оси x и y даст два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -f(v) \cos \varphi, \\ \ddot{y} &= g - f(v) \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (28')$$

которые на основании соотношений

$$\dot{x} = v \cos \varphi, \quad \dot{y} = v \sin \varphi \quad (29)$$

можно написать в виде

$$\begin{aligned} \dot{v} \cos \varphi - v \dot{\varphi} \sin \varphi &= -f(v) \cos \varphi, \\ \dot{v} \sin \varphi + v \dot{\varphi} \cos \varphi &= g - f(v) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Разрешая эти уравнения относительно \dot{v} и $v \dot{\varphi}$, найдем

$$\left. \begin{aligned} \dot{v} &= g \sin \varphi - f(v), \\ v \dot{\varphi} &= g \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (28'')$$

При изучении основной задачи пользуются еще одним уравнением, которое выводится из предыдущих (28''). Заметим, что в начальный момент имеем $v \neq 0$, $\varphi \neq \pm \pi/2$ и, следовательно, во втором из уравнений системы (28'') производная $\dot{\varphi}$ конечна и не равна 0.

Пока сохраняют силу эти неравенства (а мы увидим, что это действительно будет иметь место в течение всего движения), первое из уравнений (28'') можно почленно разделить на второе, и мы получим уравнение

$$\frac{dv}{d\varphi} = \frac{v}{\cos \varphi} \left(\sin \varphi - \frac{f(v)}{g} \right), \quad (30)$$

которое можно написать в виде

$$\frac{d}{d\varphi} (v \cos \varphi) = -\frac{v}{g} f(v). \quad (30')$$

15. Уравнение годографа. Уравнение (30) или (30'), определяющее величину скорости v снаряда в функции от наклона, называется в баллистике *уравнением годографа*¹⁾.

Важность этого уравнения в баллистических исследованиях вытекает из того, что, каков бы ни был количественный закон $f(v)$ сопротивления воздуха, достаточно, как увидим в п. 19, проинтегрировать это уравнение, чтобы свести задачу о движении снаряда к квадратурам.

¹⁾ Достаточно принять v и φ за радиус-вектор и угол полярных координат, чтобы видеть, что уравнение (30) для снаряда определяет траекторию движения по годографу (см. т. I, гл. VI, упражнение 2б).

К сожалению, уравнение годографа удается проинтегрировать в конечном виде только при весьма частных предположениях относительно вида функции $f(v)$. Классическими являются случаи интегрируемости, указанные Даламбером в 1744 г. ¹⁾,

$$f = a + b \ln v, \quad f = a + bv^n \quad (a \text{ и } b \text{ постоянные});$$

второе из этих соотношений, при $a=0$, $n=2$, содержит случай гидравлического сопротивления (гл. I, п. 22). Другие виды функции, для которых уравнение (30) оказывается интегрируемым, были указаны Сиаччи ²⁾. Недавно Драч (Drach) перечислил все случаи интегрируемости уравнения годографа ³⁾, а Данжуа (Denjoy) подверг эти случаи остроумному анализу, чтобы видеть, какие из них, хотя бы качественно, представляют движение в согласии с опытными данными ⁴⁾. Однако ни один из рассмотренных им случаев не способен представить закон сопротивления воздуха в достаточно широком интервале значений v с удовлетворительным приближением.

16. Замечание о баллистических таблицах. Из сказанного в предыдущем пункте следует, что пока сопротивление остается неопределенным или определено эмпирическим путем (диаграмма Сиаччи), уравнение годографа можно использовать при числовых подсчетах только для приближенного интегрирования.

Метод, теперь уже ставший классическим, был указан Сиаччи ⁵⁾. Он основывается: 1) на введении так называемой *псевдоскорости*

$$u = \frac{v \cos \varphi}{\cos \alpha},$$

отличающейся от горизонтальной составляющей скорости v снаряда только постоянным множителем (зависящим от начального наклона); 2) на том, что уравнение (30') годографа становится интегрируемым в квадратурах, если в качестве аргумента подставить вместо v псевдоскорость u и затем принять, что

$$f(v) = \beta f(u) \frac{\cos^2 \alpha}{\cos \theta},$$

где β считается постоянной. Хотя β (определяющаяся в действительности предшествующей подстановкой) изменяется при движении снаряда, однако мы увидим, что последнее предположение допустимо для достаточно коротких дуг траектории.

¹⁾ Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides (Paris); п. 356, стр. 380—383 нового издания, 1770 г.

²⁾ Alcune nuove forme di resistenza, che riducono il problema balistico alle quadrature. Riv. di Art. e Genio, 1901, т. III, стр. 5—25; т. IV, стр. 5—22, 165—189.

³⁾ См. изложение исследований Данжуа в упоминавшемся уже трактате Шарбоннье, т. I, стр. 497—514.

⁴⁾ Там же, стр. 514—519.

⁵⁾ Сиаччи, цит. соч., ч. I, гл. IV.

Представляя себе траекторию разбитой на такие дуги и располагая на каждой дуге выбором постоянной β , мы можем принять во внимание также и изменение плотности воздуха с высотой.

Отправляясь от определенных начальных условий, можно строить интегралы так, чтобы положение и скорость были согласованы при переходе от одной частичной дуги (вдоль которой β рассматривается как постоянная) к следующей. Результаты численного подсчета собираются затем в таблицы, в которых табулируются четыре функции от псевдоскорости u ¹⁾.

17. То обстоятельство, что в общем случае мы не умеем интегрировать в конечном виде уравнение годографа, естественно, приводит к аналогичной невозможности решения системы дифференциальных уравнений (28'') главной задачи. Поэтому за отсутствием (строгих) количественных результатов мы вынуждены удовлетвориться качественным изучением (но с полной математической строгостью) поведения любого интеграла этой системы.

Такое изучение предполагает, что интеграл, соответствующий заданным начальным условиям, существует и является вполне определенным, по крайней мере внутри известного множества значений независимой переменной и неизвестных функций. Известно, что для систем дифференциальных уравнений нормального типа теорема существования и единственности интеграла имеет место, вообще говоря, только внутри тех множеств значений независимого переменного и неизвестных функций, в которых правые части остаются правильными *) функциями.

Наша система (28'') после приведения к нормальной форме принимает следующий вид:

$$\dot{v} = g \sin \varphi - f(v), \quad \dot{\varphi} = \frac{g}{v} \cos \varphi.$$

Требование правильности будет удовлетворено при условии, что скорость остается отличной от нуля. Поэтому мы прежде всего должны убедиться, выполняется ли и в каких интервалах это ограничение. С этой целью мы не обратимся сразу к системе (28''), а начнем с уравнения годографа (30) и, качественно изучив предварительно какой-нибудь его интеграл, придем затем путем обычного исключения к выяснению поведения соответствующего интеграла системы (28'').

Чтобы ориентироваться в выборе интервала, внутри которого надлежит рассматривать независимое переменное φ уравнения (30),

¹⁾ Кроме трактата Сиаччи, см. работу Бианки, тоже упоминавшуюся на стр. 112, часть I, гл. VI.

*) Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений (1945), стр. 128, 129. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям (1950), стр. 72 и сл. (Прим. ред.)

мы начнем с какого-нибудь вывода, имеющего предварительный наводящий характер, и подтвердим этот вывод строгим путем в последующих рассуждениях.

Допустим, как это оказывается возможным на основании предположения о правильности, что движение снаряда остается правильным в течение всего времени движения в том смысле, что траектория во всякой ее точке имеет конечную и отличную от нуля кривизну $1/r$ и что такой же (т. е. конечной и отличной от нуля) остается также и скорость v . В этом предположении рассмотрим натуральное уравнение, получающееся путем проектирования векторного уравнения (28) на главную нормаль траектории, т. е. уравнение

$$\frac{v^2}{r} = F_n, \quad (31)$$

где F_n означает центростремительную *существенно положительную* составляющую действующей силы. В нашем случае эта действующая сила состоит из силы тяжести и сопротивления воздуха, а так как эта последняя, как касательная, ничего не прибавляет к F_n , то мы видим, что во все время движения должна оставаться положительной составляющая веса по направлению главной нормали, направленной к центру кривизны. Иными словами, угол главной нормали к траектории, направленной к центру кривизны, с нисходящей вертикалью должен оставаться острым, т. е. траектория в любой своей точке вогнутостью должна быть обращена вниз, и угол наклона φ , начиная от начального значения $-\alpha > -\pi/2$, должен всегда возрастать, никогда, однако, не превосходя значения $\pi/2$.

18. Качественное поведение любого интеграла уравнения годографа. Рассмотрим интеграл $v(\varphi)$, определяемый единственным начальным условием, что $v = v_0$ при $\varphi = -\alpha > -\pi/2$, и, руководствуясь выводами предыдущего пункта, будем изменять наклон φ от $-\alpha$ до $\pi/2$. Так как во всем этом интервале, за исключением верхней границы, правая часть уравнения (30) остается правильной (для какого угодно конечного значения v), то таким же будет и интеграл $v(\varphi)$, лишь бы только было известно, что он остается конечным. Действительно, мы докажем даже несколько больше этого, а именно, что *во всем этом интервале функция $v(\varphi)$ остается всегда меньше некоторого конечного числа W и больше некоторого числа w , большего нуля*¹⁾.

Чтобы доказать первую часть, прежде всего заметим, что из уравнения (30) следует, что при изменении φ от $-\alpha$ до 0 производная $dv/d\varphi$ остается отрицательной, так что v , постоянно убывая, остается всегда меньше своего начального значения v_0 . С другой

¹⁾ А. Signorini, Sulla velocità minima, *Rend. Acc. Lincei*, серия 5, т. 31 (1922), стр. 101—104.

стороны, для остальной части интервала, от 0 до $\pi/2$, из того же уравнения (30) следует, что при возрастании v , когда $dv/d\varphi > 0$, отношение $f(v)/g$ должно соответственно получиться меньше $\sin \varphi$ и, следовательно, меньше единицы, т. е.

$$f(v) - g < 0.$$

Отсюда на основании возрастания функции $f(v)$ и предположения $f(0) < g$ следует, что скорость v должна оставаться меньше единственного положительного корня v_1 (п. 13) уравнения (27)

$$f(v) - g = 0;$$

поэтому, если W есть большее из двух чисел v_0 и v_1 , то во всем интервале от $\varphi = -\alpha$ до $\varphi = \pi/2$ мы будем иметь

$$v < W. \quad (32)$$

Чтобы доказать, что v в том же интервале допускает нижний предел, отличный от нуля, будем вести доказательство от противного, предположив, что такой нижний предел равен нулю. Представим себе, что независимое переменное φ возрастает от $-\alpha$ до $\pi/2$. Тогда или функция $v(\varphi)$ не обращается в нуль при значениях $\varphi < \pi/2$, или же встретится первое значение φ_1 угла наклона, при котором $v(\varphi_1) = 0$; в этом втором случае будем иметь $v(\varphi) > 0$ при всяком $\varphi < \varphi_1$. Во всяком случае, если бы нуль был нижним пределом функции $v(\varphi)$, то существовали бы значения $\bar{\varphi}$ переменной φ , для которых функция $\bar{v} = v(\bar{\varphi})$ сделалась бы сколь угодно малой и, в частности, меньше положительного числа w , определяемого равенством

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{v_0 \cos \alpha} + \frac{f(W)}{gW} (1 + \operatorname{tg} \alpha). \quad (33)$$

В интервале от $-\alpha$ до $\bar{\varphi}$ функция $v(\varphi)$ не обращается в нуль, и поэтому равенство (30') можно написать в виде

$$-\frac{g}{v^2} \frac{d(v \cos \varphi)}{d\varphi} = \frac{f(v)}{v},$$

откуда на основании того, что функция $f(v)/v$ является возрастающей, и на основании равенства (32) имеем

$$-\frac{g}{v^2} \frac{d(v \cos \varphi)}{d\varphi} \leq \frac{f(W)}{W};$$

разделив обе части на $\cos^2 \varphi$, получим

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{v \cos \varphi} \right) \leq \frac{f(W)}{gW} \frac{d}{d\varphi} \operatorname{tg} \varphi.$$

Интегрируя теперь от $\varphi = -\alpha$ до $\varphi = \bar{\varphi}$ и умножая на положительное число $\cos \bar{\varphi}$, получим при $\bar{v} = v(\bar{\varphi})$ неравенство

$$\frac{1}{\bar{v}} \leq \frac{\cos \bar{\varphi}}{v_0 \cos \alpha} + \frac{f(W)}{gW} (\sin \bar{\varphi} + \operatorname{tg} \alpha \cos \bar{\varphi}).$$

Так как $v_0 \cos \alpha$, $f(W)/W$, $\operatorname{tg} \alpha$ суть какие-то положительные числа, то правая часть увеличится, если $\sin \bar{\varphi}$ и $\cos \bar{\varphi}$ заменить единицей. Сравнивая с равенством (33), заключаем, что

$$\bar{v} > \omega$$

вопреки предположению, что

$$\bar{v} < \omega.$$

Таким образом, не только исключена возможность, что v исчезнет между $-\alpha$ и $\pi/2$, но также еще и доказано, что в этом интервале (за исключением лишь $\varphi = \pi/2$) она остается большей числа

$$\omega > 0.$$

19. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И КАЧЕСТВЕННОЕ ИЗУЧЕНИЕ ОБЩЕГО ИНТЕГРАЛА ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ. На основании результатов предыдущего пункта можно строго установить, что, начиная от заданных начальных условий, функции $\varphi(t)$, $v(t)$, составляющие общее решение уравнений (28'') основной задачи, остаются конечными и непрерывными, вместе с их производными, при изменении времени t от начального своего значения до бесконечности. Этот вывод о характере правильности общего решения (28'') из аналогичного свойства уравнения (30) годографа непосредственно следует из того обстоятельства, уже указанного в п. 15, что если известен какой-нибудь интеграл уравнения (30), то соответствующий интеграл уравнений (28'') получится посредством только одной квадратуры (с последующими возможными исключениями).

Начнем со второго уравнения системы (28'') и будем рассматривать в нем v как такую функцию от φ , которая определяется из уравнения (30) на основании обычного начального условия $v = v_0$ при $\varphi = -\alpha$. Так как $\cos \varphi$ между $-\alpha$ и $\pi/2$ уже не обращается в нуль, то это уравнение в таком интервале эквивалентно уравнению

$$dt = \frac{vd\varphi}{g \cos \varphi}; \quad (34)$$

поскольку в том же интервале v остается больше $\omega > 0$ (предыдущий пункт), это уравнение определяет t как функцию $f(\varphi)$, всегда возрастающую от $\varphi = -\alpha$ до $\varphi = \pi/2$. Более того, интегрируя от начального значения $-\alpha$ до любого φ , мы получим

$$t - t_0 = \int_{-\alpha}^{\varphi} \frac{vd\varphi}{g \cos \varphi}.$$

Так как всегда имеем $v > \omega > 0$ и $1/\cos \varphi$ при $\varphi \rightarrow \pi/2$ становится бесконечностью первого порядка, то мы видим, что $t(\varphi)$ стремится

к бесконечности, всегда возрастая, когда φ стремится к $\pi/2$. Отсюда следует, что, обратно, φ есть вполне определенная монотонная функция от t , которая изменяется, всегда возрастая, от $-\alpha$ до $\pi/2$ при возрастании t от своего начального значения t_0 до бесконечности. Достаточно подставить эту функцию $\varphi(t)$ в найденный интеграл $v(\varphi)$ уравнения (30), чтобы получить функцию $v(t)$, производная от которой $\dot{v} = dv/d\varphi \dot{\varphi}$ удовлетворит на основании того же уравнения (30) первому из уравнений системы (28").

Наконец, обе функции: $\varphi(t)$ и $v(t)$, определенные таким образом, удовлетворяют системе (28"); при $t = t_0$ они принимают заданные значения $\varphi = -\alpha$, $v = v_0$ и обе остаются правильными при возрастании t от t_0 до бесконечности. Так как, далее, во всем этом интервале существует условие $v > w > 0$, обеспечивающее возможность применения теореме единственности (помимо теоремы существования интеграла для системы (28") (п. 17), то таким образом движение снаряда охарактеризовано однозначно. В частности, мы получили при этом следующие результаты: 1) касательная к траектории (ориентированная в сторону движения) вращается всегда в одном и том же направлении, стремясь стать в вертикальное положение при $t \rightarrow \infty$; 2) скорость допускает отличный от нуля минимум.

Из последнего вывода следует, что снаряд движется по траектории постоянно в одну и ту же сторону, поэтому, если мы обозначим через s криволинейную абсциссу снаряда, отсчитываемую в сторону движения от произвольного начала, так что будем иметь $v = ds/dt$, то в течение всего времени движения можно принять за независимую переменную дугу s и придать равенству (34) вид

$$v^2 \frac{d\varphi}{ds} = g \cos \varphi. \quad (34')$$

Вспомним теперь, что для любой плоской кривой $d\varphi/ds$ представляет кривизну с соответствующим знаком, т. е. $1/r$ или $-1/r$ (где r — радиус кривизны), смотря по тому, составляет ли нет касательная, направленная в сторону возрастания s , и нормаль, направленная к центру кривизны, систему осей, одинаково ориентированную с осями координат (т. I, гл. XIV, п. 50). Так как в нашем случае величина $d\varphi/ds$ на основании соотношения (34') при каком угодно конечном значении t будет положительной, то можно заключить, что угол между нормалью, направленной к центру кривизны траектории снаряда, и вертикалью y , направленной вниз, в любой момент будет равен углу наклона φ , который постоянно будет острым, так что траектория в любой своей точке вогнутостью обращена вниз. Кроме того, из равенства (34') на основании неравенства $v < W$ (п. 18) получим, что кривизна в точке, соответствующей любому наклону φ , будет наверное больше $g \cos \varphi / W^2$.

Таким образом, выводы из естественного уравнения движения (31), п. 17, допускавшие a и g и g , что в течение всего движения скорости снаряда и кривизна траектории остаются конечными и отличными от нуля, оказываются строго обоснованными.

Здесь уместно сделать еще следующее замечание: если функции $\varphi(t)$, $v(t)$ известны, то *кинематические уравнения* движения, т. е. соответствующие выражения для x и y как функции от t , можно получить двумя квадратурами на основании хорошо известных соотношений (29). Если же, наоборот, предполагается известным только интеграл $v(\varphi)$ уравнения годографа и требуется получить выражения для x и y в функциях от угла наклона φ , то удобно воспользоваться двумя уравнениями, которые получатся после исключения dt из уравнений (29) и второго из уравнений системы (28''), т. е. уравнениями

$$dx = \frac{v^2}{g} d\varphi, \quad dy = \frac{v^2 \operatorname{tg} \varphi}{g} d\varphi. \quad (35)$$

Этими уравнениями мы скоро воспользуемся.

20. Влияние сопротивления воздуха на движение снаряда. Если мы примем во внимание полученные таким образом свойства движения снаряда, то из уравнений движения (из уравнений (30'), (29) и из теоремы живых сил) можно тотчас же вывести некоторые следствия, которые выявляют глубокие изменения в этом движении, вызываемые сопротивлением воздуха, по сравнению с движением, которое имело бы место в пустоте (т. I, гл. II, § 6).

Прежде всего из уравнения (30') и из того обстоятельства, что v остается всегда больше $w > 0$, мы видим, что *горизонтальная составляющая $v \cos \varphi$ скорости снаряда есть функция всегда убывающая* (между тем как в пустоте, как мы уже знаем, она оставалась бы постоянной).

Далее, так как во время движения наклон φ , начиная от значения $-\alpha$, стремится, постоянно возрастая, к $\pi/2$, то на траектории в некоторый определенный момент времени встретится точка V , в которой *касательная горизонтальна* ($\varphi = 0$). Эта точка или *вершина* делит траекторию на две дуги. Дугу OV мы будем называть *восходящей*, другую дугу — *нисходящей*.

Докажем теперь, что *если точки P_1 , P_2 траектории находятся на одинаковой высоте и лежат по разные стороны от вершины V , то:*

а) *наклон (отрицательный) φ_1 в точке P_1 по абсолютной величине меньше наклона φ_2 в P_2 (тогда как в пустоте было бы $|\varphi_1| = \varphi_2$);*

б) *расстояние от вершины V (как по хорде, так и по траектории) до P_1 больше, чем до P_2 (в пустоте P_1 и P_2 были бы на одинаковом расстоянии от V);*

в) вертикальная составляющая скорости (отрицательная) $\dot{y}_1 = v_1 \sin \varphi_1$ в P_1 по абсолютной величине больше аналогичной составляющей $\dot{y}_2 = v_2 \sin \varphi_2$ в P_2 (в пустоте было бы $|\dot{y}| = \dot{y}_2$);

г) модуль скорости v_1 в P_1 больше модуля скорости v_2 в P_2 (в пустоте было бы $v_1 = v_2$).

Для доказательства утверждения а) возьмем второе уравнение системы (35), которое можно написать в виде

$$\operatorname{tg} \varphi dtg \varphi = \frac{g dy}{v^2 \cos^2 \varphi}.$$

Если обозначим через \bar{y} ординату вершины V , через y_1 — ординату точек P_1 и P_2 , то, интегрируя от V до P_1 и от V до P_2 , получим

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi_1 = g \int_{y_1}^{\bar{y}} \frac{dy}{v^2 \cos^2 \varphi}, \quad \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi_2 = g \int_{y_1}^{\bar{y}} \frac{dy}{v^2 \cos^2 \varphi}.$$

Так как интегралы берутся между одинаковыми пределами, а функция $v \cos \varphi$ является убывающей, то подинтегральная функция в первом интеграле всюду меньше, чем во втором, и мы получаем

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_1 < \operatorname{tg}^2 \varphi_2$$

и, следовательно,

$$|\varphi_1| < \varphi_2.$$

Далее, чтобы доказать, что и для хорд справедливо неравенство $P_1 V > V P_2$, заметим, что так как точки P_1 и P_2 имеют равные ординаты, то достаточно показать, что если x_1 , x_2 и \bar{x} суть соответственно абсциссы точек P_1 , P_2 , V , то будем иметь

$$\bar{x} - x_1 > x_2 - \bar{x}.$$

С этой целью заметим, что так как

$$dx = \frac{dy}{\operatorname{tg} \varphi},$$

то имеем

$$\bar{x} - x_1 = \int_{y_1}^{\bar{y}} \frac{dy}{\operatorname{tg} |\varphi|}, \quad x_2 - \bar{x} = \int_{y_1}^{\bar{y}} \frac{dy}{\operatorname{tg} \varphi},$$

где в первом интеграле $|\varphi|$ отсчитывается вдоль восходящей дуги $P_1 V$, во втором φ — вдоль нисходящей дуги $V P_2$. Так как элементы обоих интегралов все положительны, и в силу неравенства $|\varphi_1| < \varphi_2$ всякий элемент первого больше того элемента второго, который соответствует той же самой высоте y , то действительно имеем

$$\bar{x} - x_1 > x_2 - \bar{x}.$$

Подобным же образом, если вместо хорд будем рассматривать дуги траектории $\overline{VP_1}$, $\overline{VP_2}$, определяемые соответственно равенствами

$$\overline{VP_1} = \int_y^{y_1} \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi} dy, \quad \overline{VP_2} = \int_y^{y_2} \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi} dy,$$

то непосредственно увидим, что $\overline{VP_1} > \overline{VP_2}$, если примем во внимание, что в точках с равной высотой, взятых одна на восходящей дуге, а другая на нисходящей, в силу теоремы а) первый радикал больше второго.

Чтобы доказать утверждение в), возьмем снова второе из уравнений (28'), умножим обе части на dy и примем во внимание, что $\dot{y} = v \sin \varphi$ и что $d(\dot{y}^2) = 2\dot{y} dy$. В силу этого получим

$$d(\dot{y}^2) = 2gdy - 2f(v)v \sin^2 \varphi dt.$$

Интегрируя между двумя моментами t_1 и t_2 , соответствующими прохождению снаряда через точки с равной высотой P_1 , P_2 , мы получим нуль от первого члена правой части и существенно отрицательный интеграл от второго, так что будем иметь

$$\dot{y}_2^2 - \dot{y}_1^2 < 0.$$

Отсюда и из замечания, сделанного вначале о том, что горизонтальная составляющая скорости всегда убывает, непосредственно следует утверждение г), т. е. неравенство $v_1 > v_2$. Это последнее можно получить и прямо из теоремы живых сил, если заметить, что при движении от точки P_1 до точки P_2 , находящейся на той же высоте, работа силы тяжести равна нулю, тогда как работа пассивного сопротивления на основании свойства самой силы отрицательна: поэтому отрицательным будет также и изменение живой силы, т. е.

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2).$$

21. Минимальная скорость и предельная скорость. Интересно, далее, уточнить, как изменяется вдоль траектории под действием сопротивления $f(v)$ скорость снаряда; необходимо, однако, заметить, что результаты, к которым мы придем, в отличие от результатов двух предыдущих пунктов (которые сохраняют свою силу при всяком законе сопротивления общего типа (26)) основаны на том, что сопротивление не зависит от высоты снаряда.

Возьмем снова уравнение годографа (30) и напишем его в форме

$$\frac{dv}{d\varphi} = (g \sin \varphi - f(v)) \frac{v}{g \cos \varphi}. \quad (30'')$$

Как уже было отмечено в п. 18, правая часть при $-\alpha \leq \varphi \leq 0$ остается отрицательной, так что вдоль восходящей дуги скорость всегда убывает. В вершине ($\varphi = 0$) скорость приобретает некоторое значение v^* , наверно положительное (п. 18), тогда как ее производная на основании уравнения (30'') принимает отрицательное значение (не равное нулю)

$$-\frac{v^* f(v^*)}{g}.$$

Поэтому производная $\frac{dv}{d\varphi}$ в вершине будет все еще отрицательной и такой же будет оставаться и за вершиной, по крайней мере на некотором участке нисходящей дуги, т. е. именно до тех пор, пока не обратится в нуль; если случится, что производная $\frac{dv}{d\varphi}$ при некотором значении $\bar{\varphi} < \frac{\pi}{2}$ будет равна нулю, то скорость v , остающаяся во всем интервале от $-\alpha$ до $\pi/2$ большей $v > 0$ (п. 18), при $\varphi = \bar{\varphi}$ должна будет принять некоторое значение \bar{v} *необходимо положительное*, для которого мы будем иметь

$$g \sin \bar{\varphi} - f(\bar{v}) = 0. \quad (36)$$

Более того, всякое значение \bar{v} скорости v , при котором $\frac{dv}{d\varphi}$ обращается в нуль, может быть только *минимумом*, так как если в выражении производной (30'') положим $\varphi = \bar{\varphi}$, $v = \bar{v}$, $\frac{dv}{d\varphi} = 0$ и примем во внимание соотношение (36), то найдем

$$\left(\frac{d^2v}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=\bar{\varphi}} > 0.$$

На основании непрерывности v легко убедиться, что может осуществиться только одна из следующих двух возможностей: 1) скорость v , начиная от своего начального значения v_n , убывает до минимума \bar{v} , которого она достигает при наклоне $\bar{\varphi} > 0$, т. е. в некоторой точке нисходящей дуги, после чего при $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$, т. е. при бесконечном возрастании времени, она будет постоянно возрастать; 2) скорость, начиная от своего начального значения, постоянно убывает.

Покажем, что при указанных предположениях для сопротивления $f(v)$ вторая возможность должна быть исключена¹⁾.

Для этого полезно прежде всего изучить поведение скорости при стремлении φ к $\pi/2$. Так как в силу только что сказанного

¹⁾ Siacci, Sulla velocità minima, *Riv. di Art. e Genio*, XVIII ежегодник, т. I, II. См. также Signorini, сочинение, упоминавшееся на стр. 102.

скорость v или всегда убывает, или в конце концов становится всегда возрастающей, а, с другой стороны, при изменении φ от $-\alpha$ до $\pi/2$ остается всегда заключенной между w и W (п. 18), то она во всяком случае при $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ должна стремиться к такой предельной скорости v_1 , чтобы

$$w \leq v_1 \leq W.$$

Теперь мы непосредственно устанавливаем, что эта предельная скорость v_1 является как раз единственным конечным и положительным корнем v_1 уравнения (27)

$$f(v) - g = 0.$$

Действительно, если бы было

$$f(v_1) - g \neq 0,$$

то производная $dv/d\varphi$, как это следует из уравнения (30"), обращалась бы при $\varphi = \pi/2$ в бесконечность первого порядка, что противоречит уже подтвержденному выводу, что предельная скорость является конечной (не большей W).

Второй из двух указанных выше случаев, допущенный только как возможный а priori (случай постоянно убывающей скорости v) при всяком наклоне φ , заключенном между $-\alpha$ и $\pi/2$, приводил бы к неравенству

$$v > v_1. \quad (37)$$

Легко видеть, однако, что это неравенство не может сохранить своей силы во всем интервале от $\varphi = -\alpha$ до $\varphi = \pi/2$. Действительно, поступая так, как в п. 18, напишем уравнение годографа в виде

$$-\frac{g}{v^2} \frac{d(v \cos \varphi)}{d\varphi} = \frac{f(v)}{v}.$$

Принимая во внимание, что отношение $\frac{f(v)}{v}$ возрастает с возрастанием скорости и $v > v_1$, найдем

$$-\frac{g}{v^2} \frac{d(v \cos \varphi)}{d\varphi} = \frac{f(v)}{v} > \frac{f(v_1)}{v_1}.$$

Заменяя теперь $f(v_1)$ через g , получим

$$-\frac{1}{v^2} \frac{d(v \cos \varphi)}{d\varphi} > \frac{1}{v_1}$$

или же, разделив обе части на $\cos^2 \varphi$,

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{v \cos \varphi} \right) > \frac{1}{v_1} \frac{d}{d\varphi} \operatorname{tg} \varphi.$$

Если теперь проинтегрируем это неравенство от $-\alpha$ до любого $\varphi < \pi/2$ и умножим обе части на положительное число $\cos \varphi$, то получим

$$\frac{1}{v} > \frac{\cos \varphi}{v_0 \cos \alpha} + \frac{1}{v_1} \frac{\sin(\varphi + \alpha)}{\cos \alpha}.$$

Достаточно взять φ в интервале $\pi/2 - 2\alpha < \varphi < \pi/2$, для того чтобы дробь $\sin(\varphi + \alpha)/\cos \alpha$ была больше единицы, а следовательно, чтобы существовало более сильное неравенство

$$\frac{1}{v} > \frac{1}{v_1},$$

что явно противоречит (37).

Поэтому можно заключить, что *скорость снаряда, достигнув своего (положительного) минимума за вершиной траектории, начинает снова возрастать и стремится к конечной предельной скорости*, определяемой уравнением (27) (тогда как в пустоте она достигла бы минимума в вершине и затем, возрастая, стремилась бы к бесконечности).

22. Вертикальная асимптота траектории. Выводы предыдущего пункта вместе с выводами п. 18 позволяют доказать, что *траектория снаряда имеет вертикальную асимптоту*.

С этой целью снова возьмем первое из уравнений (35), п. 19

$$dx = \frac{v^2}{g} d\varphi;$$

так как величина v остается конечной, то функция v^2/g интегрируема от $-\alpha$ до $\varphi = \pi/2$, так что x при $\varphi \rightarrow \pi/2$ стремится к конечному и определенному пределу x_1 . С другой стороны, из второго из упомянутых уравнений (35), т. е. из уравнения

$$dy = \frac{v^2}{g} \operatorname{tg} \varphi d\varphi,$$

следует

$$\frac{dy}{d\varphi} > \frac{\bar{v}^2}{g} \operatorname{tg} \varphi,$$

так как, начиная от $\varphi = \bar{\varphi}$, имеем $v > \bar{v}$. Но интеграл от функции в правой части стремится к бесконечности, если φ стремится к $\pi/2$; то же должно произойти и с интегралом от $dy/d\varphi$, т. е. с ординатой y .

Поэтому заключаем, что прямая $x = x_1$ действительно представляет асимптоту для траектории (тогда как в пустоте при движении точки вдоль траектории ее абсцисса x стремилась бы к бесконечности вместе с y).

23. Замечания о вторичных задачах внешней баллистики. Как уже было сказано, качественные результаты, установленные в пп. 18—20 для основной задачи внешней баллистики в предположении, что сопротивление f зависит только от скорости v снаряда, остаются в силе также и при законах сопротивления, в которых вместе с плотностью воздуха входит высота снаряда согласно общей формуле (26). Даже и в этом случае, так как скорость v не опускается ниже некоторого положительного минимума, дифференциальное уравнение (28) основной задачи может быть написано в форме

$$a = g - \frac{1}{v} f(y, v) v. \quad (28a)$$

Но этой основной задачей не исчерпываются вопросы, которые выдвигает перед исследователями современная баллистика. Помимо веса снаряда и сопротивления воздуха, которые учитываются в этой задаче, иногда приходится принимать во внимание и другие физические обстоятельства (хотя бы для того, чтобы убедиться, в каких пределах приближения можно от них отвлечься), так как в действительности они все же влияют на движение снаряда. Эти последние факторы, хотя и являются ощутительными, все же оказываются менее важными в сравнении с основными, т. е. с силой тяжести и сопротивлением воздуха, и называются *вторичными факторами*, а вторичными задачами называются те задачи, которые возникают при учете и механической схематизации этих вторичных воздействий.

Общий прием, которым пользуются при количественной оценке влияния вторичных факторов, по существу тот же самый, что и классический метод небесной механики, называемый *методом возмущений* (§ 5).

Чтобы дать пример этого метода в интересующей нас баллистической задаче, представим отнесенную к единице массы результирующую вторичных факторов в виде некоторого вектора Ψ , который следует принять за известную функцию положения P снаряда и его скорости v . В качестве основного положения, вытекающего из природы задачи, допустим, что модуль Ψ вектора Ψ настолько мал по сравнению с силами главной задачи и, в частности, по сравнению с g , что его можно рассматривать как величину первого порядка малости по сравнению с ними. Точнее, мы будем считать, следуя алгоритму бесконечно малых, как вектор Ψ , так и его частные производные по различным аргументам, от которых он зависит, бесконечно малыми первого порядка.

Дифференциальное уравнение вторичной задачи

$$a = g - \frac{1}{v} f(y, v) v + \Psi(P, v) \quad (38)$$

определяет для снаряда движение, которое в противоположность движению, изученному в основной задаче, называется *возмущенным*, причем вторичное действие Ψ называется *возмущающей силой*. Необходимо теперь же предупредить, что, как это подсказывается и самой задачей, всякое частное возмущенное движение, определяемое заданными начальными условиями, сравнивается с невозмущенным движением, соответствующим тем же начальным условиям.

Предположим теперь, что общее решение основной задачи, т. е. решение уравнения (28"), предварительно определено, например взято из таблиц (п. 16); обозначая через $P^*(t)$, $\mathbf{v}^*(t) = \dot{P}^*$, $\mathbf{a}^*(t) = \dot{\mathbf{v}}^*$ геометрические или векторные функции, представляющие это решение, примем, что искомое решение уравнения (38) имеет вид

$$P = P^* + \delta P, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}^* + \delta \mathbf{v}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}^* + \delta \mathbf{a}. \quad (39)$$

В соответствии со сделанным предположением относительно модуля возмущающей силы Ψ и относительно ее производных, предположим, что модули δP , $\delta \mathbf{v}$, $\delta \mathbf{a}$ (возмущения величин P , \mathbf{v} и \mathbf{a}) можно рассматривать как величины первого порядка малости. Важно отметить, что в силу только что установленного соглашения относительно начальных условий возмущенного движения и соответствующего невозмущенного движения, возмущения δP , $\delta \mathbf{v}$, $\delta \mathbf{a}$ в начальный момент можно будет положить равными нулю.

Подставим выражения (39) в (38) и примем во внимание, что на основании уравнения (28a) имеем

$$\mathbf{a}^* = \mathbf{g} - \frac{1}{v^*} f^* \mathbf{v}^*,$$

где через f^* временно обозначен результат подстановки v^* и y^* вместо v и y в f .

Таким образом, с точностью по крайней мере до членов второго порядка, получим уравнение

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{a} = & -\frac{1}{v^*} f^* \delta \mathbf{v} + \\ & + \left\{ \frac{\partial}{\partial v^*} \left(\frac{1}{v^*} f^* \right) \delta v + \frac{1}{v^*} \frac{\partial f^*}{\partial y} \delta y \right\} \mathbf{v}^* + \Psi(P^*, \mathbf{v}^*). \end{aligned} \quad (40)$$

Но из равенства $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$, после дифференцирования и разрешения относительно δv , получим

$$\delta v = \frac{\mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}}{v}.$$

Полагая

$$\delta y = \eta, \quad \delta \mathbf{v} = \boldsymbol{\nu}, \quad \delta \mathbf{a} = \boldsymbol{\nu}$$

и обозначая через ν_1, ν_2, ν_3 составляющие вектора $\boldsymbol{\nu}$ по трем осям x, y, z , найдем для возмущения η функции y соотношение

$$\dot{\eta} = \nu_2. \quad (41)$$

С другой стороны, уравнение (40), если для простоты отбросить звездочки, можно переписать в виде

$$\dot{\mathbf{v}} = -h\mathbf{v} + \{h_1\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + h_2\eta\} \mathbf{v} + \Phi, \quad (42)$$

где положено

$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{1}{v} f, & h_1 &= \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v} f \right), & h_2 &= \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \Phi &= \Psi(P, \mathbf{v}), \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

причем предполагается, что в h , h_1 , h_2 и Φ вместо \mathbf{v} и координат точки P подставлены их выражения в функции времени, которые получены при предварительном интегрировании основной задачи.

Следовательно, скаляры h , h_1 , h_2 и вектор Φ представляют собой известные функции времени. Уравнения (41) и (42), из которых второе надо спроектировать на три оси, дают четыре линейных неоднородных уравнения с четырьмя неизвестными функциями η , ν_1 , ν_2 , ν_3 вторичной задачи (в первом приближении). Коэффициенты этих уравнений представляют собой известные функции t .

Заметим при этом, что если область, в которой мы рассматриваем влияние возмущающей силы, по высоте достаточно ограничена, для того чтобы можно было пренебречь изменением плотности воздуха с высотой, то сопротивление f можно рассматривать не зависящим от y , так что из третьего из уравнений (43) получим $h_2 = 0$. В этом случае равенство (42) не будет содержать неизвестную η ; в него будет входить только \mathbf{v} , и достаточно будет проинтегрировать три линейных дифференциальных уравнения с тремя неизвестными функциями ν_1 , ν_2 , ν_3 , к которым оно приводит, чтобы затем иметь возможность определить посредством квадратур также и $\eta = \delta u$ и, если угодно, δx и δz , т. е. по существу вариацию δP положения снаряда.

Во всяком случае, как это всегда имеет место в случае линейной неоднородной дифференциальной системы, интегрирование уравнений (41) и (42) сводится только к квадратурам всякий раз, когда удастся каким-либо способом определить общий интеграл соответствующей однородной системы. В настоящем случае член Φ уравнения (42), делающий уравнение неоднородным, объединяет в себе все, что относится к возмущающей силе. С другой стороны, однородная система, зависящая исключительно от уравнения (28'') основной задачи, дает в силу этого последнего уравнения так называемые *уравнения в вариациях*, которыми мы будем заниматься в общем случае в § 5 гл. VI. Мы увидим тогда, что если известен общий интеграл какой-нибудь дифференциальной системы, то из него можно получить посредством одного только дифференцирования общий интеграл соответствующих уравнений в вариациях. Применяя к нашему случаю это замечание и вспоминая сказан-

ное ранее относительно линейных неоднородных систем, можно утверждать, что, по крайней мере теоретически, знание общего интеграла основной задачи позволяет разрешить (в первом приближении) путем дифференцирования и последующих квадратур также и вторичные задачи.

Относительно природы самой основной задачи здесь нужно сделать одно существенное замечание. Вспомним, что если мы исключим частные законы сопротивления, плохо соответствующие действительности, то не сможем найти интегралы основной задачи точно, а определим их только приближенно, выводя из баллистических таблиц. Если некоторая функция определена посредством графика, вычерченного непрерывно механическими средствами или полученного путем графической интерполяции из какого-нибудь разрывного ряда точек, заданного в виде числовых таблиц, то интегрирование можно будет выполнить при помощи подходящих способов суммирования, с приближением, сравнимым с тем, которое имело место при построении графика. Наоборот, операция дифференцирования, поскольку требуется, чтобы от точки к точке оценивалось направление касательной, порождает неуверенность в том, что мы не придем таким путем к значительному большому ошибкам. Поэтому в баллистическом случае нельзя прийти к приемлемым результатам, выводя общий интеграл уравнений (41) и (42) из интеграла основной задачи через интегралы соответствующих однородных уравнений (в вариациях). В этом случае лучше прямо получить последний интеграл, применяя к однородным уравнениям те же самые способы табличных и графических приближений, которые служат для решения основной задачи.

Мы не будем заниматься длинными рассуждениями о действительном применении этих критериев и ограничимся перечислением наиболее важных вторичных задач, встречающихся в баллистике. Эти задачи можно разделить на три типа в соответствии с тремя следующими возмущающими действиями:

1) *Ветер*, для динамического истолкования которого как определенной силы $\Psi(P, \mathbf{v})$ еще не найдено окончательной механической схемы, так как различные эмпирические формулы, предложенные до сих пор, представляют собой предмет постоянного спора между исследователями в области баллистики.

2) *Гравитационное поле*. В основной задаче поле силы рассматривается однородным, и в векторе \mathbf{g} объединяются и притяжение к Земле, и центробежная сила (т. I, гл. XVI, § 7). В действительности же, в силу ли формы Земли или в силу неоднородного распределения ее масс необходимо присоединить к \mathbf{g} поправочный член, представляющий собой производную от некоторого потенциала U_1 , при вычислении которого можно ограничиться членами второго порядка малости в соответствии с тем, что при

постановке вторичной задачи ограничиваются малыми первого порядка. В этом случае мы имеем (консервативную) возмущающую силу Ψ , зависящую исключительно от P через посредство потенциала U_1 .

3) *Вращение Земли*, которое учитывается введением в правую часть уравнения (38) в виде возмущающей силы Ψ сложной центробежной силы, отнесенной к единице массы,

$$-2\omega \times v,$$

где ω означает угловую скорость вращения Земли. Естественно, что в этом случае в равенстве (42) вектору $\Phi(t)$ надо приписать значение, получающееся из указанной сложной центробежной силы, если в выражении этой последней за вектор v принять скорость снаряда, которую он имел бы в невозмущенном движении (интеграл основной задачи).

Вторичными задачами, которые возникают из этого типа возмущений, мы займемся в § 5.

§ 4. Влияние вращения Земли на движение тяжелого тела в пустоте

24. В предыдущем параграфе (так же как и при изучении движения тяжелого тела, рассматривавшегося с кинематической точки зрения в § 6 гл. II т. I) совершенно не принималось во внимание движение Земли, и основное уравнение динамики относилось к осям, связанным с Землей. Постановка задачи, таким образом, была приближенная: смысл и пределы законности такого приближения были выяснены в общих рассуждениях, развитых в § 7 гл. VII т. I.

Чтобы достигнуть дальнейшего приближения, необходимо снова рассмотреть задачу, учитывая при этом и вращение Земли. Как раз этим мы и намерены здесь заняться, рассматривая, кроме того, *тяжелое тело как движущееся в пустоте, т. е. оставляя в стороне сопротивление воздуха.*

В следующем параграфе мы увидим, в каких пределах оказывается допустимой такая приближенная постановка задачи.

Отвлечемся поэтому от сопротивления воздуха и рассмотрим движение относительно Земли тяжелого тела (точнее, материальной точки) P , брошенного как угодно и предоставленного самому себе вблизи от поверхности Земли. При принятом выше предположении сила, действующая на P , сводится к притяжению Земли, которое мы обозначим через G , предполагая, что за единицу массы принята масса точки P , и пользуясь обозначениями § 7 гл. XVI т. I. При этом, хотя это нам и не необходимо, полезно вспомнить, что притяжение G направлено всегда к центру O Земли и имеет (для точки P с единичной массой) величину $\frac{fM}{r^2}$, где M обозначает

массу Земли, r — расстояние OP и f — известную постоянную притяжения. При этом предполагается, что Земля представляет собой сферу, состоящую из однородных concentрических слоев.

Относительно абсолютной (или связанной с неподвижными звездами) системы отсчета ускорение a точки P определяется векторным равенством

$$a = G, \quad (44)$$

но здесь нас интересует *относительное движение* точки P по отношению к Земле, или, точнее, относительное ускорение ее a_r . Так как оно связано с ускорением a известным соотношением Кориолиса (т. I, гл. IV, п. 3)

$$a = a_r + a_\tau + 2a_c,$$

где a_τ обозначает переносное ускорение и a_c — добавочное (или сложное центробежное ускорение*), то достаточно на основании этого соотношения исключить a из равенства (44) для того, чтобы получить векторное уравнение нашей задачи в виде

$$a_r = G - a_\tau - 2a_c. \quad (45)$$

В этом динамическом уравнении, относящемся к точке P с единичной массой, два члена — a_τ и $-2a_c$, входящие в правую часть вместе с притяжением Земли G , надо истолковывать как две (фиктивные) силы, отнесенные, как и G , к единичной массе. В силе $-a_\tau$ мы узнаем ту силу X , которую в гл. XVI т. I мы назвали (единичной) силой *инерции переносного движения* Земли. Аналогично сила $-2a_c$ называется *сложной центробежной силой*, тоже отнесенной к единичной массе.

Возвращаясь еще раз к тому, что говорилось в § 7 гл. XVI т. I, вспомним, что $G - a_\tau = G + X$ есть не что иное, как вес тяжелого тела P , т. е. сила g , которую статически можно определить как прямо противоположную той силе, которую нужно было бы приложить к телу, чтобы удержать его от падения. Кроме того, обратим внимание на то, что из двух движений, которые совершает Земля, т. е. равномерного суточного вращения и переносного движения годичного обращения, второе, при достаточно малых промежутках времени по сравнению с годичным периодом, можно рассматривать как равномерное и прямолинейное. Поэтому сила инерции $X = -a_\tau$ не увеличится заметно от этого последнего движения и сведется к центробежной силе, происходящей от суточного движения, угловая скорость которого ω направлена по полярной оси III' Земли с юга на север (так как

*) В русской литературе по механике добавочным (а также, следуя Н. Е. Жуковскому, поворотным) ускорением называют вектор $2a_c$. (Прим. ред.)

Земля вращается с запада на восток) и имеет величину (т. I, гл. VII, п. 19).

$$\omega = \frac{2\pi}{85164} \frac{1}{\text{сек}}, \quad (46)$$

если время измеряется в единицах среднего солнечного времени.

Отметим, наконец, что, обозначая через v_r относительную скорость точки P , будем, как известно, иметь

$$a_c = \omega \times v_r.$$

Таким образом, векторному уравнению (45) движения точки P относительно Земли можно придать окончательно вид

$$a_r = g - 2\omega \times v_r. \quad (45')$$

25. Чтобы продолжить наше исследование, надо прибегнуть прежде всего к дальнейшей схематизации. Сила тяжести

$$g = G + X$$

на самом деле меняется по величине и направлению от точки к точке; но в радиусе нескольких километров или, лучше сказать, в том ограниченном пространстве, в котором производятся наши наблюдения, вполне допустимо, как мы это знаем (т. I, гл. II, п. 27 и гл. XVI, пп. 39, 40), считать силу тяжести постоянной как по величине, так и по направлению.

Теперь, имея в виду приближенное интегрирование уравнения (45'), необходимо уточнить, какими членами, зависящими от ω , можно пренебречь по сравнению с g и какими пренебречь нельзя. Хотя величина ω сама по себе мала, однако нельзя пренебречь по сравнению с g членами, имеющими порядок величины $\omega^2 R/g$, где R — радиус Земли (это отношение равно отношению переносного ускорения у поверхности Земли к g). То же самое можно сказать и о членах вида $\omega V/g$, где через V обозначен максимум относительной скорости, достигаемый тяжелым телом в поле наблюдения, и, наконец, обозначая через δ максимальный размер поля наблюдения, о членах порядка $\frac{\delta}{R}$. Таким образом, количества, которые окажутся того же порядка, что и одно из трех отвлеченных чисел

$$\frac{\omega^2 R}{g}, \quad \frac{\omega V}{g}, \quad \frac{\delta}{R},$$

мы будем рассматривать, как величины первого порядка, и будем пренебрегать их квадратными или попарными произведениями. Так, например, мы будем пренебрегать членом типа $\frac{\omega^2 \delta}{g}$, который может быть написан в виде $\frac{\omega^2 R}{g} \frac{\delta}{R}$ и, следовательно, представляет собой член второго порядка. В частности, по сравнению с g можно пренебрегать членами $\omega^2 x$, $\omega^2 y$, $\omega^2 z$, где

x, y, z обозначают координаты любой точки поля наблюдения относительно какой-нибудь системы осей, начало которой принадлежит этому полю.

Заметим, наконец, что в пределах продолжительности изучаемого явления и ωt можно рассматривать как величину (отвлеченное число) первого порядка, так что членами типа $\omega^2 t^2$ можно пренебрегать.

26. Предположим теперь, что движение происходит в северном полушарии, и за систему координат, связанную с Землей, примем систему, которая получится, если:

а) начало возьмем в точке O , неизменно связанной с Землей, вблизи того места, где происходит движение;

б) ось z направим по линии действия силы тяжести в точке O (вертикаль места) вниз;

в) ось x направим в плоскости меридиана точки O к северу.

Ось y , которая тем самым определяется однозначно, будет перпендикулярна к плоскости меридиана точки O и направлена к востоку.

При проектировании векторного уравнения (45') на оси координат заметим, что относительно только что выбранных осей вектор \mathbf{g} , который теперь мы будем рассматривать как постоянный, будет иметь составляющие

$$0, 0, g.$$

Если γ есть острый угол, образованный вектором \mathbf{g} с экваториальной плоскостью (*географическая широта*), то составляющие вектора $\boldsymbol{\omega}$, направленного по $\Pi\Pi'$ от Π' к Π , определяются равенствами

$$p = \omega \cos \gamma, \quad q = 0, \quad r = -\omega \sin \gamma. \quad (47)$$

Поэтому из уравнения (45') получим:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -2\dot{y}\omega \sin \gamma, \\ \ddot{y} &= 2\omega (\dot{x} \sin \gamma + \dot{z} \cos \gamma), \\ \ddot{z} &= g - 2\dot{y}\omega \cos \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (45'')$$

Если в этих равенствах пренебречь сложной центробежной силой $-2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$, то мы опять придем, что вполне естественно, к уравнениям движения тяжелого тела в пустоте, составленным без учета вращения Земли. Эти уравнения мы изучали в кинематике (§ 6, гл. II, т. I). Перейдем теперь к интегрированию уравнений (45''), придерживаясь порядка приближения, установленного в предыдущем пункте. Если для определенности предположить, что при $t=0$ тяжелое тело находится в начале O и имеет скорость \mathbf{v}_0 с компонентами $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$, то, интегрируя второе из уравнений (45''), найдем прежде всего

$$\dot{y} = \dot{y}_0 + 2\omega (x \sin \gamma + z \cos \gamma), \quad (48)$$

откуда, подставляя \dot{y} в остальные два и пренебрегая по сравнению с g членами $\omega^2 x$, $\omega^2 y$, $\omega^2 z$, получим два уравнения:

$$\ddot{x} = -2\omega\dot{y}_0 \sin \gamma, \quad \ddot{z} = g - 2\omega\dot{y}_0 \cos \gamma.$$

Интегрируя их и принимая во внимание начальные условия, найдем

$$\begin{aligned} x &= -\omega\dot{y}_0 \sin \gamma \cdot t^2 + \dot{x}_0 t, \\ z &= \frac{1}{2}(g - 2\omega\dot{y}_0 \cos \gamma) t^2 + \dot{z}_0 t. \end{aligned} \quad (49)$$

Если внесем эти выражения x , z в уравнение (48), отбросим члены с $\omega^2 t^2$ и проинтегрируем его, то придем к уравнению

$$y = \dot{y}_0 t + \omega(\dot{x}_0 \sin \gamma + \dot{z}_0 \cos \gamma) t^2 + \frac{1}{3} \omega g \cos \gamma \cdot t^3, \quad (50)$$

которое вместе с уравнениями (49) даст уравнения движения тяжелого тела P относительно Земли.

Если, в частности, предполагается, что начальная скорость v_0 равна нулю, т. е. что тяжелое тело предоставлено самому себе в положении O , то уравнения движения будут

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{3} \omega g \cos \gamma t^3, \quad z = \frac{1}{2} g t^2. \quad (51)$$

Движение, следовательно, будет происходить в плоскости, проходящей через местную вертикаль и нормальной к меридиану; а траектория будет полукубической параболой, как это следует из ее уравнения

$$y^2 = \frac{8}{9} \frac{\omega^2 \cos^2 \gamma}{g} z^3,$$

которое получается исключением t из второго и третьего уравнений (51).

Ордината y , определяемая вторым из этих уравнений, при $t > 0$ будет всегда положительной и очень малой, продолжительность движения t будет достаточно мала, как это обыкновенно имеет место при падении тяжелых тел. Так как ось y направлена на восток, то мы заключаем, что свободно падающее без начальной скорости тяжелое тело не движется по вертикали места, а *слегка отклоняется от вертикали к востоку*. Чтобы дать представление о порядке величины такого отклонения, заметим, что его величина за секунду времени, т. е. $\frac{\omega g \cos \gamma}{3}$, для Рима приблизительно равна 0,18 мм*).

Это отклонение падающих тел к востоку, которое теоретически было предсказано еще Ньютоном, экспериментально было подтверждено Тадини (1795) и более надежным способом Райхом (1831). Оно служит одним из доказательств суточного вращения Земли. О другом более наглядном доказательстве мы будем говорить в § 8.

*) Для Москвы эта величина составляет 0,13 мм. (Прим. ред.)

27. Для тяжелого тела, предоставленного самому себе без начальной скорости в положении O , первое из уравнений (51) было дано в виде $x=0$; но это, разумеется, справедливо лишь для порядка приближения, принятого раньше. Если же приближенное интегрирование уравнений (45'') продолжить дальше, учитывая также и члены второго порядка в смысле, установленном в п. 25, то мы найдем для падающего тела, помимо отклонения к востоку, другое значительно менее заметное отклонение к югу.

Чтобы показать кратчайшим путем, как это получается, мы прямо предположим начальную скорость равной нулю ($\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$) и ограничимся вычислением с указанной точностью координаты x .

Прежде всего второе из уравнений (45'') при точном интегрировании, как и в предыдущем пункте, дает равенство (48), в котором здесь надо положить $\dot{y}_0 = 0$, так что мы будем иметь

$$\dot{y} = 2\omega(x \sin \gamma + z \cos \gamma). \quad (48')$$

С другой стороны, выражения (51), к которым мы пришли в предыдущем пункте, пренебрегая членами второго порядка в смысле п. 25, дают для x и z в предположении нулевой начальной скорости

$$x = 0, \quad y = \frac{gt^2}{2}.$$

Это означает, что неизвестные пока более точные выражения для x , z будут вида

$$x = \delta(2), \quad z = \frac{gt^2}{2}(1 + (2)),$$

где δ обозначает длину, не превосходящую максимального измерения поля наблюдения, а символ (2) служит для общего обозначения отвлеченного числа по меньшей мере второго порядка, которое, естественно, не будет одним и тем же в обеих формулах. Внося эти значения x и z в уравнение (48'), умноженное на ω , и объединяя в правой части члены с g , мы получим

$$\omega \dot{y} = 2g \left\{ \frac{\omega^2 \delta \sin \gamma}{g} (2) + \frac{\omega^2 t^2}{2} \cos \gamma (1 + (2)) \right\}.$$

Так как $\omega^2 t^2$ и $\frac{\omega^2 \delta}{g}$ суть отвлеченные числа второго порядка, то это выражение, если только в нем пренебречь членами четвертого порядка, сведется к соотношению

$$\omega \dot{y} = g \cos \gamma \cdot \omega^2 t^2;$$

подставив \dot{y} в первое из уравнений (45''), получим

$$\ddot{x} = -g \sin 2\gamma \cdot \omega^2 t^2.$$

Из этого уравнения путем интегрирования его при начальных условиях $x = \dot{x} = 0$ найдется выражение для x , которое будет иметь вид

$$x = -\frac{1}{12} g \sin 2\gamma \cdot \omega^2 t^4.$$

Так как предполагается, что ось x направлена к северу, то знак этого выражения показывает, что речь идет об отклонении тяжелого тела к югу. Достаточно посмотреть на второе из равенств (51), чтобы убедиться, что эта вторая девиация будет значительно меньше восточной ¹⁾.

§ 5. Девияция снаряда, происходящая вследствие вращения Земли

28. Дифференциальное уравнение задачи. Речь идет о той вторичной задаче баллистики, которая была сформулирована под рубрикой 3) в п. 23. Тогда же мы видели, что для приближенной характеристики движения снаряда, с учетом не только основных сил (силы тяжести и сопротивления воздуха), но и эффекта вращения Земли, нужно обратиться к системе дифференциальных уравнений

$$\dot{\eta}_1 = v_2, \quad (41)$$

$$\dot{v} = -h v + \{ h_1 v \cdot v + h_2 \eta \} v - 2\omega \times v, \quad (42')$$

где через ω обозначена угловая скорость Земли, а через v — скорость снаряда, вычисленная в предположении, что Земля не вращается. Скорость v и скалярные величины h , h_1 , h_2 , определяемые формулами (43), представляют собой известные функции времени в силу того, что движение, не возмущенное вращением Земли, предполагается известным (интеграл основной задачи). Неизвестный вектор v дает возмущение скорости v и, следовательно, интегралы

$$\xi = \delta x = \int_0^t v_1 dt,$$

$$\eta = \delta y = \int_0^t v_2 dt,$$

$$\zeta = \delta z = \int_0^t v_3 dt$$

от составляющих v_1 , v_2 , v_3 вектора v дают возмущения координат снаряда. Так как оси выбраны таким образом, что плоскость xu представляет собой плоскость выстрела (или вертикальную пло-

¹⁾ Cp Gianfranceschi, La deviazione dei gravi in caduta, *Nuovo Cimento*, т. VI, s. VI, октябрь 1913, стр. 3—33.

скость, проходящую через начальную скорость), то, в частности, ζ в любой момент измеряет отклонение снаряда от этой плоскости или, как мы будем говорить, *деривацию*, происходящую от вращения Земли. В сочинениях по баллистике обыкновенно сохраняют специфическое название „деривация“ (drift у англичан) для аналогичного отклонения, которому подвергается снаряд вследствие очень быстрого вращения около оси, сообщаемого снаряду внутренней нарезкой современных орудий. Но этой деривацией в собственном смысле, которая существенно зависит от трения скольжения между снарядом и воздухом, мы здесь не будем заниматься.

Для того чтобы охарактеризовать деривацию ζ посредством ее производной $\dot{\zeta} = v_3$, достаточно спроектировать уравнение (42') на ось z , являющуюся нормалью к плоскости выстрела и (в силу соглашения п. 14) направленную влево от наблюдателя, который стоит в месте выстрела и смотрит в ту сторону, куда направлен выстрел.

Принимая во внимание, что вектор $\boldsymbol{\omega}$ постоянно лежит в плоскости выстрела и, следовательно, перпендикулярен к оси z и, обозначая через p, q, r составляющие вектора $\boldsymbol{\omega}$ по принятым здесь осям x, y, z (их не надо смешивать с компонентами п. 26 предыдущего параграфа, которые соответствовали плоскости выстрела, совпадающей с плоскостью меридиана), мы получим для деривации ζ линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{\zeta} = -h\dot{\zeta} - 2(p\dot{y} - q\dot{x}); \quad (52)$$

соответствующее однородное уравнение приводится к виду

$$\ddot{\zeta} = -h\dot{\zeta}. \quad (53)$$

При интегрировании уравнения (52) полезно вспомнить о соглашении, установленном в п. 23, относительно начальных условий возмущенного движения; в силу этого соглашения необходимо предположить, что в начальный момент должны равняться нулю как $\zeta = \delta z$, так и $\dot{\zeta} = v_3$.

29. Интегрирование дифференциального уравнения деривации. Согласно замечанию п. 23, мы заранее знаем, что общий интеграл уравнения (52) можно определить просто (посредством дифференцирования и квадратур), если известен общий интеграл соответствующей основной задачи. Здесь можно непосредственно подтвердить возможность такого перехода. Из уравнения

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g} - \frac{1}{v} f \boldsymbol{v}$$

основной задачи, проектируя его на ось x и вспоминая выражение для h , даваемое первым из равенств (43), выводим

$$\ddot{x} = -hx, \quad (53')$$

откуда непосредственно следует, что общий интеграл однородного уравнения (53) тождественен с абсциссой $x(t)$ снаряда в невозмущенном движении.

Установив это, мы придем к интегрированию уравнения (52), применяя прямо метод варьирования постоянных, т. е. полагая $\zeta = \lambda \dot{x}$, где λ обозначает неизвестную функцию от t и \dot{x} — *какое-нибудь* частное решение уравнения (53'), *не равное тождественно нулю*, т. е. не соответствующее вертикальному выстрелу. Таким образом, из уравнения (52) получим

$$\dot{\lambda} \dot{x} = -2(p\dot{y} - q\dot{x}).$$

Если теперь принять во внимание, имея в виду выстрел с наклоном к горизонту, что \dot{x} никогда не будет равно нулю, то обе части этого равенства можно будет разделить на \dot{x} . Если при этом вспомним, как находился наклон φ для невозмущенного движения, то предыдущее уравнение можно написать в виде

$$\dot{\lambda} = 2q - 2p \operatorname{tg} \varphi.$$

Приняв за начальный момент $t=0$, проинтегрируем это уравнение от 0 до любого t . Так как p и q суть постоянные и производная $\dot{\zeta} = \dot{\lambda} \dot{x}$ должна обратиться в нуль при $t=0$, то будем иметь

$$\zeta = 2qt\dot{x} - 2p\dot{x} \int_0^t \operatorname{tg} \varphi dt.$$

Для большей ясности обозначим через t любой момент, для которого желательно вычислить деривацию ζ , и через t_1 и t_2 — две переменные интеграции. Поэтому, написав предыдущее уравнение в виде

$$\zeta(t_1) = 2qt_1\dot{x}(t_1) - 2p\dot{x}(t_1) \int_0^{t_1} \operatorname{tg} \varphi(t_2) dt_2,$$

проинтегрируем от 0 до t , имея в виду, что $\zeta(0) = 0$. Применяя интегрирование по частям и принимая за неопределенный интеграл от $\dot{x}(t_1)$ выражение $x(t_1) - x(t)$, мы получим для деривации ζ следующее окончательное выражение:

$$\zeta(t) = -2q \int_0^t [x(t_1) - x(t)] dt_1 - 2p \int_0^t [x(t_1) - x(t)] \operatorname{tg} \varphi(t_1) dt_1.$$

30. В дополнение к предыдущему удобно указать выражение постоянных p , q , r в функции от данных задачи, т. е. от модуля ω угловой скорости Земли, от географической широты γ , от места выстрела и от азимута A плоскости выстрела (угол нашей оси x

с касательной к меридиану, направленной к северу). С этой целью возьмем снова формулы (47) п. 26 и обозначим через x', y', z' принятые там оси, а через p', q', r' — соответствующие проекции вектора ω , тогда эти формулы примут вид

$$p' = \omega \cos \gamma, \quad q' = 0, \quad r' = -\omega \sin \gamma.$$

В п. 26 вертикалью, направленной вниз, была ось z' , а оси x', y' были соответственно направлены на север и на восток; теперь вертикалью, направленной вниз, является ось y , а ось x будет составлять угол A с касательной к меридиану, направленной к северу; этот угол есть угол поворота около вертикали, направленной вниз. Поэтому переход от системы x', y', z' к системе x, y, z совершается путем поворота на $\pi/2$ около оси x' и последующего вращения A около нисходящей вертикали (с которой мы условились совместить y'). Отсюда вытекает, что

$$x = x' \cos A - y' \sin A, \quad y = z', \quad z = -x' \sin A - y' \cos A,$$

и, следовательно,

$$p = \omega \cos \gamma \cos A, \quad q = -\omega \sin \gamma, \quad r = -\omega \cos \gamma \sin A. \quad (54)$$

31. Частный случай вертикального падения при квадратичном законе сопротивления. Очевидно, постановка общей задачи о дерирации, данная в п. 28, остается в силе также и тогда, когда требуется оценить дерирацию при вертикальном (прямолинейном) выстреле или, в частности, при падении тяжелого тела, предоставленного самому себе без начальной скорости. В этом случае остается неопределенной только вертикальная плоскость xu выстрела. Если за плоскость xu примем для определенности плоскость меридиана и направим ось x к северу (и, следовательно, ось z к западу), то в формулах (54) мы должны положить $A = 0$, вследствие чего получим

$$p = \omega \cos \gamma, \quad q = -\omega \sin \gamma, \quad r = 0. \quad (54')$$

С другой стороны, основываясь на выводах п. 28, мы получаем здесь в качестве основного дифференциального уравнения для дерирации ξ уравнение (52)

$$\ddot{\xi} = -h\dot{\xi} - 2(p\dot{y} - q\dot{x}),$$

для которого вспомогательное однородное уравнение (53) имеет вид

$$\ddot{\xi} = -h\dot{\xi}.$$

Но в настоящем случае нужно непосредственно интегрировать это последнее уравнение, так как здесь общий интеграл однородного уравнения (53) уже не определяется горизонтальной

составляющей \dot{x} скорости в невозмущенном движении (эта составляющая здесь тождественно равна нулю).

Ограничимся в наших рассуждениях случаем, когда интенсивность f сопротивления воздуха не зависит от высоты y снаряда и оказывается пропорциональной квадрату скорости v . Как мы это видели в п. 52 гл. I, в этом предположении можно положить

$$f = \frac{gv^2}{V^2}, \quad (55)$$

где V есть постоянная величина (предельная скорость), так что в силу первого из уравнений (43) имеем

$$h = \frac{1}{v} f = \frac{gv}{V^2},$$

причем h здесь рассматривается как известная функция времени, поскольку v обозначает скорость снаряда при невозмущенном движении, которое предполагается уже известным. Эта скорость v в случае закона сопротивления (55) нами уже определена в п. 54 гл. I, где было получено

$$\frac{v}{V} = \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{e^\tau + e^{-\tau}} = \frac{d}{d\tau} \ln(e^\tau + e^{-\tau}); \quad (56)$$

здесь τ обозначает некоторый параметр, связанный с временем t соотношением

$$\tau = \frac{gt}{V}, \quad (57)$$

причем предполагается, что в начальный момент $t = 0$.

Теперь равенство (53), если рассматривать в нем $\dot{\zeta}$ как неизвестную функцию и на основании соотношения (57) положить

$$\ddot{\zeta} = \frac{d\dot{\zeta}}{dt} = \frac{g}{V} \frac{d\dot{\zeta}}{d\tau},$$

можно будет написать в виде

$$\frac{d\dot{\zeta}}{d\tau} = -\frac{v}{V} \dot{\zeta};$$

поэтому достаточно принять во внимание равенство (56), чтобы заключить, что

$$\dot{\zeta} = \frac{\lambda}{e^\tau + e^{-\tau}}, \quad (58)$$

где λ обозначает постоянную интегриации.

Возьмем теперь снова основное дифференциальное уравнение для дериации (52) и проинтегрируем его для случая тяжелого тела, предоставленного самому себе без начальной скорости. В этом слу-

чае горизонтальная составляющая \dot{x} скорости снаряда в невозмущенном движении обратится тождественно в нуль, а аналогичная вертикальная составляющая \dot{y} будет тождественна, включая и знак, со скоростью v , определяемой равенством (56); поэтому уравнение (52), если за неизвестную функцию примем ζ , а за независимое переменное τ , приведет к виду

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\frac{v}{V} \dot{\zeta} - 2p \frac{V}{g} v. \quad (52')$$

Применяя к этому уравнению метод вариации произвольной постоянной λ в интеграле (58) соответствующего однородного уравнения и принимая во внимание, что при $\tau=0$ (или $t=0$) должно быть $\dot{\zeta}=0$, получим

$$\lambda = -2p \frac{V^2}{g} (e^\tau + e^{-\tau} - 2).$$

Следовательно,

$$\dot{\zeta} = \frac{g}{V} \frac{d\zeta}{d\tau} = -2p \frac{V^2}{g} \left(1 - \frac{2}{e^\tau + e^{-\tau}}\right); \quad (59)$$

после этого, интегрируя от 0 до τ и вспоминая, что при $\tau=0$ должно быть $\zeta=0$, найдем, что деривация определяется равенством

$$\zeta = -2p \frac{V^2}{g^2} \left(\tau - 2 \operatorname{arctg} e^\tau + \frac{\pi}{2}\right). \quad (60)$$

32. Оценка влияния сопротивления воздуха на деривацию падающего тяжелого тела. Закон изменения деривации (60) в зависимости от времени или, что одно и то же, в зависимости от пропорционального ему аргумента прямо следует из того, что скорость ζ , вначале равная нулю, на основании соотношения (59) остается всегда отрицательной, так что деривация ζ постоянно убывает, а так как при $\tau=0$ деривация тоже равна нулю, то она остается всегда отрицательной при $\tau > 0$. Если при этом мы вспомним, что ось z здесь направлена к западу (предыдущий пункт), то увидим, что $-\zeta$ дает как раз ту восточную девиацию падающего тяжелого тела, которая происходит от вращения Земли и для которой в п. 26 мы уже получили первое приближенное значение, не принимая во внимание сопротивление воздуха. Уравнение (60), наоборот, учитывает также и это важное физическое обстоятельство. Интересно количественно оценить эффект этого сопротивления воздуха, сравнивая восточную девиацию $\delta = -\zeta$, получаемую из уравнения (60), с аналогичной девиацией δ_0 в пустоте.

Эта последняя определяется вторым из уравнений (51) п. 26, которое на основании тождества $p = \omega \cos \gamma$ можно написать в виде

$$\delta_0 = \frac{1}{3} p g t^3, \quad (61)$$

после чего $\delta = -\zeta$ может быть выражена на основании (60) и (57) формулой

$$\delta = \delta_0 \frac{\delta\psi}{\delta\tau}, \quad (62)$$

где для простоты положено

$$\psi(\tau) = \tau - 2 \operatorname{arctg} e^\tau + \frac{\pi}{2}. \quad (63)$$

Для оценки порядка величины полученных значений, по крайней мере при достаточно малом τ , функции $\frac{\delta\psi}{\delta\tau}$, которая дает отношение δ/δ_0 , удобно вычислить первые члены разложения ψ по степеням τ . С этой целью, условившись обозначать штрихами производные по τ , заметим прежде всего, что из сравнения соотношений (59), (60) и (63) (или прямо из непосредственного дифференцирования соотношения (63)) вытекает, что

$$\psi' = 1 - \frac{2}{e^\tau + e^{-\tau}},$$

и, следовательно,

$$\psi'' = 2 \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{(e^\tau + e^{-\tau})^2}.$$

Поэтому, если введем функцию

$$\chi = \ln \frac{e^\tau + e^{-\tau}}{2} = \ln \operatorname{ch} \tau, \quad (64)$$

производная от которой имеет вид

$$\chi' = \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{e^\tau + e^{-\tau}} = \operatorname{th} \tau,$$

то можно будет написать

$$\psi'' = (1 - \psi') \chi',$$

между тем, с другой стороны, существует известное тождество

$$\chi'' = 1 - \chi'^2.$$

Из этих двух последних соотношений обычным рекуррентным способом получим

$$\begin{aligned} \psi''' &= (1 - \psi')(1 - 2\chi'^2), & \psi^{IV} &= -(1 - \psi')\chi'(5 - 6\chi'^2), \\ \psi^V &= -(1 - \psi')(1 - 2\chi'^2)(5 - 6\chi'^2) + 12(1 - \psi')\chi'^2(1 - \chi'^2). \end{aligned}$$

Таким образом, если примем во внимание, что при $\tau = 0$ вместе с ψ будут равны нулю также ψ' и χ' , то найдем

$$\psi_0 = \psi'_0 = \psi''_0 = 0, \quad \psi'''_0 = 1, \quad \psi^{IV}_0 = 0, \quad \psi^V_0 = -5,$$

поэтому для ψ будем иметь разложение

$$\psi(\tau) = \frac{1}{3!} \tau^3 - \frac{1}{4!} \tau^5 + \dots$$

и формула (62) примет вид

$$\delta = \delta_0 \left(1 - \frac{1}{4} \tau^2 + \dots \right). \quad (62')$$

Таким образом, мы видим, что отношение δ/δ_0 при $\tau \rightarrow 0$ стремится к единице, как это можно было и прямо предвидеть, так как сопротивление воздуха сказывается тем меньше, чем меньше промежуток времени, в течение которого оно действует. Более того, мы видим, что когда эта продолжительность t падения будет достаточно короткой и, следовательно, достаточно малым будет соответствующее значение (57) аргумента τ , отношение δ/δ_0 будет отличаться от своего предельного значения, равного единице, на $\tau^2/4$. Если такой поправкой можно пренебречь, то влияние сопротивления воздуха на восточную девиацию падающего тяжелого тела становится неощутимым, поэтому вполне законным будет от него отвлечься, как это и было сделано в предыдущем параграфе.

33. Критерий оценки гаусса. Точная оценка ошибки, получаемой в том случае, когда пренебрегают сопротивлением воздуха, зависит, как мы только что видели, от численной оценки параметра τ . В предыдущем пункте этот параметр τ был определен, как отношение gt/V между конечной скоростью gt падения в пустоте продолжительностью t и предельной скоростью V . Важно отметить, что, в то время как продолжительность падения t , позволяющую вычислить скорость gt , можно определить экспериментально с вполне достаточным приближением, численное значение предельной скорости V всегда является сомнительным.

Поэтому представляет большой физический интерес показать, как, следуя критерию, указанному Гауссом¹⁾, можно связать численную оценку τ прямо с данными наблюдения.

Этот критерий состоит в определении порядка величины τ уже не на основании формулы (57), а на основании сравнения между высотой H_0 падения в пустоте и высотой H действительного падения равной продолжительности в воздухе. Эта высота H в отличие от предельной скорости V может быть определена удовлетворительно из опыта наравне с продолжительностью падения t . В то время как для высоты падения в пустоте мы имеем выражение

$$H_0 = \frac{gt^2}{2},$$

¹⁾ Gauss, Werke, т. V, стр. 495—503.

высота действительного падения равной продолжительности t определяется равенством

$$H = \int_0^t v dt$$

или же на основании формулы (57) равенством

$$H = \frac{V^2}{g} \int_0^{\tau} \frac{v}{V} d\tau;$$

поэтому, принимая во внимание формулу (56), получим

$$H = \frac{V^2}{g} \ln \frac{e^{\tau} + e^{-\tau}}{2}.$$

Если затем ввести высоту падения H_0 , принимая во внимание формулы (57) и (64) предыдущего пункта, то получим

$$H = H_0 \frac{2\chi}{\tau^2}. \quad (65)$$

Так как χ представляет собой, очевидно, четную функцию от τ , то формула (65) дает соотношение между τ^2 и отношением H/H_0 . Таким образом, дело сводится к тому, чтобы выразить это отношение явно через τ^2 в окрестности $\tau=0$; отсюда можно получить порядок величины τ^2 , если известен порядок величины H/H_0 .

С этой целью прежде всего заметим, что формулу (65), если ввести относительную разность между H_0 и H , можно написать в виде

$$\frac{H_0 - H}{H_0} = \frac{2}{\tau^2} (2 - \chi(\tau)). \quad (65')$$

С другой стороны, взяв производную от χ , получим

$$\chi' = \frac{e^{\tau} - e^{-\tau}}{e^{\tau} + e^{-\tau}} = 1 - \frac{2}{1 + e^{2\tau}}; \quad (66)$$

но, как мы уже видели в предыдущем пункте,

$$\chi'' = 1 - \chi'^2,$$

откуда тотчас следует

$$\chi''' = -2\chi'(1 - \chi'^2), \quad \chi^{IV} = -2(1 - \chi'^2)(1 - 3\chi'^2). \quad (67)$$

Таким образом, находим для $\tau=0$

$$\chi_0 = \chi'_0 = 0, \quad \chi''_0 = 1, \quad \chi'''_0 = 0, \quad \chi^{IV}_0 = -2;$$

поэтому разложение χ в ряд Маклорена, ограниченное членом четвертого порядка с остаточным членом в форме Лагранжа, представится в виде

$$\chi(\tau) = \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^4}{4!} \chi^{IV}(\tau_1)$$

при τ_1 , заключенном между 0 и τ ; теперь равенство (65') сведется к следующему:

$$\frac{H_0 - H}{H_0} = -\frac{\tau^2}{12} \chi^{IV}(\tau_1). \quad (65'')$$

Обращаясь снова к формуле (65'), легко убедиться, что, как бы ни изменялось τ от 0 до ∞ , функция в правой части не будет отрицательной. Действительно, это очевидно для первого множителя $2/\tau^2$. Что же касается второго, то заметим прежде всего, что его первая производная функция $\tau - \chi'$ не может убывать, так как производная от функции $\tau - \chi'$, равная $1 - \chi'' = \chi'^2$, всегда больше или равна нулю; так как, кроме того, при $\tau = 0$ функция $\tau - \chi'$ исчезает, то она будет всегда больше или равна нулю. По тем же соображениям заключаем, что и функция $\tau^2/2 - \chi(\tau)$, равная нулю при $\tau = 0$ и никогда не убывающая, будет всегда больше или равна нулю.

Поэтому, подставляя в правую часть формулы (65'') выражение, даваемое равенством (65''), и деля на $\tau^2/12$, найдем

$$-\chi^{IV}(\tau_1) \geq 0$$

или же для второго из равенств (67)

$$2(1 - \chi'^2(\tau_1))(1 - 3\chi'^3(\tau_1)) \geq 0.$$

Но каково бы ни было τ_1 , функция $\chi'(\tau_1)$, как это следует из формулы (66), будет заключена между 0 и 1, так что третий множитель $1 - 3\chi'^3(\tau_1)$ должен быть больше или равен нулю, а это, очевидно, означает, что этот множитель будет заключен между 0 и -1 . Мы заключаем отсюда, что $0 \leq -\chi^{IV}(\tau_1) \leq 2$, так что равенство (65'') принимает окончательный вид

$$\frac{H_0 - H}{H_0} = \theta \frac{\tau^2}{6}, \quad (65''')$$

где

$$\theta = -\frac{\chi^{IV}(\tau_1)}{2}$$

представляет собой положительную величину, меньшую единицы, которая, как это видно из второго из равенств (67), стремится к 1 при $\tau \rightarrow 0$. Формула (65''') показывает, что τ^2 будет по крайней мере порядка величины $6(H_0 - H)/H_0$. Если это отношение будет равно нескольким сотым, то то же можно сказать и о τ^2 (поскольку, следуя Гауссу, можно предположить, что величина $1/\theta$ не слишком

отличается от значения 1, которое она имеет при $\tau = 0$). В таком случае, с аналогичным приближением можно отождествить δ с δ_0 , в формуле (62'), пренебрегая величиной τ^2 и более высокими степенями τ .

Именно так получалось в опытах Гульельмини и Бенценберга, на которые опирался Гаусс. В опытах Бенценберга, производившихся в Гамбурге, имелось по определению Бенценберга $t = 4''$, $H = 76$ м (приблизительно); так как $H_0 = 78,4$ м, то поправочный член $\tau^2/4$ в формуле (62') получался порядка $6H_0 - H/4H_0 = 0,045$. На основании этого численного результата Гаусс и утверждал (по крайней мере для тех данных наблюдения, которыми он располагал), что действительное сопротивление воздуха на девиацию падающих тел можно пренебрегать.

Но равенство (65'''), в котором θ заключено между 0 и 1, показывает, что τ^2 не меньше чем $6(H_0 - H)/H_0$; так что, когда относительная разница между H_0 и H становится ощутительной, отождествлять δ и δ_0 при вычислении отклонения падающего тяжелого тела к востоку нельзя даже при простой оценке порядка величины, и необходимо принимать во внимание поправочный множитель $6\psi/\tau^3$ в равенстве (62).

34. Чтобы дать представление о порядке величины τ^2 для значительных высот падения, который получился из более поздних наблюдений, приведем здесь результаты опытов, выполненных Р. Г. Ленноном¹⁾ в четырех угольных шахтах Ньюкэстля в условиях спокойного воздуха. Действительные высоты падения в метрах, продолжительность t в секундах, соответствующие высоты падения в пустоте и ушерстерованные относительные изменения разности между H_0 и H даны в таблице

H	17	65	134	220	312	410
t	2	4	6	8	10	12
H_0	19,6	78	176	313	490	707
$6 \frac{H_0 - H}{H_0}$	0,79	1	1,43	1,78	2,18	2,52

Последняя строка показывает, что во всех этих опытах величиной $\tau^2 \geq 6(H_0 - H)/H_0$ нельзя пренебречь, так как, начиная с значений, близких к 1, она достигает и превосходит значение 2 для

¹⁾ R. G. Linnon, *Philosophical Magazine*, т. 47, январь 1924, стр. 173—182.

наблюдавшегося падения с больших высот. Бросается в глаза несогласие между данными Бенценберга, на которые опирался Гаусс (предыдущий пункт), и вторым из наблюдений Леннона. Оба наблюдавшихся в действительности падения в 76 и 65 м происходили в течение 4 сек в спокойном воздухе; разница ясно видна при оценке верхнего предела τ^2 , который в первом случае, как мы видели, был примерно равен $4 \times 0,045 = 0,18$, а во втором достигал 1.

§ 6. Понятие о динамической устойчивости равновесия и малые колебания

35. В статике точки (т. I, гл. IX, п. 19) мы дали первое определение понятия *устойчивости* положения равновесия. Здесь, в дополнение к динамике свободной точки, надо будет уточнить это понятие с динамической точки зрения.

Равновесие материальной точки P в некотором положении M имеет устойчивый характер, если точка, предоставленная действию активной силы на достаточно малом расстоянии от M с достаточно малой начальной скоростью (а следовательно, и с достаточно малой живой силой), движется сколь угодно долго вблизи от M со скоростью, не превосходящей определенного предела. Точнее, равновесие называется *устойчивым*, если, задав два положительных произвольно малых числа δ и ϵ , можно соответственно определить два других положительных числа δ_0 и ϵ_0 , таких, что точка, предоставленная действию силы на расстоянии от M , меньшем δ_0 , и с живой силой, меньшей ϵ_0 , будет неопределенно долго двигаться внутри сферы с центром в M и с радиусом δ , причем ее живая сила не будет превосходить ϵ .

36. ТЕОРЕМА Дирихле¹⁾. Ограничимся рассмотрением случая, когда действующая сила консервативна, т. е. представляет собой производную от потенциала U (конечного и непрерывного вместе со своими первыми производными в рассматриваемой области поля действия силы). Составляющие X , Y , Z активной силы в этом случае имеют вид

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

а уравнения движения точки допускают (п. 2, в) интеграл живых сил

$$T - U = \text{const},$$

где $T = \frac{mv^2}{2}$ есть живая сила точки.

¹⁾ Лежен-Дирихле (Peter Gustav Lejeune-Dirichlet) родился около Аахена в 1805 г.; после длительного пребывания в Париже был профессором в университете в Бреславле, потом в университете в Гёттингене и в этом же городе умер в 1859 г. Его имя связано с результатами, ставшими теперь классическими, в различных областях анализа и механики: теории чисел, рядах Фурье, теории потенциала, гидродинамике.

С другой стороны, уже в статике отмечалось (т. I, гл. IX, п. 19), что во всяком положении равновесия точки три частных производные от U должны обращаться в нуль, так что для всякого положения равновесия потенциал имеет стационарное значение. В частности, потенциал может иметь в этом положении максимум или минимум, но, как известно из анализа, это условие является только необходимым. Если в точке M для функции U имеет место действительный максимум, то справедливо известное предложение (теорема Дирихле), для доказательства которого используется только одно следствие уравнений движения, а именно упомянутый выше интеграл живых сил. Теорема эта следующая:

Для точки, находящейся под действием консервативной силы, всякое положение, в котором потенциал имеет максимум, есть положение устойчивого равновесия (в том смысле, как это определено выше).

Пусть заданы два произвольных положительных числа: δ и ϵ . Очевидно, можно предположить, что величина δ достаточно мала для того, чтобы во всякой точке P , не внешней для сферы с центром в M и радиусом δ . (но, конечно, отличной от M), потенциал, по предположению непрерывный, был меньше максимума U_M , т. е.

$$U_M - U_P > 0 \quad \text{при} \quad 0 < MP \leq \delta. \quad (68)$$

Тогда, если обозначим, в частности, через Q переменную точку на поверхности этой сферы с центром в M и радиусом δ , то положительная непрерывная функция $U_M - U_Q$ будет иметь минимум, больший нуля. Всегда можно взять положительное число ϵ_0 таким, чтобы $2\epsilon_0$ было одновременно меньше этого минимума и числа ϵ , т. е.

$$U_M - U_Q > 2\epsilon_0 \quad \text{при} \quad MQ = \delta; \quad \epsilon > 2\epsilon_0. \quad (69)$$

С другой стороны, в силу той же непрерывности потенциала U можно определить другое положительное число δ_0 , достаточно малое для того, чтобы во всякой точке P_0 , не внешней для сферы с центром в M и радиусом δ_0 , потенциал отличался от максимума U_M меньше, чем на ϵ_0 , т. е. чтобы было

$$U_M - U_{P_0} < \epsilon_0 \quad \text{при} \quad P_0M \leq \delta_0. \quad (70)$$

Для того, чтобы убедиться, что точка M является положением устойчивого равновесия, достаточно показать, что точка, представленная действию приложенной силы в некотором положении P_0 , будет сколь угодно долго двигаться внутри сферы с центром в M и радиусом δ ; при этом ее живая сила будет меньше ϵ , если в положении P_0 она была меньше ϵ_0 .

С этой целью будем рассуждать от противного, допустив, что точка при движении в конце концов уходит из этой сферы. В опре-

деленный момент она пройдет через поверхность в некотором положении Q с такой живой силой T , что, на основании интеграла живых сил, если T_0 является начальной живой силой, будем иметь

$$T - U_Q = T_0 - U_{P_0};$$

оставляя в левой части T , а в правой части прибавляя и вычитая максимум U_M , получим

$$T = T_0 + (U_M - U_{P_0}) - (U_M - U_Q).$$

Но это равенство неверно, так как по предположению и в силу неравенств (69), (70) имеем

$$T_0 < \varepsilon_0, \quad U_M - U_{P_0} < \varepsilon_0, \quad U_M - U_Q > 2\varepsilon_0, \quad (71)$$

а отсюда следует

$$T < 0.$$

Таким образом, мы доказали, что точка не может выходить из сферы с центром в M и радиусом δ .

Что же касается ее живой силы, то из уравнения живых сил, относящегося к любому положению P точки, т. е. из уравнения

$$T - U_P = T_0 - U_{P_0},$$

получим

$$T = T_0 + (U_M - U_{P_0}) - (U_M - U_P).$$

Так как точка P является всегда внутренней для сферы с центром M и радиусом δ , то разность $U_M - U_P$ на основании неравенства (68) будет всегда положительной (или нулем, если P попадает в M); поэтому будем иметь

$$T \leq T_0 + (U_M - U_{P_0})$$

и, следовательно, на основании первого из двух неравенств (71) и второго из (69),

$$T \leq 2\varepsilon_0 < \varepsilon.$$

37. Малые колебания около положения устойчивого равновесия. Этим названием, как легко понять, обозначают такое движение точки P , которое она совершает сколь угодно долго в непосредственной близости от своего устойчивого положения равновесия M (с живой силой, не превосходящей известного заданного предела). Здесь мы предполагаем изучить характер этого движения, имея в виду случаи, когда действующая сила консервативна, а потенциал U имеет в точке M действительный максимум.

Для этой цели необходимо некоторое предварительное аналитическое рассмотрение выражения этого потенциала. Взяв для простоты начало координат в точке M , мы всегда можем выбрать аддитивную произвольную постоянную потенциала так, чтобы он исчезал в M . В этой точке, поскольку речь идет о ней как о точке

максимума, исчезают также и три первых производных $\partial U/\partial x$, $\partial U/\partial y$, $\partial U/\partial z$; поэтому полагая, что членами четвертого порядка в разложении Маклорена можно пренебречь, для всякой точки M некоторой окрестности начала координат будем иметь

$$U = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_0 x^2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_0 y^2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)_0 z^2 + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \right)_0 yz + 2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} \right)_0 zx + 2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)_0 xy \right\} + (3),$$

где $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_0, \dots, \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)_0$ равны значениям, принимаемым в начале координат вторыми производными от U , а (3) представляет собой кубическую форму от x, y, z . Если отбросим исключительный случай, когда в точке M исчезают все вторые производные, то, как известно из анализа, для того чтобы функция U имела действительный максимум в M , требуется, чтобы квадратичная форма, состоящая из членов второго порядка, была *определенно отрицательной*, т. е. оставалась отрицательной во всей окрестности точки M , за исключением разве той точки, в которой она исчезает.

Если для удобства примем обозначения

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_0 = -a_{11}, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_0 = -a_{22}, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)_0 = -a_{33}, \\ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \right)_0 = -a_{23}, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} \right)_0 = -a_{31}, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)_0 = -a_{12},$$

то предыдущее выражение U можно будет написать в виде

$$U = -\frac{1}{2} \{ a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy \} + (3),$$

где квадратичная форма в фигурных скобках будет определенной и положительной. Далее, как известно (вспомним приведение к канонической форме уравнения эллипсоида), всегда можно выбрать оси (с началом в M) так, чтобы эта форма свелась к сумме трех квадратов

$$\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2;$$

так что в конце концов получается

$$U = -\frac{1}{2} \{ \omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2 \} + (3). \quad (72)$$

Выбрав таким образом оси, обратимся снова к нашей точке P . По теореме Дирихле, точка P не выходит из сферы с центром в M произвольно малого радиуса δ , лишь бы вначале она была предоставлена действию силы в некотором положении P_0 , достаточно близком к M ($MP_0 < \delta_0$) и с достаточно малой живой силой T_0 ($T_0 < \varepsilon_0$).

Если теперь представим себе, что величина δ достаточно мала для того, чтобы внутри сферы с центром в M и радиусом δ не только оставалось в силе равенство (72), но и можно было с достаточным приближением пренебречь членами третьего порядка (относительно расстояния MP , а следовательно, и относительно x, y, z), то можно будет принять потенциал в виде

$$U = -\frac{1}{2} (\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2).$$

Малые колебания около M точки P , массу которой мы для простоты вычислений будем предполагать равной единице, будут тогда определяться уравнениями

$$\ddot{x} = -\omega_1^2 x, \quad \ddot{y} = -\omega_2^2 y, \quad \ddot{z} = -\omega_3^2 z. \quad (73)$$

Из формы этих уравнений прямо следует, что:

Малые колебания материальной точки около положения устойчивого равновесия всегда можно разложить на три гармонических колебания по трем взаимно перпендикулярным, надлежащим образом выбранным направлениям.

38. Интегралами уравнений (73), как известно, будут (т. I, гл. II, п. 36)

$$x = r_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1), \quad y = r_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2), \quad z = r_3 \cos(\omega_3 t + \theta_3), \quad (74)$$

где произвольные постоянные $r_1, r_2, r_3 (\geq 0)$ и $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ можно определить по начальным положению и скорости, задаваемым, разумеется, в тех пределах, в которых сохраняют свое значение уравнения (73).

Но важно отметить, что периоды $\frac{2\pi}{\omega_1}, \frac{2\pi}{\omega_2}, \frac{2\pi}{\omega_3}$ трех составляющих гармонических движений не зависят от этих начальных условий, а зависят только от величин $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, т. е. от природы консервативной силы, действующей на движущуюся точку.

Добавим еще, что хотя три составляющих движения являются периодическими, однако движение точки P , вообще говоря, не периодично. Чтобы доказать это и в то же время охарактеризовать тот случай, когда движение P будет периодическим, заметим, что, для того чтобы это имело место, необходимо и достаточно, чтобы через равные промежутки времени T точка P приходила в одно и то же положение с одной и той же скоростью, или, другими словами, чтобы три функции (74) от t были периодическими с одним и тем же периодом T . Теперь, если рассмотрим, например, функцию $x = r_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1)$, то ясно, что для того, чтобы она допускала период T , необходимо и достаточно, чтобы для любого значения t имело место равенство

$$\cos(\omega_1 t + \theta_1) = \cos(\omega_1 [t + T] + \theta_1)$$

и, следовательно, чтобы сумма или разность аргументов двух косинусов была равна целому кратному $2n_1\pi$ от 2π . Но равенство

$$(\omega_1 [t + T] + \theta_1) + (\omega_1 t + \theta_1) = 2\omega_1 t + 2\theta_1 + \omega_1 T = 2n_1\pi$$

не может удовлетворяться тождественно, так как, если бы оно удовлетворялось при любом значении t , то должно было бы быть отдельно $2\theta_1 + \omega_1 T = 2n_1\pi$ и $\omega_1 = 0$, между тем как величина ω_1 положительна. Поэтому остается возможным только равенство

$$(\omega_1 [t + T] + \theta_1) - (\omega_1 t + \theta_1) = \omega_1 T = 2n_1\pi,$$

или же

$$T = n_1 \frac{2\pi}{\omega_1}.$$

Подобным же образом предположение, что T есть общий период функций $y = r_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)$, $z = r_3 \cos(\omega_3 t + \theta_3)$, влечет за собой равенства

$$T = n_2 \frac{2\pi}{\omega_2}, \quad T = n_3 \frac{2\pi}{\omega_3},$$

где n_2 и n_3 обозначают два других целых числа. Отсюда заключаем, что для периодичности движения точки P необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения

$$n_1 \frac{2\pi}{\omega_1} = n_2 \frac{2\pi}{\omega_2} = n_3 \frac{2\pi}{\omega_3}$$

или, если угодно, соотношения

$$\frac{\omega_1}{n_1} = \frac{\omega_2}{n_2} = \frac{\omega_3}{n_3},$$

при целых n_1, n_2, n_3 , т. е. чтобы частоты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ *трех составляющих гармонических колебаний были соизмеримы между собой.*

Если это требование выполняется, то траектория будет замкнутой и алгебраической, в противном случае движение точки P не будет периодическим, и траектория будет незамкнутой и трансцендентной.

Интересный частный случай периодических малых колебаний мы будем иметь, когда $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ будут равны одной и той же величине ω . Тогда потенциал в окрестности положения равновесия приведет к виду

$$U = -\frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2 + z^2) = -\frac{1}{2} \omega^2 r^2,$$

так что мы снова приходим к случаю притягивающей силы с центром в M , пропорциональной расстоянию MP (п. 10). Следовательно, речь идет о плоском движении, и траекторией, вообще говоря, будет эллипс, имеющий центр в точке M . В частном случае, в зависимости от начальных условий, этот эллипс может оказаться окружностью или отрезком прямой.

39. Во всяком случае достаточно принять во внимание максимальные и минимальные значения, достигаемые тремя функциями (74), чтобы убедиться, что траектория не выходит из прямоугольного параллелепипеда, заключенного между тремя парами параллельных плоскостей: $x = \pm r_1$, $y = \pm r_2$, $z = \pm r_3$. Легко также убедиться, что во всякой точке, общей для траектории и грани этого параллелепипеда, кривая будет касаться плоскости грани. Например, движущаяся точка будет находиться на плоскости $x = r_1$ во все такие и только такие моменты, когда $\cos(\omega_1 t + \theta_1)$ будет равен единице, т. е. когда $\omega_1 t + \theta_1$ становится кратным 2π ; в эти моменты $\dot{x} = -r_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1)$ исчезает, так что скорость (а следовательно, и касательная к траектории) будет лежать как раз в плоскости $x = r_1$.

Здесь необходимо сделать одно общее замечание. Когда величины ω_1 , ω_2 , ω_3 несоизмеримы между собой (непериодическое движение), траектория практически заполняет вышеуказанный параллелепипед в том смысле, что для любой взятой внутри параллелепипеда точки P_1 и наперед заданного произвольно малого положительного δ движущаяся точка пройдет (бесконечное число раз) на расстоянии от P_1 , меньшем чем δ .

Для простоты рассуждения рассмотрим случай плоского движения

$$x = r_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1), \quad y = r_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2). \quad (75)$$

Здесь речь будет идти о том, чтобы доказать, что в предположении несоизмеримых ω_1 и ω_2 траектория пройдет (бесконечное число раз) внутри круга, имеющего центр в произвольно выбранной в прямоугольнике $x = \pm r_1$, $y = \pm r_2$ точке P_1 и с произвольно малым радиусом δ .

Для этой цели, обозначив через x_1 , y_1 координаты точки P_1 (заключенные соответственно между $-r_1$ и r_1 и $-r_2$ и r_2), заметим, что если t_1 есть решение уравнения

$$r_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) = x_1$$

относительно t , то движущаяся точка будет иметь абсциссу x_1 во все следующие моменты:

$$t_1 + 2n_1 \frac{\pi}{\omega_1}, \quad (76)$$

где n_1 обозначает любое целое число. Точно так же, если t_2 есть решение уравнения

$$r_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) = y_1,$$

ордината движущейся точки принимает значение y_1 во все моменты

$$t_2 + 2n_2 \frac{\pi}{\omega_2}, \quad (76')$$

где n_2 обозначает другое произвольное целое число.

С другой стороны, вследствие (равномерной) непрерывности функций (75) мы можем определить достаточно малое число ϵ так, чтобы в каждом промежутке времени величиной 2ϵ колебание как функции $x(t)$, так и функции $y(t)$ было меньше $\delta/2$. Сообразно с этим в каждом из промежутков времени от $t_1 + 2n_1\pi/\omega - \epsilon$ до $t_1 + 2n_1\pi/\omega + \epsilon$ мы будем иметь

$$|x - x_1| < \frac{\delta}{2}; \quad (77)$$

точно так же в каждом из промежутков времени от $t_2 + 2n_2\pi/\omega_2 - \epsilon$ до $t_2 + 2n_2\pi/\omega_2 + \epsilon$ будем иметь

$$|y - y_1| < \frac{\delta}{2}. \quad (77')$$

Рассмотрим теперь величину промежутка времени, заключенного между любыми моментами (76) и (76')

$$\left| t_1 - t_2 + 2\pi \left(\frac{n_1}{\omega_1} - \frac{n_2}{\omega_2} \right) \right|.$$

При заданной несоизмеримости величин ω_1 и ω_2 бесчисленным множеством способов можно определить целые числа n_1 и n_2 таким образом, что эта величина промежутка времени получится меньше ϵ^1). Тогда во всем промежутке времени, заключенном между двумя

¹⁾ Так как замечание, приведенное в тексте (и известное еще Якоби), представляет собой частный случай классической теоремы Кронекера (*Berl. Sitzungsber.*, 1854), то уместно будет дать здесь его доказательство. Речь идет о том, чтобы показать, что *если даны два числа α_1 и α_2 , отношение которых иррационально* (эти числа в дальнейшем мы отождествляем с $2\pi/\omega_1$, $-2\pi/\omega_2$) *и какое-нибудь третье число P* (которое мы потом отождествим с $t_2 - t_1$), *то соответственно всякому как угодно малому числу ϵ можно выбрать два таких целых числа n_1, n_2 (положительных или отрицательных), чтобы иметь*

$$|n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 - p| < \epsilon.$$

Начнем с доказательства того, что биномы типа $n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2$ могут как угодно близко аппроксимировать нуль; с этой целью последовательно возьмем $n_1 = 1, 2, 3, \dots$, и к каждому целому n_1 добавим целую часть n_2 частного $|n_1\alpha_1/\alpha_2|$, взятую со знаком, противоположным знаку частного α_1/α_2 . Для всякой пары определенных таким образом чисел будем иметь

$$|n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2| < |\alpha_2|;$$

а так как вследствие иррациональности отношения α_1/α_2 биномы $n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2$ будут все неравны между собой и число этих биномов бесконечно, то совокупность их допускает по крайней мере одно предельное значение (заключенное между α_2 и $-\alpha_2$). Если зададимся тогда как угодно малым и положительным ϵ , то в совокупности будет существовать сколько угодно биномов, отличающихся по модулю от этого предельного значения на величину, меньшую чем $\epsilon/2$; поэтому разность между двумя из них, выбранными как

моментами (76) и (76'), определенном таким образом, будут совместно выполнены оба неравенства (77) и (77'). Имея в виду неравенство

$$\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} \leq |x-x_1| + |y-y_1|,$$

заключаем, что движущаяся точка проходит от P_1 на расстоянии, меньшем δ . Распространение этого рассуждения на случай аналогичного движения в трех измерениях очевидно.

§ 7. Движение точки по поверхности без трения. Геодезические линии. Случай поверхности вращения

40. Перейдем теперь к некоторым задачам динамики точки в двух измерениях или с двумя степенями свободы.

Наиболее простым является случай материальной точки P , которая под действием активных сил с результирующей F вынуждена двигаться по поверхности σ без трения. Пусть уравнение поверхности σ имеет вид

$$f(x, y, z | t) = 0, \quad (78)$$

где аргумент t входит явно, если поверхность изменяется с течением времени.

Функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, определяющие движение точки P , должны тождественно удовлетворять уравнению (78), откуда следует, что они будут удовлетворять также и равенству

$$\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (79)$$

Может случиться, что точка P , будучи свободной, движется по поверхности σ вследствие самой природы активной силы F . Но, вообще говоря, это произойдет лишь тогда, когда точка P удерживается на поверхности σ связью, осуществленной каким-либо способом.

Тогда наряду с активной силой F (закон действия которой по предположению является заданным) мы будем иметь неизвестную реакцию R , источником которой является связь, а потому результативно, которая будет тоже биномом вида $n_1 a_1 + n_2 a_2$, по абсолютной величине будет меньше, чем ϵ .

Заметив это, возьмем теперь снова заданное число p и, выбрав на основании только что сказанного бином $n_1^* a_1 + n_2^* a_2 = q$, для которого $|q| < \epsilon$, обозначим через N целую часть дроби $|p/q|$ так, чтобы было

$$\left| \frac{p}{q} \right| = N + r$$

при $r < 1$. Отсюда следует

$$|p| = N|q| + r|q|,$$

а так как $r|q|$ меньше $|q|$ и, следовательно, меньше ϵ , то мы заключаем, что Nq или $-Nq$, которое во всяком случае является биномом типа $n_1 a_1 + n_2 a_2$, отличается от p по абсолютной величине на значение, меньшее чем ϵ .

тирующая сила, действующая на точку, будет состоять не только из силы F , а из суммы $F + R$, так что уравнение движения будет иметь вид

$$ma = F + R, \quad (80)$$

где m обозначает массу точки P и a — ее ускорение. Как для действительного интегрирования уравнения, так и для истолкования физического смысла задачи важно заметить следующее. *Если точка движется по некоторой неподвижной поверхности без трения, то для нее будет иметь место теорема живых сил.*

Действительно, если мы умножим скалярно обе части равенства (80) на $vdt = dP$ и вспомним, что $ma \cdot vdt$ есть дифференциал живой силы $T = \frac{mv^2}{2}$ точки, а $F \cdot dP$ есть элементарная работа dL активной силы, то получим

$$dT = dL + R \cdot dP.$$

Но в силу предположения об отсутствии трения реакция R нормальна к поверхности σ . С другой стороны, так как уравнение поверхности по предположению не зависит от времени, то перемещение dP от любой точки поверхности σ до точки, бесконечно близкой к ней на той же поверхности, лежит в касательной плоскости. Отсюда следует, что R и dP в любой момент ортогональны, а потому в течение всего движения будет существовать равенство

$$dT = dL, \quad (81)$$

которое, как и в случае свободной точки, выражает теорему живых сил (т. I, гл. VIII, п. 9).

Отметим еще, что если речь идет о неподвижной поверхности, то произведение $R \cdot dP$ можно рассматривать также (т. I, гл. VI, п. 13; гл. XV, п. 3) как виртуальную работу реакции, а потому из общего принципа виртуальной работы прямо следует, что она обращается в нуль.

41. Так же как и в случае свободной точки, если действующая сила консервативна и U есть ее потенциал, то равенство (81) принимает вид

$$dT = dU,$$

откуда, интегрируя, получим

$$\frac{mv^2}{2} = U + E,$$

где через E обозначена постоянная интеграции, или, иначе,

$$\frac{mv^2}{2} - U = E,$$

т. е. полная энергия движущейся точки не изменяется во время движения.

Если обозначим через v_0 , U_0 значения скорости и потенциала в любом положении P_0 , то предыдущее уравнение можно будет написать в виде

$$\frac{m}{2} (v^2 - v_0^2) = U - U_0.$$

Это равенство может быть истолковано аналогично тому, как это делалось в случае движения точки по заданной кривой (гл. I, п. 14). Из него, между прочим, следует, что если две материальные точки с одинаковой массой выходят из положения P_0 с равными скоростями и находятся под действием одной и той же консервативной силы, то даже если одна из них свободна, а другая связана с поверхностью, по которой она может двигаться без трения, они будут приходить в точки, в которых потенциал имеет одно и то же значение, с одинаковыми скоростями. Так, например, если две материальные точки с равной массой, выходя из одного и того же положения и из состояния покоя, движутся в пустоте под действием силы тяжести, причем одна из них свободно падает, а другая остается на заданной поверхности без трения, то на одинаковых высотах они будут иметь одинаковые скорости.

42. Реакция R , как мы уже упоминали, неизвестна; предполагая, что поверхность σ гладкая, найдем, что реакция R должна быть нормальной к поверхности σ (точнее, к той конфигурации, которую поверхность σ принимает в любое заданное мгновение, если эта поверхность изменяется с течением времени). Отсюда следует, что направляющие косинусы реакции R пропорциональны частным производным $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, а ее составляющие будут иметь вид

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial z},$$

где λ обозначает множитель пропорциональности, заранее неизвестный (*множитель Лагранжа*) и связанный с величиной R соотношением

$$R^2 = \lambda^2 \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right\}.$$

Здесь трехчлен, стоящий в скобках, естественно, зависит в силу уравнения (78) от положения, которое занимает движущаяся точка на поверхности в любое рассматриваемое мгновение.

Проектируя теперь уравнение (80) на оси, мы получим три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \\ m\ddot{y} &= Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \\ m\ddot{z} &= Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (80')$$

которые вместе с уравнением (78) образуют систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными: x , y , z (основными) и λ (вспомогательной). Исключая λ из уравнений (80'), получим два уравнения с основными неизвестными, которые вместе с уравнением (78) определяют эти неизвестные на основании начальных условий. Тогда движение будет полностью известно, и достаточно воспользоваться каким-нибудь одним из уравнений (80'), чтобы получить значение λ , если нужно определить величину реакции.

43. Но если движение известно, то для величины реакции R можно дать более удобную формулу.

Предположим для определенности, что поверхность σ в некоторой окрестности рассматриваемой точки расположена вся по одну сторону от касательной плоскости, и обозначим через N нормаль, направленную в сторону вогнутости. Обозначив через t касательную к траектории, рассмотрим сечение поверхности σ плоскостью tN (нормальное сечение по касательной к траектории) и обозначим через φ угол, который составляет главная нормаль к траектории (направленная к центру кривизны) с нормалью к поверхности N . По предположению, сделанному относительно поверхности σ , этот угол острый, а, с другой стороны, если r и r_0 — радиусы кривизны траектории и нормального сечения касательной в точке касания, то по теореме Мёнье¹⁾ имеем

$$r = r_0 \cos \varphi.$$

Проектируя уравнение (80) на n , получим

$$m \frac{v^2}{r} = F_n + R_n,$$

или на основании предыдущей формулы

$$m \frac{v^2}{r_0} = (F_n + R_n) \cos \varphi.$$

¹⁾ Шарль Мёнье де ля Пляс (Charles Meusnier de la Place) родился в Туре в 1752 г., был офицером французских инженерных войск и достиг звания дивизионного генерала. Умер от ранения близ Магонца в 1793 г. Был членом Парижской Академии наук и сделался известным благодаря своему *Mémoire sur la courbure des surfaces*, *Mém. des Sav. étrang.*, 1776.

Но так как обе нормали N и n ортогональны к касательной t , а вектор $F + R$ лежит в соприкасающейся плоскости tn траектории и может быть разложен по направлениям t и n , то имеем

$$F_N + R_N = (F_n + R_n) \cos \varphi.$$

Из этого и из предыдущего равенств, имея в виду, что R_N по своей абсолютной величине дает величину R реакции, мы получим формулу

$$R_N = \pm R = \frac{mv^2}{r_0} - F_N.$$

44. Движение по инерции*). Если предположим, что *активные силы равны нулю*, т. е. что движение точки P по поверхности σ происходит благодаря начальной скорости (и реакции поверхности), то *траекторией движущейся точки будет геодезическая линия, описываемая с постоянной скоростью*.

Действительно, ускорение, как мы знаем, находится в соприкасающейся плоскости траектории, в ней же будет лежать и сила. Так как эта последняя сводится к реакции, которая в силу предположения об отсутствии трения будет всегда нормальной к поверхности, то траектория необходимо должна быть геодезической линией.

Кроме того, так как сила, а вместе с ней и ускорение, всегда направлены по главной нормали к траектории, то отсюда следует, что касательная составляющая \ddot{s} ускорения постоянно равна нулю и, следовательно, движение является равномерным.

То же самое следует и из теоремы (81) живых сил, которая вследствие того, что активная сила равна нулю, сводится здесь к равенству $dT = 0$, откуда следует, что T , а потому и скорость v постоянны.

*) Рассматриваемое здесь движение точки по поверхности без участия активных сил по установившейся в нашей научной литературе традиции называется *движением по инерции* (Г. К. Суслев, „Теоретическая механика“, 1946, стр. 207 и сл., 521 и сл.). Основанием для этого служит то обстоятельство, что величина скорости точки в таком движении не изменяется, а траекторией точки является геодезическая линия; такое же движение совершает свободная материальная точка по отношению к инерциальной системе отсчета, если не действуют никакие силы, т. е. при движении по инерции в собственном смысле слова.

Авторы называют движение без участия активных сил спонтанным (spontaneus — самопроизвольный) и различают движение по инерции от спонтанного движения; основание для этого заключается в том, что при спонтанном движении ускорения не равны нулю, а при движении по инерции в тесном смысле слова они равны нулю.

При переводе мы сохранили установившуюся у нас терминологию. (Прим. ред.).

45. Предположим, в частности, что поверхность σ есть поверхность вращения; тогда всякая нормаль к ней пересекает ось, и в случае отсутствия активных сил, сила, сводящаяся здесь только к нормальной реакции, подходит к типу б) п. 2. В этом случае, следовательно, помимо *интеграла живых сил* (дающего постоянство скорости), будет иметь место также и *интеграл площадей* на плоскости, нормальной к оси вращения (относительно центра соответствующей параллели).

В следующем пункте мы покажем, какие выгоды получаются при интегрировании уравнений движения, если оба упомянутых первых интеграла существуют одновременно; здесь же мы выведем из них только известное геометрическое свойство геодезических линий поверхностей вращения.

Если за ось z возьмем ось вращения, то интеграл площадей примет известную форму

$$xy - y\dot{x} = \text{const};$$

так как скорость v остается постоянной, то вдоль геодезической линии будем иметь

$$x \frac{\dot{y}}{v} - y \frac{\dot{x}}{v} = \text{const}. \quad (82)$$

С другой стороны, если, опустив из точки $P(x, y, z)$ геодезической линии перпендикуляр PQ на ось, обозначим через r радиус QP параллели, проходящей через P , то направляющие косинусы вектора \vec{QP} будут равны

$$\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, 0,$$

в то время как для касательной к параллели в точке P (ортогональной к QP и к оси z) эти направляющие косинусы будут равны

$$\pm \frac{y}{r}, \pm \frac{x}{r}, 0,$$

где выбор знака зависит от того, какое из двух направлений на касательной принимается за положительное. А так как равенство (82) можно написать в виде

$$r \left(-\frac{\dot{x}}{v} \frac{y}{r} + \frac{\dot{y}}{v} \frac{x}{r} \right) = \text{const},$$

то произведение радиуса r параллели на косинус угла, который геодезическая линия образует с параллелью, не изменяется вдоль одной и той же геодезической линии. Называя *азимутом* геодезической линии в любой ее точке угол, который она там составляет

с меридианом (дополнительный для угла с параллелью), имеем: *вдоль геодезической линии произведение из радиуса параллели на синус азимута есть величина постоянная* (формула Клеро¹⁾.

46. Возьмем снова два первых интеграла:

$$\left. \begin{aligned} v^2 &= v_0^2, \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= c, \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

определенных ранее для движения точки P по поверхности вращения σ без трения и при отсутствии активных сил. Мы увидим, что благодаря наличию этих интегралов мы приходим к интегрированию уравнений движения (и, следовательно, в частности, к определению геодезических линий поверхности вращения σ) посредством одной квадратуры, как мы это уже видели при аналогичных обстоятельствах для задачи о движении свободной точки под действием центральной силы (п. 8). Кроме того, так как требующееся здесь аналитическое исследование совершенно аналогично исследованию, которое было выполнено в случае центрального движения, мы можем несколько сократить изложение.

Возьмем цилиндрическую систему координат ρ, θ, z , где ρ есть существенно положительное расстояние любой точки P от оси вращения z , θ есть угол полуплоскости zP , отсчитываемый как положительный при правом вращении относительно ориентированной оси z и z — обычная третья декартова координата точки P . Уравнение поверхности вращения в этих координатах имеет вид

$$\rho = f(z).$$

Принимая во внимание тождества

$$\left. \begin{aligned} v^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 = \dot{z}^2(1 + f'^2) + f'^2\dot{\theta}^2, \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= \rho^2\dot{\theta} = f^2\dot{\theta}, \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

оба первых интеграла (83) можно будет написать в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}^2(1 + f'^2) + f'^2\dot{\theta}^2 &= v_0^2, \\ f^2\dot{\theta} &= c. \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

¹⁾ Алексис Клод Клеро (Alexis Claude Clairaut) родился в Париже в 1713 г., умер там же в 1765 г.; необычайно рано проявил свой талант. Двенадцати лет читал мемуар по теории кривых в Парижской Академии наук и восемнадцати лет был принят в ее члены. Непосредственный продолжатель Ньютона во Франции он построил систематическую теорию движения Луны, выполняя и табулируя числовые выкладки. Принимал участие во французской экспедиции по измерению градуса в Лаплонии в 1736—1737 гг. Можно сказать, что своей классической работой *Théorie de la figure de la Terre* Клеро положил начало высшей геодезии.

Здесь мы положили $df/dz = f'$. Если постоянная площадей c равна нулю и ρ тоже постоянно равно нулю (для чего требуется, чтобы координата z была и оставалась нулем функции $f(z)$), то из первого из уравнений (85) будем иметь $v_0 = 0$, и движущаяся точка P будет оставаться в равновесии в одной из точек пересечения поверхности вращения со своей осью.

Если, далее, $c = 0$, но ρ не постоянно равно нулю, то из интеграла площадей найдем $\dot{\theta} = 0$ и, следовательно, $\theta = \text{const}$. Это значит, что точка P движется по одному из меридианов с постоянной по модулю скоростью v_0 .

Если предположим теперь, что $c \neq 0$, то из интеграла площадей, как и в п. 6, найдем, что угол θ будет монотонной функцией времени. При этом всегда можно выбрать положительное направление отсчета угла θ вокруг оси z таким образом, чтобы θ была возрастающей (или по крайней мере никогда не убывающей) функцией от t , или, что в сущности то же, предположить, что $c > 0$.

Вследствие однозначной обратимости функции $\theta(t)$ можно также и здесь принять за независимую переменную θ вместо t ; если траектория определена, например путем выражения z в функции от θ , то закон движения можно получить посредством одной квадратуры из интеграла площадей.

Для определения траектории (геодезической линии на поверхности вращения) возьмем снова интеграл живых сил и, рассматривая в нем z как сложную функцию от t через θ : исключим $\dot{\theta}$ при помощи интеграла площадей. Для функции $z(\theta)$, которая определяет траекторию на поверхности, мы получим таким образом дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = \frac{f^2(v_0^2 f^2 - c^2)}{c^2(1 + f'^2)}, \quad (86)$$

являющееся уравнением обычного типа, интегрируемым посредством одной квадратуры; уравнение такого вида рассматривалось нами в § 6 гл. I.

Следовательно, к настоящему частному случаю применимы все выводы, к которым мы пришли в общем случае. Остановимся на истолковании для поверхности вращения результата, относящегося к наиболее интересному случаю, когда начальное значение z_0 координаты z заключено между двумя простыми нулями z_1 и z_2 функции $\Phi(z)$, представляемой правой частью уравнения (86), и функция $\Phi(z)$ остается между z_1 и z_2 положительной. Геодезическая линия, траектория точки, располагается в этом случае на поверхности вращения, между двумя параллелями с координатами z_1 и z_2 , попеременно касаясь то одной, то другой параллели в точках, отстоящих друг от друга на один и тот же угол (апсидальный угол проекции траектории на плоскость $z = 0$).

Если, далее, начальное значение z_0 является кратным нулем функции $\Phi(z)$, то z будет оставаться постоянным, как бы ни изменялось θ , т. е. траектория движущейся точки на поверхности сводится к параллели.

§ 8. Движение без трения тяжелой точки по поверхности вращения с вертикальной осью

47. В этом случае также существуют оба первых интеграла, что позволяет свести задачу к квадратурам и вести рассуждения совершенно аналогично рассуждениям предыдущего пункта.

Отнесем поверхность вращения к той же системе координат и воспользуемся уравнением, выведенным в предыдущем пункте с единственным добавочным условием, что ось z направлена вниз.

Силу тяжести g , действующую на материальную точку P , массу которой, как обычно, примем за единицу, будем считать постоянной по величине и направлению. Так как такая сила имеет потенциал (отнесенный к единице массы) gz , то для нашей задачи будет иметь место интеграл живых сил

$$\frac{v^2}{2} - gz = E.$$

С другой стороны, так как речь идет о силе, всегда компланарной с осью z (наряду с реакцией), то существует также и интеграл площадей для плоскости $z = 0$ (относительно начала)

$$x\dot{y} - y\dot{x} = c.$$

Эти первые интегралы, выраженные в цилиндрических координатах, на основании равенств (84) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\dot{z}^2 (1 + f'^2) + f'^2 \dot{\theta}^2 \right] - gz = E, \\ f'^2 \dot{\theta} = c. \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Если положим $c = 0$ и исключим возможные состояния равновесия в точках поверхности, расположенных на оси z ($\rho = 0$), то получим $\theta = \text{const}$. Такое движение осуществляется в математическом маятнике (гл. I, пп. 33—41) и циклоидальном маятнике Гюйгенса (там же, п. 43). Движение будет определяться первым уравнением системы (87), которое здесь примет вид

$$\dot{z}^2 = \frac{2(E + gz)}{1 + f'^2}.$$

Это уравнение обычного типа, изученного в § 6, гл. I, и поэтому оно может быть шаг за шагом исследовано путем приложения установленных там общих приемов; уравнение интегрируется одной квадратурой.

Если, далее, $c \neq 0$, то можно также и здесь предположить $c > 0$, и закон движения получится посредством одной квадратуры из интеграла площадей; точно так же легко определится и траектория, если выразить z в функции от θ . Для этой функции $z(\theta)$ тем же способом, как и в предыдущем пункте, найдем дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = \frac{f^2 [2(E + gz)f^2 - c^2]}{c^2(1 + f'^2)}, \quad (88)$$

которое приводится к обычному типу, уже несколько раз встречавшемуся ранее. Излишне поэтому останавливаться на возможных случаях, которые могут представиться в отношении вида траектории на поверхности (траектория идет по поверхности между двумя параллелями, обращаясь вокруг оси в одну сторону, и касается попеременно то одной, то другой параллели, или же сводится к параллели), тем более, что мы к этому вернемся, когда будем разбирать замечательный частный случай, которым займемся в следующем пункте.

Заметим только, что формулы и рассуждения этого пункта без существенных изменений распространяются и на тот случай, когда точка, движущаяся по гладкой поверхности вращения, находится под действием консервативной силы, являющейся производной от некоторого потенциала U , который зависит только от z , или, на основании равенства $z = f(\rho)$, только от ρ , или, наконец, от положения движущейся точки на меридиане поверхности. С аналитической точки зрения все сведется к замене в формулах потенциала силы тяжести gz функцией U .

48. Сферический маятник. Под этим названием подразумевается материальная точка P , вынужденная двигаться по сфере с заданным центром O и заданным радиусом l .

Практически эта связь осуществляется посредством гибкой и нерастяжимой нити или посредством твердого стержня OP длины l , весом которого можно пренебречь и который может свободно вращаться вокруг O . Если мы отвлечемся от всякого пассивного сопротивления, оказываемого подвесом и окружающей средой (т. е. схематически, от трения о сферическую поверхность), то задача о движении сферического маятника будет не чем иным, как частным случаем задачи, изученной в предыдущем пункте.

Чтобы сделать исследование более простым, предположим сначала, что подвес P осуществлен посредством твердого стержня (двусторонняя связь). Выберем начало координат в O и примем ту же систему отсчета, что и в предыдущем пункте; уравнение сферы в цилиндрических координатах имеет вид

$$\rho^2 = l^2 - z^2,$$

а два первых интеграла (87) принимают в данном случае форму

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\frac{l^2 z^2}{l^2 - z^2} + (l^2 - z^2) \dot{\theta}^2 \right] - gz &= E \\ (l^2 - z^2) \dot{\theta} &= c. \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

При $c = 0$ (исключая возможные состояния равновесия в самой нижней и самой высшей точках сферы) мы снова приходим к движению математического маятника (предыдущий пункт). Это можно проверить на формулах, замечая, что в этом случае движение определяется интегралом живых сил, в котором надо положить $\dot{\theta} = 0$, т. е. уравнением

$$\frac{1}{2} \frac{l^2 \dot{z}^2}{l^2 - z^2} - gz = E.$$

Если обозначим через θ_1 угол отклонения стержня от вертикали, то будем иметь (фиг. 12)

$$z = l \cos \theta_1, \quad \dot{z} = -l \dot{\theta}_1 \sin \theta_1,$$

и предыдущее уравнение примет вид

$$\frac{1}{2} l^2 \dot{\theta}_1^2 - gl \cos \theta_1 = E.$$

А это и есть выведенный ранее (п. 35 гл. I) интеграл живых сил для математического маятника.

49. Если предположить $c \neq 0$ (и, как обычно, $c > 0$) и принять за независимое переменное θ вместо t , то функция $z(\theta)$, определяющая на сфере траекторию маятника, будет решением дифференциального уравнения

$$c^2 l^2 \left(\frac{dz}{d\theta} \right)^2 = (l^2 - z^2)^2 [2(gz + E)(l^2 - z^2) - c^2], \quad (90)$$

которое выводится уже неоднократно применявшимся способом из первых интегралов (89) или, проще, из уравнения (88), п. 47, если положить в нем

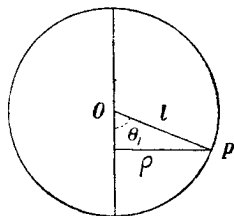
$$f(z) = \sqrt{l^2 - z^2}.$$

Чтобы знать характер движения, необходимо, как обычно, принять во внимание распределение нулей функции, стоящей в правой части уравнения (90),

$$\Phi(z) = (l^2 - z^2) [2(gz + E)(l^2 - z^2) - c^2],$$

которые, кроме двух очевидных $z = \pm l$, определяются из уравнения третьей степени

$$\Phi_1(z) \equiv 2(gz + E)(l^2 - z^2) - c^2 = 0.$$



Фиг. 12.

Заметим теперь, что при каком-нибудь движении маятника начальное значение z_0 переменной z , дающее „высоту“ точки на сфере, необходимо будет заключено между $-l$ и $+l$; при этом можно исключить случай, когда оно равно одному из этих крайних значений, так как, если бы было $z_0 = \pm l$, то из интеграла площадей, вычисленного для начала движения, получилось бы $c = 0$, и мы пришли бы к уже рассмотренному случаю. С другой стороны, для действительного движения должно быть $\Phi(z_0) \geq 0$, а следовательно, также и $\Phi_1(z_0) \geq 0$, так как мы уже имеем $l^2 - z_0^2 > 0$. Рассмотрим отдельно два случая: $\Phi_1(z_0) > 0$ и $\Phi_1(z_0) = 0$.

а) $\Phi_1(z_0) > 0$. В этом предположении функция $\Phi_1(z)$, принимающая при $z = \pm l$ отрицательное значение $-c^2$, необходимо имеет нуль z_1 между $-l$ и z_0 и другой нуль z_2 между z_0 и l . Так как, с другой стороны, функция $\Phi_1(z)$ при $z \rightarrow -\infty$ стремится к $+\infty$, то она допускает третий нуль z_3 , меньший $-l$, откуда заключаем, что каждый из трех нулей оказывается простым. Интеграл уравнения (90) после подстановки начального значения z_0 (заключенного между двумя последовательными простыми нулями z_1 и z_2 , между которыми функция $\Phi_1(z)$, а следовательно, и $\Phi(z)$ остается положительной) определяет функцию $z(\theta)$, колеблющуюся между значениями z_1 и z_2 таким образом, что всякий раз, когда она достигает одного из этих крайних значений, ее производная обращается в нуль: $\frac{dz}{d\theta} = 0$.

Интерпретируя этот результат, мы увидим, что маятник, обращаясь вокруг вертикали, остается внутри сферической зоны, заключенной между двумя параллелями с высотами z_1 и z_2 , касаясь попеременно то одной, то другой параллели в точках, которые следуют друг за другом через равные угловые интервалы.

Необходимо отметить, что плоскость, равноудаленная от двух параллелей с высотами z_1 и z_2 , будет всегда ниже экватора. Действительно, в силу известного соотношения между корнями и коэффициентами уравнения третьей степени имеем

$$z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2 = -l^2 \quad \text{или же} \quad (z_1 + z_2) z_3 = -(l^2 + z_1 z_2).$$

Так как корни z_1 и z_2 по абсолютной величине оба меньше l и z_3 отрицателен, то заключаем, что $z_1 + z_2 > 0$, а следовательно, и $\frac{z_1 + z_2}{2} > 0$.

б) $\Phi_1(z_0) = 0$. Здесь необходимо различать два случая, смотря по тому, будет ли z_0 простым нулем функции Φ_1 , или нет. В первом случае, так как всегда $\Phi_1(\pm l) = -c^2$, находим, смотря по тому, будет ли функция $\Phi_1(z_0)$ возрастающей или убывающей, что она допускает обязательно еще один корень, заключенный между z_0 и l , или соответственно между z_0 и $-l$. А так как всегда существует корень, меньший $-l$, то оба корня z_0, z_1 вместе с третьим

будут простыми, и функция $\Phi_1(z)$ остается положительной, пока z остается внутри интервала (z_1, z_2) . Поэтому мы снова находим движение типа, рассмотренного в п. а), с той только разницей, что здесь движущаяся точка вначале находится на одной из двух параллелей, ограничивающих зону, внутри которой извивается траектория.

Если, наконец, z_0 не является простым нулем функции $\Phi_1(z)$ (он может быть только двойным, поскольку всегда существует нуль, меньший — l), то из общей теории заключаем, что в течение всего движения будет иметь место равенство $z = z_0$, т. е. траектория оказывается параллелью с высотой z_0 .

При помощи тех же соображений, которые были изложены в случае а), доказывается, что эта параллель расположена под экватором.

Отказываясь от продолжения интересных рассуждений, которые возникают при более точном разборе движения сферического маятника, мы ограничимся лишь указанием на то, что для этой цели удобно рассматривать проекцию траектории на экваториальную плоскость.

50. Вычисление реакции. Реакция R , которую развивает связь, наложенная на сферический маятник, во время движения, в силу предположения об отсутствии трения всегда направлена по прямой PO в ту или другую сторону. Она определяется из уравнения

$$a = g + R, \quad (91)$$

где a обозначает ускорение точки P , и реакция R считается отнесенной к единице массы маятника.

Во время движения остается справедливым тождество

$$\vec{OP} \cdot \vec{OP} = l^2,$$

из которого, беря последовательно два раза производную по времени и вводя скорость v точки P , получим

$$\vec{OP} \cdot a + v^2 = 0;$$

исключая отсюда a при помощи равенства (91), имеем

$$v^2 + \vec{OP} \cdot g + \vec{OP} \cdot R = 0.$$

Наконец, выполняя скалярное умножение и обозначая через R_N проекцию реакции R на нормаль PO сферы, направленную к центру (которая может отличаться от модуля R реакции только знаком, так как реакция R нормальна к поверхности сферы), получим

$$v^2 + gz - lR_N = 0.$$

Но из интеграла живой силы имеем

$$v^2 = 2(gz + E), \quad (92)$$

так что, исключая скорость, найдем

$$R_N = \frac{3gz + 2E}{l}. \quad (93)$$

Впрочем, к этому результату можно прийти значительно быстрее, применяя общую формулу, выведенную в п. 43 (надо помнить, что здесь $m = 1$),

$$R_N = \frac{v^2}{r_0} - F_N.$$

Если вместо v^2 подставить ее величину, определяемую из интеграла живых сил (92), и принять во внимание, что в настоящем случае r_0 (радиус нормального сечения через касательную к траектории) равен l , а составляющая веса единицы массы F_N по нормали PO есть $-\frac{gz}{l}$, то получится как раз формула (93).

Заметим, кроме того, что если вводится, как в п. 48, угол θ_1 маятника P с осью Oz в плоскости меридиана, то достаточно положить $z = l \cos \theta_1$, чтобы формула (93) приняла вид

$$R_N = 3g \cos \theta_1 + 2 \frac{E}{l}.$$

Если примем во внимание, что выше (п. 35, гл. I) мы положили $e = \frac{E}{gl}$, то это равенство становится тождественным с выражением, полученным в п. 39 для реакции в случае математического маятника.

51. Равенство (93) показывает, что реакция R_N будет положительной, если высота точки P больше $-\frac{2E}{3g}$, и отрицательной, если она меньше $-\frac{2E}{3g}$, т. е. реакция направлена или от точки P к центру подвеса O , или в противоположную сторону. Если точка P в своем движении достигает параллели (которую можно назвать критической) с высотой

$$z = -\frac{2}{3} \frac{E}{g}$$

(зависящей от полной энергии E и, следовательно, от начальных условий рассматриваемого движения), то реакция обращается в нуль.

Если подвес маятника физически осуществлен посредством твердого стержня (двусторонняя связь), то эти различные возмож-

ности все в одинаковой мере совместимы с такой постановкой задачи. При этом стержень испытывает растяжение или сжатие, смотря по тому, находится ли точка ниже или выше критической параллели, и, как говорят, „не работает“ в те моменты, когда точка достигает этой параллели, и R_N исчезает.

Движение будет несколько иным, если маятник подвешен на нити, так как в этом случае односторонняя связь действует только до тех пор, пока R_N остается положительной, т. е. до тех пор, пока точка остается ниже критической параллели (соответствующей рассматриваемому движению). Если P в своем движении достигает этой параллели, то в этот момент связь перестает действовать и остается только сила тяжести. Если же в непосредственно следующий за этим момент нить благодаря действию на маятник силы тяжести останется ненатянутой, то точка будет двигаться свободно под действием силы тяжести, описывая дугу параболы (или, в частности, отрезок прямой), которая плавно сопрягается (см. п. 39 гл. I) с предшествующей дугой траектории на сфере. Это параболическое движение будет продолжаться до того момента, когда нить снова будет натянута; с этого момента начнется новая фаза движения по законам сферического маятника.

Не входя в подробное исследование этого вопроса, заметим (это, впрочем, ясно и из интуитивных соображений), что реакция R_N , конечно, остается положительной, пока движущаяся точка находится ниже точки подвеса O , т. е. при $z > 0$. Действительно, если рассматриваемое движение таково, что полная энергия E положительна (или равна нулю), то неравенство $z > -\frac{2E}{3g}$

непосредственно выполняется при $z > 0$. Если же $E < 0$, то критическая параллель, имея положительную высоту, будет, конечно, ниже точки O , но точка P в своем движении не может уже ее достигнуть, потому что при наличии интеграла (92) живых сил в любой момент должно быть $z > -\frac{E}{g}$, а следовательно, и тем более $z > -\frac{2E}{3g}$.

Из предыдущего рассуждения следует, что движениями, которые могут дать начало параболическому движению, оказываются только те, полная энергия которых положительна. С другой стороны, исключаются и движения простого вращения около вертикали точки O , потому что, как мы видели в п. 49, параллель, описываемая точкой P , будет всегда ниже точки O .

Поэтому имеет смысл исследовать возможность указанного выше критического положения только для таких движений, для которых полная энергия была бы положительна, а масса маятника при замене нити стержнем совершала бы движение по сфере между двумя параллелями, верхняя из которых была бы выше центра O .

52. Малые колебания сферического маятника около положения устойчивого равновесия. Пусть для сферического маятника положение M на нисходящей от точки подвеса O вертикали является положением устойчивого равновесия (действительный максимум потенциала), так что масса маятника, предоставленная самой себе в положении, достаточно близком к M , с достаточно малой скоростью (или с достаточно малой живой силой), будет бесконечно долго колебаться в непосредственной близости от M со скоростью (или с живой силой), которая не будет превосходить некоторого произвольного, наперед заданного предела. Чтобы изучить характер этих малых колебаний, отнесем их к системе осей с началом в точке M и с осью z , направленной по вертикали вниз (оси x , y будут, следовательно, горизонтальными).

При этой системе координат уравнение сферы (с центром в точке O , $0, 0, -l$ и с радиусом l), по которой движется точка P , будет

$$x^2 + y^2 + (z + l)^2 - l^2 = 0. \quad (94)$$

Если, как это соответствует характеру задачи, будем рассматривать отношения

$$\frac{x}{l}, \frac{y}{l}$$

как малые количества первого порядка, то из равенства (94), написанного в виде

$$\frac{z^2}{l^2} = -1 + \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

следует, что отношение z/l есть величина (2) второго порядка, а потому им можно пренебречь по сравнению с отношениями x/l , y/l . Отсюда следует, что в первом приближении малые колебания массы маятника P можно отождествить с колебаниями ее ортогональной проекции на плоскость $z = 0$.

С другой стороны, можно уточнить условие медленности, которое входит в определение малых колебаний, допуская, что верхний предел V скорости проекции точки P мал по сравнению со скоростью падения $\sqrt{2lg}$ тяжелого тела с высоты, равной длине маятника, т. е. рассматривая как величину первого порядка также и отношение

$$\frac{V}{\sqrt{2lg}}.$$

Если мы продифференцируем по времени равенство (94) и разделим результат на lV , то, пренебрегая членом с множителем z/l , получим

$$-\frac{\dot{z}}{V} = \frac{x}{l} \frac{\dot{x}}{V} + \frac{y}{l} \frac{\dot{y}}{V},$$

откуда видно, что \dot{z}/V будет величиной первого порядка; после чего, вторично дифференцируя уравнение (94) и полагая $\dot{z} = V(\mathbf{J})$, мы придем опять с точностью до члена с z/l к соотношению

$$-\ddot{z} = \frac{v^2}{lg} + \frac{V^2}{lg}(\mathbf{2}) + \frac{x}{l} \frac{\ddot{x}}{g} + \frac{y}{l} \frac{\ddot{y}}{g}.$$

Если примем во внимание, что

$$v^2 \leq V^2 + \dot{z}^2 = V^2 \left(1 + \frac{\dot{z}^2}{V^2}\right),$$

то увидим, что v^2/lg будет величиной второго порядка.

Так как при колебаниях и горизонтальные ускорения \ddot{x} , \ddot{y} будут по отношению к g также малыми, так что отношения \ddot{x}/g , \ddot{y}/g сами будут величинами первого порядка, то все члены этого выражения для \ddot{z}/g оказываются порядка выше первого; и в первом приближении мы имеем просто $\ddot{z} = 0$.

Спроектируем теперь уравнение (91) движения маятника на оси x , y , z . Так как составляющие реакции \mathbf{R} пропорциональны частным производным от левой части уравнения связи (94), то, обозначая через λ обычный множитель Лагранжа, мы получим три уравнения:

$$\ddot{x} = \lambda x, \quad \ddot{y} = \lambda y, \quad \ddot{z} = \lambda(z + l) + g. \quad (95)$$

Из последнего из этих уравнений, поскольку мы принимаем $z = \dot{z} = 0$, следует

$$\lambda = -\frac{g}{l}.$$

Подставляя это значение λ в первые два уравнения, мы заключаем, что малые колебания сферического маятника (на горизонтальной плоскости около положения устойчивого равновесия) определяются двумя уравнениями

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0, \quad \ddot{y} + \frac{g}{l}y = 0.$$

Речь идет, следовательно, об эллиптическом периодическом движении точки, притягиваемой центром M с силой, величина которой пропорциональна расстоянию (п. 10); когда начальная скорость проходит через M или равна нулю, то колебания будут просто прямолинейными.

§ 9. Маятник Фуко

53. В предыдущих пунктах (48—52) мы изучали движение сферического маятника относительно осей, неизменно связанных с Землей, рассматривая ее как неподвижную. Поэтому полученные результаты

сохраняют свое значение только до тех пор (см. п. 24), пока мы пренебрегаем членами порядка величины угловой скорости ω суточного вращения Земли.

Теперь, очевидно, будет интересно рассмотреть задачу о движении сферического маятника, учитывая это вращение, или, по крайней мере, подойти к дальнейшему приближению, которое было бы достаточным для выявления в относительном движении сферического маятника (по отношению к Земле) некоторых особенностей, доступных опытной проверке, которые отличают его от движения, изученного раньше, т. е. от движения, которое наблюдалось бы, если бы Земля была в покое (или в прямолинейном и равномерном поступательном движении) относительно неподвижных звезд.

Покажем, что для этой цели достаточно приближение, охарактеризованное в п. 25 и затем уточненное в предыдущем пункте.

Другими словами, достаточно рассмотреть одновременно обе схемы задачи, к которым мы пришли при изучении, с одной стороны, влияния вращения Земли на падение тяжелого тела (пп. 24—26), с другой стороны, малых колебаний сферического маятника, без учета движения Земли (предыдущий пункт).

Таким образом, мы придем к результатам, которые экспериментально впервые были проверены Фуко¹⁾ в 1851 г. Точнее, мы покажем, что если сферический маятник предоставлен самому себе без начальной скорости в положении, близком к положению равновесия, то его колебания (которые, если бы Земля была в покое, происходили бы всегда в одной и той же вертикальной плоскости) будут прогрессивно смещаться из первоначальной плоскости или, как можно сказать, выражаясь менее точно, но более наглядно, *плоскость колебаний будет равномерно* вращаться вокруг вертикали места в направлении с востока на запад через юг.

54. Выбрав, как в п. 52, начало координат в положении устойчивого равновесия M колеблющейся точки P , относительно которой мы предположим для определенности, что она находится в северном полушарии, проведем оси координат, связанные с Землей, как в п. 26, т. е. ось z направим по вертикали места вниз, а ось x — в плоскости меридиана точки M на север, так что ось y будет перпендикулярна к плоскости меридиана точки M и направлена на восток.

Здесь, так же как в § 4, при заданной длине l маятника точка P вынуждена двигаться по поверхности сферы с центром в точке O ,

¹⁾ Леон Фуко (Leon Foucault) родился в Париже в 1819 г., умер там же в 1878 г., был астрономом Бюро долгот и обсерватории в Париже и членом Парижской Академии наук. Производил важные экспериментальные исследования в сотрудничестве с Реньо, Физо и др.; прославился прямым определением скорости света.

с координатами $0, 0, -l$ и с радиусом l , уравнение которой имеет вид

$$x^2 + y^2 + (z + l)^2 - l^2 = 0. \quad (94)$$

Действительно, если маятник, как это было в опыте Фуко, подвешен на нити, то связь будет односторонней, но так как мы будем рассматривать только очень малые колебания, то можно быть уверенными (п. 51), что если нить в начале движения предполагается натянутой, то благодаря действию силы тяжести на колеблющуюся точку она будет оставаться натянутой во все время движения.

Поэтому точка P , массу которой для простоты примем равной единице, будет двигаться так, как если бы она была свободна и находилась под совместным действием веса и реакции связи R . Поэтому, используя замечания § 4 и принимая во внимание изложенные там рассуждения (п. 24), можно написать дифференциальное уравнение движения в векторной форме

$$a_r = R + g - 2\omega \times v_r, \quad (96)$$

которое от уравнения (45') движения тяжелого тела относительно Земли отличается только наличием реакции R . Это, очевидно, не опровергает того, что в только что упомянутом случае (п. 25) мы условились рассматривать силу тяжести g как постоянную по величине и по направлению. Отсюда, проектируя уравнение (96) на оси x, y, z и вводя для составляющих реакции обычный множитель Лагранжа λ , мы придем к трем скалярным уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= \lambda x - 2\dot{y}\omega \sin \gamma, \\ \ddot{y} &= \lambda y + 2\dot{x}\omega \sin \gamma + \dot{z}\omega \cos \gamma, \\ \ddot{z} &= \lambda(z + l) + g - 2\dot{y}\omega \cos \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (96')$$

в которых g представляет вес единицы массы в данном месте на поверхности Земли и γ — географическую широту места (т. е. угол вертикали, проходящей через точку M с экваториальной плоскостью Земли).

Здесь представляется естественным сопоставить эти уравнения с уравнениями, которые мы получили в предыдущем пункте при изучении малых колебаний сферического маятника около M , без учета вращения Земли. Третье уравнение системы (96') отличается от аналогичного уравнения системы (95) только наличием вертикальной составляющей — $2\dot{y}\omega \cos \gamma$ сложной центробежной (кориолисовой) силы. Теперь, так как можно написать

$$\frac{\dot{y}\omega}{g} = \sqrt{2} \frac{\dot{y}}{V} \frac{V}{\sqrt{2lg}} \sqrt{\frac{\omega^2 l}{g}}$$

и отношения $\frac{V}{\sqrt{2lg}}$ (п. 52) и $\frac{\omega^2 l}{g}$ (п. 25) должны рассматриваться как количества соответственно первого и второго порядка, мы видим, что добавочный член $-2\dot{y}\omega \cos \gamma$ будет типа $g(2)$ и поэтому в первом приближении им можно пренебречь по сравнению с g .

С другой стороны, остаются в силе оценки порядка величин, которые в п. 52 привели нас к отождествлению малых колебаний точки P с колебаниями ее проекции на горизонтальную плоскость, проходящую через точку M ($z=0$). Эти же оценки позволяют рассматривать вертикальное ускорение \ddot{z} точки P как ничтожное по сравнению с g ; так что третье из уравнений (96'), как и аналогичное уравнение системы (95), сводится к уравнению

$$\lambda l + g = 0;$$

двум первым уравнениям можно придать вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{g}{l}x - 2\dot{y}\omega \sin \gamma, \\ \ddot{y} &= -\frac{g}{l}y + 2\omega(\dot{x} \sin \gamma + \dot{z} \cos \gamma). \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

Но так как

$$\dot{x} \sin \gamma + \dot{z} \cos \gamma = \dot{x} \sin \gamma \left(1 + \frac{\dot{z}}{\dot{x}} \operatorname{ctg} \gamma\right)$$

и в то же время \dot{z} есть величина типа $V(I)$, а \dot{x} сравнима с V (п. 52), то во втором из уравнений (97) можно пренебречь в первом приближении членом $2\omega\dot{z} \cos \gamma$ по сравнению с остальными, поэтому, полагая $\omega_1 = \omega \sin \gamma$, мы заключаем, что малые колебания точки P или, лучше, ее проекции Q на горизонтальную плоскость $z=0$ определяются двумя уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{g}{l}x - 2\dot{y}\omega_1, \\ \ddot{y} &= -\frac{g}{l}y + 2\dot{x}\omega_1. \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

Эти уравнения, если обозначить через \mathbf{a} и \mathbf{v} ускорение и скорость (горизонтальную) точки Q и через \mathbf{k} единичный вектор вертикали, направленной вниз, можно объединить в одно векторное уравнение

$$\mathbf{a} = -\frac{g}{l} \overrightarrow{MQ} + 2\omega_1 \mathbf{k} \times \mathbf{v}. \quad (98')$$

Рассмотрим теперь в плоскости $z=0$ систему прямоугольных осей $x_1 y_1$ с началом в точке M , конгруэнтную с системой xu и вращающуюся вокруг M с постоянной угловой скоростью ω_1 в направлении xu (т. е. в направлении движения стрелки часов с го-

ризонтальным, обращенным вверх циферблатом). Векторная угловая скорость плоскости x_1y_1 относительно плоскости $xу$, очевидно, равна $\omega_1\mathbf{k}$. Отсюда, обратно, векторная угловая скорость $xу$ относительно x_1y_1 равна $-\omega_1\mathbf{k}$. Для ускорения \mathbf{a}_1 относительно осей x_1y_1 проекции Q точки P , которая относительно осей $xу$ имеет скорость \mathbf{v} и ускорение \mathbf{a} , на основании теоремы Кориолиса (в применении к равномерному переносному вращательному движению, т. I, гл. IV, п. 4, б) мы получим выражение

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a} - \omega_1^2 \overline{MQ} - 2\omega_1\mathbf{k} \times \mathbf{v}.$$

Отсюда, если примем во внимание (98'), получим

$$\mathbf{a}_1 = -\left(\frac{g}{l} + \omega_1^2\right) \overline{MQ}$$

или же, наконец, пренебрегая величиной ω_1^2 по сравнению с $\frac{g}{l}$, что возможно, получим

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{g}{l} \overline{MQ}. \quad (99)$$

Мы видим, что *относительно вращающихся осей x_1y_1* горизонтальная проекция Q точки P колеблется так, как если бы она притягивалась точкой M с силой, по величине пропорциональной расстоянию, т. е. по тому же самому закону, который мы в п. 52 нашли, отвлекаясь от вращения Земли, для малых колебаний сферического маятника по отношению к земным осям. Как мы уже знаем, траектория, которую описывает точка Q согласно уравнению (99) относительно осей x_1y_1 , есть эллипс, в некоторых случаях вырождающийся в отрезок прямой (п. 10), а уравнения движения во всех случаях будут иметь вид

$$x_1 = r_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \theta_1\right), \quad y_1 = r_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \theta_2\right), \quad (100)$$

где произвольные постоянные r_1 , r_2 , θ_1 , θ_2 определяются по начальным условиям. Здесь мы выберем эти условия таким образом, чтобы учесть обстановку, в которой был проведен опыт Фуко, упомянутый в самом начале. Фуко, подвесив под куполом парижского Пантеона длинный маятник ($l=67$ м) с очень тяжелой колеблющейся массой (30 кг), вывел его из состояния равновесия OM и укрепил его в слегка отклоненном положении OP_0 , привязав посредством нити груз P к стенке. В заданный момент, который мы примем за начало отсчета времени $t=0$, он пережег нить, и таким образом масса P начала колебаться с начальной скоростью (по отношению к окружающей среде, т. е. к Земле), равной нулю.

Поэтому, обозначая через a расстояние точки P_0 от вертикали $OM=z$ и предполагая, что в момент $t=0$ вращающаяся ось x_1 проходит через Q (проекция точки P_0 на плоскость $z=0$), положим

в этот начальный момент $x_1 = a$, $y_1 = 0$. Так как, далее, в начале движения должно быть $\dot{x} = \dot{y} = 0$, а по теореме об относительном движении, поскольку $\omega_1 k$ есть угловая скорость осей $x_1 y_1$ относительно осей $x y$, мы имеем (т. I, гл. IV, п. 4, б)

$$\dot{x} = \dot{x}_1 - \omega_1 y_1, \quad \dot{y} = \dot{y}_1 + \omega_1 x,$$

то при $t = 0$ мы должны положить $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{y}_1 = -\omega_1 a$. Таким образом, окончательные уравнения движения (100) проекции Q точки P на плоскость $z = 0$ по отношению к вспомогательным осям $x_1 y_1$ принимают вид

$$x_1 = a \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right), \quad y_1 = -\omega_1 a \sqrt{\frac{l}{g}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right),$$

так что эллиптическая траектория точки Q определяется уравнением

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{g y_1^2}{\omega_1^2 a^2 l} = 1.$$

Так как полуоси эллипса равны соответственно a и $\omega_1 a \sqrt{l/g}$ и вторая из них очень мала по сравнению с первой, то речь идет об очень сплюснутом эллипсе, который можно уподобить отрезку оси x_1 . Поэтому на первый взгляд движение маятника по отношению к осям x, y, z будет обыкновенным колебательным движением в плоскости zx_1 ; но эта плоскость не неподвижна, а имеет угловую скорость $\omega \sin \gamma$ в направлении $x y$, которое для лица, смотрящего сверху, будет направлением движения часовой стрелки, т. е. с востока на запад через юг. Хотя эта угловая скорость мала, но угол поворота плоскости колебаний растет непрерывно с временем и становится довольно скоро заметным.

Естественно, что величина $\omega_1 = \omega \sin \gamma$ изменяется вместе с широтой места; максимальной и равной ω она будет на северном полюсе и равной нулю на экваторе. Чтобы перейти в южное полушарие, достаточно изменить знак у γ , и единственная разница в выводах будет заключаться лишь в том, что вращение плоскости колебаний будет совершаться для смотрящего сверху в направлении, обратном движению часовой стрелки.

Чтобы дать понятие о порядке величины ω_1 в средних широтах, заметим, что в местах, где географическая широта, т. е. γ , приблизительно равна 45° , угловое смещение за один час будет равно $\frac{2\pi \sin 45^\circ}{24}$, т. е. немного меньше 10° .

Как уже было сказано, указанные выше выводы теории были подтверждены опытом Фуко, который является поэтому опытным доказательством суточного вращения Земли. По сравнению с отклонением падающего тела к востоку, которое мы приводили как первое доказательство того же самого факта, опыт Фуко представляет существенное преимущество, так как он, так сказать,

накапливает очень малые сами по себе воздействия, которые вращение Земли производит на движение тяжелого тела, и делает их, таким образом, доступными для наблюдения и количественного учета.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Точка, масса которой равна m , движется в плоскости Oxy под действием силы с составляющими $X = \frac{\partial V}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial V}{\partial y}$, где V — какая-нибудь функция от x , y . Доказать, что уравнения движения допускают первый интеграл вида $m\dot{x}\dot{y} - V = \text{const}$.

2. Материальная точка P , масса которой равна m , движется под действием двух сил, направленных к двум неподвижным точкам O и O_1 , с величинами $m\mu r$ и $m\mu_1 r_1$, где $r = OP$, $r_1 = O_1P$, а μ , μ_1 суть постоянные. Доказать, что уравнения движения допускают первый интеграл

$$\mu r^2 \dot{\theta} + \mu_1 r_1^2 \dot{\theta}_1 = \text{const},$$

где θ , θ_1 означают углы радиусов-векторов OP , O_1P с OO_1 .

3. Свободная материальная точка движется под действием силы F (отнесенной к единице массы), зависящей только от положения. Фиксируем одно из движений, возможных в этих условиях, и пусть s есть дуга соответствующей траектории. Показать, что эта дуга s может также рассматриваться как конфигурация равновесия гибкой и нерастяжимой нити, закрепленной на концах и находящейся под действием единичной силы $-F$, в предположении, что линейная плотность нити в любом месте обратно пропорциональна скорости точки в рассматриваемом решении динамической задачи.

4. Из соотношения $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ в случае силы, зависящей только от положения, путем дифференцирования выводится

$$m \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \dot{z}.$$

Дифференцируя дальше, доказать, что разложения в ряд Тейлора декартовых координат x , y , z движущейся точки из состояния покоя и с момента $t=0$ будут типа

$$x = X\tau + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial X}{\partial x} X + \frac{\partial X}{\partial y} Y + \frac{\partial X}{\partial z} Z \right) \tau^3 + \dots$$

и аналогично для y и z , где X , Y , Z суть составляющие силы F , $\tau = \frac{t^2}{2}$, а опущенные члены — по крайней мере шестого порядка по отношению к t .

5. Точка движется в плоскости под действием силы, являющейся производной от потенциала $U(x, y)$. Доказать, что совокупность (пучок) траекторий, соответствующих одному и тому же значению E постоянной энергии, определяется дифференциальным уравнением

$$y'' + (1 + y'^2) \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} - y' \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) = 0,$$

где x , y обозначают декартовы координаты и

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \lambda = \ln \sqrt{2(U + E)}.$$

Для доказательства достаточно приравнять нулю выражение R_n , указанное в упражнении 8 гл. I, вспоминая, что направляющие косинусы нормали к кривой $y = y(x)$, направленной в сторону вогнутости, суть

$$\mp y' / \sqrt{1 + y'^2}, \quad \pm 1 / \sqrt{1 + y'^2}.$$

смотря по тому, будет ли $y'' > 0$ или $y'' < 0$ (радикалы подразумеваются взятыми в арифметическом смысле).

6. В виде непосредственного приложения уравнения (11) или эквивалентного ему уравнения (11') п. 7 этой главы доказать, что:

а) если точка описывает круговую орбиту в центральном движении, центр которого O находится на окружности, то сила, действующая на движущуюся точку, обратно пропорциональна пятой степени расстояния от O ;

б) если эллипс описывается под действием центральной силы, центр которой совпадает с центром эллипса, то сила обратно пропорциональна расстоянию;

в) логарифмическая спираль $r = ae^{-b\theta}$ (a и b — постоянные) и лемниската $r^2 = c^2 \sin 2\theta$ (c — постоянная) могут быть описаны под действием центральной силы, действующей из начала координат и обратно пропорциональной в первом случае кубу, во втором — седьмой степени расстояния.

7. Точка P описывает эллипс под действием двух центральных сил, направленных к двум фокусам F, F' . Полагая $FP = r, F'P = r'$, показать, что если радиальная составляющая первой силы есть μr , то радиальная составляющая второй силы есть $\mu r' + \frac{\nu}{r'^2}$ (μ, ν — постоянные).

8. Показать, что величина центральной силы, которая заставляет материальную точку описывать заданную кривую согласно закону площадей, пропорциональна $\frac{v^2 r}{\rho}$, где v обозначает величину скорости движущейся точки, r — ее расстояние от центра силы, ρ — радиус кривизны заданной траектории.

9. Если радиальная составляющая центральной силы имеет выражение $\varphi(r) = \frac{\mu}{r^2} + \frac{\nu}{r^3}$ (μ и ν — постоянные), то дифференциальное уравнение траектории [(11'), п. 7]] интегрированием может быть приведено к виду

$$r = \frac{p}{1 + e \cos k\theta},$$

где

$$k^2 = 1 + \frac{\nu}{c^2}, \quad \frac{1}{p} = -\frac{\mu}{c^2 + \nu};$$

через c обозначена постоянная площадей, e есть постоянная интегриации, у которой можно предположить тот же самый знак, что и у p , заменяя при случае θ через $\theta + \pi$; вторая постоянная интегриации не входит явно, так как она включена в θ (которая заменяет $\theta - \theta_0$). Заметим, что указанная форма интеграла предполагает $k^2 > 0$ или же $c^2 > -\nu$. Как надо изменить ее, если $c^2 \leq -\nu$?

Если примем $k > 0$, то орбита, очевидно, будет иметь апсидальный угол $\theta = \frac{\pi}{k}$.

При $\nu = 0$ получим $k = 1$; орбита будет коническим сечением с фокусом в центре притяжения, а при $\mu < 0$ будем иметь классический случай ньютоновского притяжения, которому посвящена следующая глава.

Здесь мы хотим добавить еще одно замечание общего характера, которое восходит к Ньютону.

Если движущаяся точка P описывает какую-нибудь траекторию, а траектория вращается с угловой скоростью ω , изменяющейся как-либо с течением времени, то абсолютная угловая скорость вектора P определится равенством

$$\dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_1 + \omega,$$

где ϑ есть угол вектора P с какой-либо неподвижной осью, ϑ_1 — угол вектора P с осью, неизменно связанной с вращающейся орбитой. Ничто не мешает предположить, в частности, что $\dot{\vartheta}_1 = k\dot{\vartheta}$ при постоянном, наперед заданном k , так как достаточно в случае необходимости принять

$$\omega = (1 - k)\dot{\vartheta}.$$

После этого предыдущее можно сделать более наглядным, указав, что для всякой центральной силы вида $\frac{\mu}{r^2} + \frac{\nu}{r^3}$ в предположении $c^2 > -\nu$ орбита будет коническим сечением, вращающимся вокруг фокуса (центра силы) с переменной угловой скоростью $(1 - k)\dot{\vartheta}$. Движение по этому коническому сечению будет происходить с постоянной секторной скоростью kc , следовательно, будет кеплеровым, если речь идет об эллипсе.

10. Показать, что задачу о движении точки, находящейся под действием силы, проходящей всегда через начало и имеющей радиальную составляющую вида $\frac{\psi(\theta)}{r^2(at + b)}$, где при очевидном значении символов t , r и θ буквы a и b обозначают постоянные, а ψ есть любая функция от одного только аргумента θ , можно свести к квадратурам. При $a = 0$ будем иметь теорему Якоби, при $\psi = \text{const}$ — теорему Мешерского. См. G. Armellini, *Sopra l'integrabilità delle equazioni differenziali della Meccanica Rend. Lincei*, т. XXI, 1912, стр. 177—182, 2-й семестр. Для решения достаточно отправиться от уравнений (3) приведенной заметки, выражающих равенство между радиальной и трансверсальной составляющими ускорения и единичной силы.

11. Радиальная составляющая центральной силы есть $\varphi(r) = \nu + \mu r$ (μ и ν — постоянные). Показать, что если ω есть постоянная угловая скорость, с которой будет описываться круговая орбита, то эта орбита будет устойчивой, если $3\omega^2 > \mu$. В этом случае соседние орбиты имеют апсидальный угол

$$\theta = \frac{\pi\omega}{\sqrt{3\omega^2 - \mu}}.$$

12. В случае вертикального движения снаряда уравнение (28) п. 14 этой главы принимает вид

$$\frac{dv}{dt} = \pm g - f(v);$$

знак плюс берется в случае нисходящего движения и минус — в случае восходящего. Приняв функцию сопротивления $f(v)$ удовлетворяющей качественным условиям п. 13, изучить качественно нисходящее движение, аналогично тому, как это было сделано в § 9 гл. I для функции, выражающей квадратичный закон сопротивления. Необходимо при этом различать три

случая $v_0 \geq v_1$, где v_0 означает начальную скорость и v_1 — предельную скорость, определяемую формулой (27) п. 13.

Если s есть расстояние, пройденное вдоль вертикали от начального положения, то интеграл задачи можно представить в виде

$$t = -\frac{1}{g} \int_{v_0}^v \frac{dv}{\frac{f(v)}{g} - 1}, \quad s = -\frac{1}{g} \int_{v_0}^v \frac{v dv}{\frac{f(v)}{g} - 1}.$$

Для восходящего движения имеем наоборот

$$t = -\frac{1}{g} \int_{v_0}^v \frac{dv}{\frac{f(v)}{g} + 1}, \quad s = -\frac{1}{g} \int_{v_0}^v \frac{v dv}{\frac{f(v)}{g} + 1}.$$

Изучить, в частности, случай сопротивления, пропорционального n -ой степени скорости, $f(v) = av^n$ (a — постоянная), и показать, что если за переменное интегрирования принимается $\rho = \frac{v}{v_1}$, то правые части выразятся посредством интегралов вида

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{1 \mp \rho^n}, \quad \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\rho d\rho}{1 \mp \rho^n},$$

где $\rho_0 = \frac{v_0}{v_1}$. Если $n > 1$, то как бы ни была велика скорость v_0 , с которой снаряд бросается кверху, он уже не поднимается выше, чем на высоту

$$h = \frac{v_0^2}{g} \int_0^{\infty} \frac{\rho d\rho}{1 + \rho^n},$$

и достигнет своей максимальной высоты за конечное время, не превосходящее величины

$$\tau = \frac{v_1}{g} \int_0^{\infty} \frac{d\rho}{1 + \rho^n}.$$

Проверить, что аналогичные обстоятельства представляются при $f(v) = Ae^{mv}$ (A и m — постоянные) и что в этом случае будем иметь

$$\tau = \frac{1}{mg} \ln \left(1 + \frac{g}{A} \right).$$

13. Показать, что в случае сопротивления, пропорционального скорости баллистический голограф, определяемый уравнением (30) п. 14, есть прямая в плоскости v, φ (v — радиус-вектор, а φ — аномалия (угол наклона)).

14. Из формулы (26) п. 13 мы знаем, что если $f(v)$ есть сопротивление для заданного снаряда P , то сопротивление для подобного же снаряда P_1 , соответствующее скорости v_1 , есть $cf(v_1)$, где c обозначает постоянную.

Годографы, относящиеся к движениям P и P_1 , называются подобными, если скорости, соответствующие одному и тому же углу наклона φ , находятся в постоянном отношении k . В таком случае то же относится и к углам, заключенным между любыми двумя наклонами, и к соответствующим промежуточным времени; следовательно, и траектории будут *подобными*.

Показать, что подобие возможно тогда и только тогда, когда сопротивление пропорционально некоторой степени скорости. Если n есть показатель этой степени, то имеем $\frac{v_1}{v} = k = \sqrt[n]{c}$. См. F. Siacci, *Balistica*, 2-е изд. Torino, 1888, ч. I, гл. VIII, стр. 112.

15. Уравнение (30) п. 14 непосредственно приводится к уравнению Бернулли и, следовательно, к квадратурам при $f(v)/g = a + bv^n$ (a, b, n — постоянные). Если принять в нем за неизвестное $\ln v$, то в случае

$$\frac{f(v)}{g} = a + b \ln v$$

оно становится линейным. Это случаи, указанные Даламбером в 1744 г., как было указано в п. 15.

Даламбер, кроме того, заметил, что если постоянные a, b, r связаны подходящим соотношением, то и два другие закона:

$$\frac{1}{s} f(v) = av^n + r + bv^{-n}, \quad \frac{1}{g} f(v) = a \ln^2 v + r \ln v + b$$

приводят к случаям интегрируемости в квадратурах. Найти этот результат, замечая сначала, что если $x = \sin \varphi$ принимается за независимую переменную и $y = v^{n+1}$ или соответственно $y = \ln v$ — за неизвестную функцию, то мы приходим к уравнению Риккати. Тогда достаточно будет исследовать, при каких условиях (для a, b, r) это уравнение допускает решение вида $\alpha x + \beta$ (α и β — постоянные).

16. В п. 20 доказаны различные геометрические свойства траектории спаряда. Аналогичными рассуждениями доказать следующее кинематическое предложение:

Всякая восходящая дуга будет пробегаться за меньшее время, чем соответствующая нисходящая дуга. (Соответствующими называются две дуги, заключенные между вершиной и точками с равными высотами.)

17. Принимая во внимание вращение Земли, убедиться, что гажелое тело, брошенное вертикально вверх со скоростью v , при возвращении на высоту бросания дает отклонение к западу, равное при обозначениях п. 26 $\frac{4\omega v^3 \cos \gamma}{3g^2}$ (формула Лапласа).

18. Уравнение (45'') п. 26 движения тяжелого тела при условии, что принимается во внимание вращение Земли, можно строго проинтегрировать хорошо известным способом, поскольку речь идет о линейных уравнениях. В предположении, что тело предоставлено самому себе без начальной скорости, получим после первого интегрирования:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2\omega y \sin \gamma, \\ \dot{y} &= 2\omega (x \sin \gamma + z \cos \gamma), \\ \dot{z} &= gt - 2\omega y \cos \gamma. \end{aligned}$$

Мы пришли к системе первого порядка, линейной относительно x, y, z . Не обращаясь к общей теории, достаточно в этом случае взять производную

от второго уравнения и подставить в полученное уравнение вместо \dot{x} , \dot{z} выражения, даваемые двумя другими. Мы придем, таким образом, к уравнению с одним только u , интеграл которого легко будет указать, и т. д.

19. Наэлектризованная частица P с массой m и зарядом e движется в электрическом и магнитном полях (статических). Их напряженности определены в каждой точке векторами E и M соответственно.

Если предположить, что движение частицы не изменяет силового поля, то оно (движение) согласно теории электромагнитного поля совершается по закону *)

$$m\mathbf{a} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{M}), \quad (1)$$

где \mathbf{v} и \mathbf{a} обозначают скорость и ускорение движущейся частицы.

Если электрическая напряженность E является производной от потенциала $U(x, y, z)$, то мы сразу же видим, что уравнение (1) допускает интеграл живых сил

$$\frac{mv^2}{2} - eU = \text{const.}$$

Уравнение (1), между прочим, дает теорию северного сияния, поскольку это явление рассматривается как происходящее вследствие видимости траекторий наэлектризованных частиц в поле земного магнетизма ($E=0$, M соответствует однородно намагниченной сфере). С этой целью см. работы Штермера (C. Störmer)**).

В случае, когда M происходит от одного единственного полюса при E все еще равно нулю, равенство (1) важно для изучения катодных лучей и было проинтегрировано и иллюстрировано Пуанкаре***).

Изучить в виде упрощения случай, когда E и M постоянны. Принимая ось Oz параллельной M и плоскость Oxz параллельной E , показать, что z есть квадратичная функция времени и что x определяется уравнением вида $\ddot{x} + \omega^2 x = \text{const}$ (ω — постоянная), которое интегрируется непосредственно, как в п. 61 гл. I.

Если, далее, считая все еще M постоянным, предположить, что сила E является центральной, то легко можно изучить движение, которое будет происходить в плоскости, нормальной к M и проходящей через центр O силы E . Достаточно обратиться к осям Ox этой плоскости, вращающимся с угловой скоростью $-\frac{eM}{2m}$ вокруг точки O . Действительно, обозначая через \mathbf{b} ускорение точки P относительно этих осей (относительно которых неподвижные оси вращаются с угловой скоростью $\frac{eM}{2m}$), по теореме Кориолиса будем иметь

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} + \frac{e}{m} \mathbf{M} \times \mathbf{v} + \mathbf{a}_\tau = \mathbf{a} + \frac{e}{m} \mathbf{M} \times \mathbf{v} - \frac{e^2 M^2}{4m^2} \overrightarrow{OP},$$

откуда, в силу уравнения (1),

$$\mathbf{b} = \frac{e}{m} \mathbf{E} - \frac{e^2 M^2}{4m^2} \overrightarrow{OP}.$$

Если $U_1(z)$ есть потенциал центральной силы E (при $r = OP$), то движение точки P относительно подвижных осей происходит под действием силы,

*) См., например, Г. А. Лоренц, Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения, 1934. (Прим. ред.)

**) См. К. Штермер, Проблема полярных сияний, 1933. (Прим. ред.)

***) См. П. Аппель, Курс теоретической механики, т. I, 1911, гл. X, п. 221. (Прим. ред.)

тоже центральной, являющейся производной от потенциала, отнесенного к единице массы,

$$U(r) = \frac{e}{m} U_1(r) - \frac{e^2 M^2}{8m^2} r^2.$$

20. Точка P притягивается к двум неподвижным центрам O_1, O_2 центральными силами, возрастающими вместе с расстоянием и исчезающими вместе с ним, с единичными радиальными составляющими — $\varphi_1(r_1), -\varphi_2(r_2)$, где положено

$$r_1 = O_1P, \quad r_2 = O_2P.$$

На отрезке O_1O_2 , очевидно, находится одно положение O равновесия, в котором $\varphi_1(r_1) = \varphi_2(r_2)$. Доказать, что если речь идет об устойчивом равновесии и если линия центров принимается за ось, то при обозначениях п. 38 будем иметь

$$\omega_1^2 = \varphi_1' + \varphi_2', \quad \omega_2^2 = \omega_3^2 = \frac{\varphi_1}{r_1} + \frac{\varphi_2}{r_2},$$

где подразумевается, что значения r и φ и их производных относятся к точке O .

Если притяжения следуют каким угодно законам и если на отрезке O_1O_2 существует положение равновесия O , то равновесие будет устойчивым, лишь бы было $\varphi_1' + \varphi_2' > 0$.

21. Пусть оси $Oxuz$ вращаются вокруг Oz с постоянной угловой скоростью ω и F — сила, являющаяся производной от потенциала $U(x, y, z)$, который не зависит от времени, если относится к указанным осям.

Показать, что движение свободной точки с массой m , находящейся под действием силы F , допускает интеграл

$$\frac{mv^2}{2} - \left\{ U + m \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) \right\} = \text{const.}$$

Распространить теорему Дирихле на устойчивость относительного равновесия в указанных условиях.

22. Из элементов дифференциальной геометрии известно, что цилиндры и конусы суть развертывающиеся поверхности, т. е. могут быть развернуты на плоскость без изменения длин и углов. Показать на основании уравнения (80) п. 40 (спроектированного на касательную плоскость), что при $F=0$ геодезические линии цилиндров и конусов развертываются в прямые.

23. Доказать, что траектория точки, движущейся по поверхности, будет геодезической линией, даже если принимается во внимание трение скольжения или вообще пассивное сопротивление, прямо противоположное направлению движения.

24. Показать, что тяжелая точка, движущаяся по совершенно гладкой цилиндрической поверхности с вертикальными образующими (и с любым нормальным сечением), описывает траекторию, превращающуюся при развертывании цилиндра на плоскость в параболу (см. п. 40, после проектирования уравнения (80) на вертикаль и на касательную нормального сечения).

25. Тяжелая точка движется по совершенно гладкой плоскости, равномерно вращающейся вокруг лежащей в ней вертикальной оси. Показать, что уравнение проекции траектории на горизонтальную плоскость есть $r = ae^{\theta} + be^{-\theta}$ (r и θ — полярные координаты на горизонтальной плоскости с полюсом на оси, a и b — постоянные).

26. Точка может двигаться по совершенно гладкой поверхности параболоида вращения с вертикальной осью и с вогнутостью, обращенной кверху. Она находится под действием собственного веса и брошена с горизонтальной скоростью v_0 из некоторой точки на параллели радиуса r_0 .

Показать, что если в некоторый момент скорость точки \boldsymbol{v} опять будет направлена горизонтально, то абсолютная величина этой скорости будет равна $r_0 \sqrt{\frac{2g}{p}}$, где p есть параметр меридианной параболы. Как увидим, это абсолютное значение не зависит от начальной скорости v_0 .

27. Пусть ось Oz будет вертикальна и направлена вверх. Начало координат есть положение равновесия для тяжелой точки P , удерживаемой на совершенно гладком параболоиде

$$z = \frac{ax^2 + by^2}{2}.$$

Из двух первых уравнений (80'') п. 42 исключить множитель λ посредством третьего уравнения и z посредством уравнения параболоида. Таким образом, получатся два уравнения движения точки P в координатах x и y .

На основании интеграла живых сил и теоремы Дирихле (отнесенной к параболоиду, т. е. к двум независимым переменным x, y) показать, что равновесие будет устойчивым, если коэффициенты a и b положительны. Малые колебания определяются уравнениями]

$$\ddot{x} = -ax, \quad \ddot{y} = -by.$$

Аналогичное рассуждение будет иметь силу для произвольной поверхности, для тех ее точек, где касательная плоскость будет горизонтальной, так как всякая поверхность в непосредственной близости от какой-нибудь из своих неособых точек может быть уподоблена параболоиду.

28. Пусть ρ, θ, z суть цилиндрические координаты, как в п. 46, и, кроме того, ось Oz вертикальна и направлена вверх. Если положим $u = 1/\rho$ и примем уравнение меридианной кривой на поверхности вращения вокруг оси Oz в форме $z = \varphi(u)$, то дифференциальное уравнение между u и θ , определяющее траекторию тяжелой точки, движущейся по поверхности без трения (или, если угодно, проекцию траектории на горизонтальную плоскость), представится в виде

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 \left\{1 + u^4 \varphi'(u)\right\} + u^2 + \frac{2g}{c^2} \varphi(u) = \text{const},$$

где c есть постоянная площадей.

29. На основании уравнений (87) п. 47, определяющих движение тяжелой точки по поверхности вращения с вертикальной осью и без трения, исследовать возможность движения вдоль параллелей и показать, что речь идет о равномерном движении по параллели с угловой скоростью $\sqrt{g \operatorname{ctg} \gamma}$, где γ обозначает широту (угол нормали к поверхности вдоль параллели с горизонтальной плоскостью).

30. Исследовать малые колебания сферического маятника, принимая во внимание сопротивление воздуха. Сопротивление предполагается вязким, потому что речь идет о медленном движении (гл. I, п. 21); сообразно этому достаточно ввести в левые части уравнений (65') п. 52 два члена вида $2h\dot{x}$, $2h\dot{y}$ (h — положительная постоянная).

Например, полагая $x = e^{-ht}$, $y = -e^{-ht}\eta$, примем, что при достаточно малом h (точнее, при $h^2 < g/l$) движение маятника (отождествляемое с его горизонтальной проекцией) можно рассматривать как эллиптическое, так же как при $h = 0$, с той, однако, разницей, что эллипс стягивается по показательному закону при возрастании времени, оставаясь гомотетичным *) своему начальному положению. Действительная траектория будет иметь вид эллиптической спирали, которая обратится в логарифмическую спираль (т. I, гл. II, п. 37), если эллипс сведется к окружности.

*) Если из какой-нибудь точки S провести ко всем точкам фигуры лучи и затем на этих лучах отложить от точки S в ту же сторону отрезки, увеличенные или уменьшенные в одинаковое число раз, то получившаяся фигура — геометрическое место концов измененных таким образом отрезков, называется гомотетичной данной фигуре. Такая гомотетия называется прямой. Если же увеличенные или уменьшенные отрезки откладываются от S в противоположную сторону, то гомотетия называется обратной. (Прим. перев.)