Глава I

ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ПО ЗАДАННОЙ ТРАЕКТОРИИ

§ 1. Система отсчета для механических явлений

1. Во второй части первого тома (гл. VII—XIV) мы установили законы механики и изложили систематически наиболее важные следствия из них, относящиеся к явлениям покоя, или, поскольку имелись в виду силы, к явлениям равновесия (статика). Теперь, отправляясь от тех же законов, мы перейдем к механике в собственном смысле, т. е. к явлениям движения, или к динамике; при этом мы начнем с рассмотрения движения одной материальной точки, или, как принято говорить для краткости, с динамики точки.

Этот частный случай движения важен не только вследствие своей схематической простоты, но также и благодаря тому, что он составляет основу динамики произвольных материальных систем, так как каждую такую систему при изучении механических явлений можно рассматривать как образованную из совокупности материальных точек или элементарных частиц.

Вся динамика точки основывается на уравнении

$$F = ma, \tag{1}$$

которое для случая одной материальной точки дает полный синтез всех постулатов механики (т. I, гл. VII). В этом уравнении скалярный, существенно положительный коэффициент m обозначает *массу* точки. Сила F представляет собой все действия на точку со стороны внешней среды или, говоря точнее, является равнодействующей всех сил (активных и реакций связей), действующих на точку, и a обозначает ускорение точки. Так как ускорение имеет относительный характер, то всегда необходимо иметь в виду, что уравнение (1) будет вполне строгим только при условии, что ускорение a отсчитывается *в системе координат, не изменяющей своего положения относительно неподвижных звезд* (т. I, гл. VII, § 7).

Чтобы исключить все несущественные ограничения, относящиеся к системе отсчета, сделаем одно замечание. Пусть $\Omega\xi\eta\zeta$ есть система осей координат, не изменяющая своего положения относительно неподвижных звезд, $\Omega'\xi'\eta'\zeta'$ — другая система осей, совершающая относительно первой системы прямолинейное и равномерное поступательное движение; тогда из теории относительного движения непосредственно следует, что ускорение какой-нибудь точки относительно системы $\Omega'\xi'\eta'\zeta'$ в любой момент будет тождественно с ускорением этой же точки относительно системы $\Omega\xi\eta\zeta$ (т. I, гл. IV, п. 4); таким образом, *основное уравнение* (1) *будет вполне строгим во всех тех случаях, когда движение точки рассматривается в системе координат, движущейся поступательно и притом прямолинейно и равномерно относительно неподвижных звезд, или, другими словами, в системе координат, оси которой сохраняют неизменные направления относительно неподвижных звезд, а начало движется прямолинейно и равномерно.*

В дальнейшем, когда мы будем пользоваться уравнением (1), мы всегда будем подразумевать (если не будет оговорено противное), что движение точки относится к только что указанной системе отсчета. Такую систему для краткости будем называть *инерциальной* или *галилеевой* системой. Последнее название было предложено Эйнштейном в его первой статье (1905 г.) о теории относительности и теперь всюду принято. Оно вполне оправдывается тем, что в сочинениях Галилея с удивительной ясностью и точностью подчеркнут тот факт, что для двух наблюдателей, находящихся относительно друг друга в прямолинейном и равномерном поступательном движении, физические явления протекают по одним и тем же законам.

Однако мы будем пользоваться уравнением (1) также и для систем отсчета, отличных от указанной [так, мы знаем (т. I, гл. VII, § 7), что оно приближенно справедливо и для осей, неизменно связанных с Землей], но в каждом таком случае мы будем указывать на характер и пределы ошибок, которые при этом будут получаться.

Необходимо добавить, что при формулировке механических задач мы часто будем говорить о неподвижных точках, прямых и плоскостях. Под этим мы будем подразумевать такие точки, прямые и плоскости, которые неподвижны относительно заданной системы отсчета; за такую систему в большинстве случаев будем принимать или галилееву систему, или систему, неизменно связанную с Землей.

§ 2. Общие соображения о движении точки по заданной траектории

2. Пусть P есть материальная точка с массой m, движущаяся (или, в предельном случае, находящаяся в покое) под действием сил, равнодействующая которых есть $\boldsymbol{F}$. Предположим, что мы заранее знаем траекторию c точки (иногда это вполне возможно, если, например, у нас имеются некоторые данные о характере действующих сил). Тогда для определения движения точки P достаточно найти зависимость между положением точки на траектории и временем (т. е. закон движения). Точнее, если s есть длина дуги траектории c между произвольной начальной точкой и точкой P, отсчитываемая в заданном направлении (*криволинейная абсцисса* точки P), то все сводится к нахождению уравнения движения в конечной форме $s = s(t)$, определяющего положение точки P на заданной траектории c.

Для этой цели возьмем основное уравнение (1)

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$$

и спроектируем обе его части в любой точке кривой c на касательную, проведенную в направлении возрастающих значений s. Так как касательное ускорение точки P равно $\ddot{s}$ (т. I, гл. II, п. 26), то мы получим следующее скалярное уравнение:

$$m\ddot{s} = F_t \tag{2}$$

(первое внутреннее уравнение движения точки P; см. т. I, гл. VII, п. 31). Предположим, что касательная составляющая F_t силы $\boldsymbol{F}$ известна. Согласно сказанному в п. 22 гл. VII т. I, это означает, что F_t должна быть известной функцией от положения и скорости точки P и, может быть, также и от времени t. Так как на заданной траектории c положение точки P однозначно определяется ее криволинейной абсциссой s, а скорость — скалярной величиной $\dot{s}$ (поскольку направлением скорости в любой точке является направление касательной), то из только что сказанного следует, что составляющая F_t представляет собой известную функцию $f(s, \dot{s} \mid t)$ от трех аргументов, $s, \dot{s}, t$, и равенство (2) принимает вид

$$m\ddot{s} = f(s, \dot{s} \mid t). \tag{2'}$$

Таким образом, задача о движении точки P по траектории c сводится к определению всех функций $s(t)$, удовлетворяющих уравнению (2'), т. е. к интегрированию одного единственного дифференциального уравнения второго порядка.

В общем случае это уравнение не интегрируется в конечном виде; только в редких случаях, примеры которых мы дадим в §§ 4 и 5, его удается интегрировать в квадратурах.

Однако в анализе доказывается, что при достаточно широких качественных условиях для функции от трех аргументов $f(s, \dot{s} \mid t)$ уравнение (2') имеет общий интеграл, зависящий от двух произвольных постоянных. Так как в нашей механической интерпретации функция $F_t = f(s, \dot{s} \mid t)$ в конкретных задачах этим условиям полностью удовлетворяет, то можно сказать, что на траектории c при заданных действующих силах возможны ∞^2 отличных друг от друга движений; из всех этих движений мы сможем выделить одно, если будем иметь достаточно данных для определения двух постоянных интегрирования.

Так, например, можно доказать, что если функция $f(s, \dot{s} \mid t)$ в определенной области конечна, непрерывна и дифференцируема по любому из трех ее аргументов, то среди интегралов уравнения (2') всегда существует такая функция $s(t)$, которая однозначно определяется следующими условиями: функция s и ее производная при заданном значении t_0 независимой переменной (принадлежащем рассматриваемой области) принимают произвольно заданные (тоже из рассматриваемой области) значения s_0, $\dot{s}_0$. Поэтому мы можем сказать, что при заданных условиях среди возможных движений точки P по траектории c имеется одно и только одно движение, при котором точка P пройдет через произвольно выбранное положение в заданный момент времени и с заданной скоростью.

Подобным же образом в анализе доказывается, что при условиях, которых мы здесь точно не будем указывать, уравнение (2′) имеет (по крайней мере для некоторого промежутка времени, или, если угодно, для надлежащим образом выбранной дуги кривой) один и только один интеграл, принимающий для двух заданных значений времени t два произвольно выбранных значения. Поэтому мы можем утверждать, что среди движений точки P по траектории c, определяемых уравнением (2′), существует одно и только одно движение, при котором P в два заданных момента времени проходит через два предписанных положения.

3. Среди ∞^2 движений, определяемых уравнением (2′), может заключаться, в частности, и положение равновесия в какой-нибудь точке s_0. Для того чтобы это имело место, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (2′) удовлетворялось тождественно (т. е. для всякого значения независимого переменного t), если в него подставить вместо функции $s(t)$ постоянную s_0; следовательно, должно быть

$$f(s_0,\ 0\,|\,t)=0$$

при всяком t. Это можно было предвидеть. В самом деле, общее условие равновесия состоит, как мы знаем, в том, что сила должна быть равна нулю, а $f(s_0,\ 0\,|\,t)$ есть не что иное, как касательная составляющая F_t такой силы, которая удовлетворяет предполагаемому состоянию равновесия движущейся точки в положении $s=s_0$.

§ 3. Несвободное движение точки по кривой. Центростремительная реакция и центробежная сила. Приложения

4. Во многих случаях точка P может двигаться только по заданной линии c благодаря специальным приспособлениям (направляющим, трубам, рельсам, нитям, связи с другими телами). Иными словами, движение точки направляется связями, влияние которых на движение можно представить, как мы знаем (т. I, гл. VII, п. 15), в виде некоторой силы, так называемой реакции связи $\boldsymbol{R}$, заранее неизвестной.

В этих случаях для определения движения точки вообще недостаточно знать тангенциальную составляющую F_t активной силы $\boldsymbol{F}$

(т. е. той силы, которая одна приводила бы в движение точку, если бы не было связей). Поэтому при указанном предположении мы должны заменить основное уравнение (1) следующим уравнением:

$$ma = F + R; \tag{1'}$$

проектируя обе части его на касательную, получим

$$m\ddot{s} = F_t + R_t. \tag{2''}$$

Здесь тангенциальная составляющая R_t силы R тоже неизвестна.

Однако бывают случаи, когда составляющую R_t можно заранее определить. Ниже, в § 8, мы остановимся подробнее на действии реакции R во время движения, аналогично тому, как это было сделано в гл. IX т. I для случая равновесия. Но уже теперь, если принять во внимание полученные там результаты (а также общие рассуждения п. 3 гл. XV), мы можем путем обобщения заключить, что если речь идет о таких связях, для которых в статических условиях трением можно пренебречь (т. е. о связях идеальных, без трения), то реакция будет нормальна к траектории также и при движении в любом положении движущейся точки. Следовательно, R_t будет равна нулю, и движение будет определяться опять уравнением (2).

Таким образом, *точка, вынужденная* (вследствие связей без трения или приближенно без трения) ***оставаться на некоторой кривой, движется по ней так, как если бы она находилась исключительно под действием активной*** (касательной) *силы.*

5. Независимо от того, имеется трение или нет, основное уравнение (1')

$$ma = F + R$$

приводит нас к замечательным выводам. Спроектируем для любой точки траектории обе части уравнения на соответствующую главную нормаль (направленную к центру кривизны) и решим полученное уравнение относительно R_n. Вспоминая выражение $a_n = \frac{v^2}{r}$ для нормального ускорения (т. I, гл. II, п. 26), где v есть абсолютная величина скорости и r — радиус кривизны траектории, получим

$$R_n = m\frac{v^2}{r} - F_n. \tag{3}$$

Составляющая R_n полной реакции R связей, т. е. тел (трубы, рельсов и т. п.), материализующих кривую c, называется центростремительной реакцией связи.

В то время как в случае покоя ($v = 0$) эта составляющая в точности равна и противоположна аналогичной составляющей активной силы, при движении, т. е. когда $v \neq 0$, она содержит в себе в качестве слагаемого, как это видно из равенства (3), величину $m\frac{v^2}{r}$, всегда положительную (направленную по главной нормали в сторону вогнутости или, как иногда говорят, внутрь кривой[1]), прямо пропорциональную квадрату скорости и обратно пропорциональную радиусу кривизны, т. е. по своему значению тем бо́льшую, чем больше в рассматриваемом положении кривизна траектории c.

6. На основании закона равенства действия и противодействия силе $\boldsymbol{R}$, с которой связь (т. е. тело или тела, которые ее осуществляют) действует на движущуюся точку, соответствует равная и противоположная сила $-\boldsymbol{R}$, с которой движущаяся точка действует на связь (в положении, занимаемом точкой в какой-нибудь момент времени).

Составляющая силы $-\boldsymbol{R}$ в направлении *внешней* нормали, действующая на связь и равная по величине R_n, называется *центробежной силой* *).

Заметим, что центробежная сила здесь понимается в смысле, отличном от того, в каком она применяется в теории относительного равновесия, гл. XVI, п. 6.

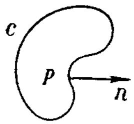
Указанная центробежная сила проявляется, например, в праще, когда ее вращают для метания камня; она же проявляется и тогда, когда шарик, быстро пробегая по кривому жолобу (например, круговому), стремится разрушить внешний его край.

7. Для приспособлений, осуществляющих связи, имеет важное практическое значение, иногда даже большее чем R_n, другая составляющая силы $-\boldsymbol{R}$, нормальная к траектории. Пусть ν — какое-нибудь направление (ориентированное), нормальное к кривой, и θ — угол, который оно образует с главной нормалью n. Так как вектор ускорения является суммой двух составляющих, одной — направленной по касательной и другой — по главной нормали n, то его проекцией a_ν по ориентированному направлению ν будет

$$a_\nu = a_n \cos\theta = m\frac{v^2}{r}\cos\theta$$

---

[1] Строго говоря, это выражение неправильно, так как в случае замкнутой кривой оно может привести к недоразумению. Это видно, например, из прилагаемой фигуры, где нормаль n направлена в сторону вогнутости, и все же не внутрь кривой c, если рассматривать ее в целом. Однако возможности недоразумения не будет, если мы ограничимся, как это обычно и имеет место, рассмотрением кривой в ближайшей окрестности любого положения точки.



Фиг. 1.

*) *Центробежная сила* в том смысле, в каком она введена здесь авторами, представляет собой *нормальное давление движущейся точки на связь. (Прим. ред.)*

(см. т. I, гл. I, п. 12). Поэтому, проектируя уравнение (1') на направление ν и определяя R_ν, получим

$$R_\nu = m\frac{v^2}{r}\cos\theta - F_\nu. \qquad (3')$$

Если, как это мы уже делали выше при определении понятия центробежной силы, мы изменим направление ν нормали на противоположное, то выражение (3') даст составляющую силы $-\boldsymbol{R}$ по направлению ν (измененному). Полагая в этом направлении $\theta = 0$, получим опять равенство (3).

8. Интересные приложения формулы (3') получим, рассматривая случай, когда активная сила сводится к силе тяжести. Если обозначить через α угол, образуемый нормалью ν с вертикалью, направленной вниз (подчеркнем еще раз, что при $\theta = 0$ нормаль ν переходит в главную нормаль n, направленную в сторону вогнутости), то будем иметь $F_\nu = mg\cos\alpha$, и равенство (3') примет вид

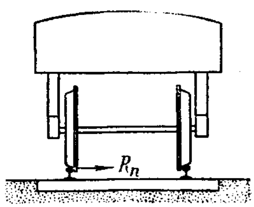
$$R_\nu = m\left(\frac{v^2}{r}\cos\theta - g\cos\alpha\right). \qquad (4)$$

Важно отметить, что это выражение R_ν будет иметь место и в том случае, когда, помимо силы тяжести, имеются и другие активные *чисто касательные силы*, так как эти силы не дают составляющей при проектировании на направление ν.

Если траектория расположена в горизонтальной плоскости, то главная нормаль n будет горизонтальна и, следовательно, в этом случае $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Полагая в равенстве (4) $\theta = 0$, мы увидим, что в этом случае составляющая R_n является величиной существенно положительной (если только речь идет действительно о криволинейном движении, т. е. если скорость v и кривизна $\frac{1}{r}$ отличны от нуля). Отсюда следует, что связи подвергаются действию центробежной силы (направленной по внешней нормали), и притом тем большей, чем больше масса и скорость.

9. Возвышение внешнего рельса. Указанные условия осуществляются, например, при движении железнодорожного вагона на закруглении.

Сосредоточим наше внимание на колесах и учтем тот хорошо известный факт (фиг. 2), что они снабжены с внутренней стороны выступом (ребордой), предназначенным для того, чтобы препятствовать сходу с рельсов.



Фиг. 2.

На закруглении пути связью, противодействующей центробежной силе, будет служить *внешний рельс*. Этот рельс будет испытывать со стороны реборды давление, направленное наружу, по нормали к рельсам (эта нормаль лежит в плоскости пути). Внутренний же рельс не будет испытывать аналогичного действия со стороны реборды соответствующего колеса. Это приводит к тому, что на горизонтальном закруглении внешний рельс должен противодействовать значительному усилию, стремящемуся его разрушить. Поэтому внешний рельс располагают несколько выше внутреннего, причем возвышение определяется таким образом, чтобы действие центробежной силы сделать равным нулю или, по крайней мере, уменьшить.

Для того чтобы оценить требуемое возвышение, обратим внимание на то, что в общем случае величина давления определяется абсолютной величиной правой части равенства (4). Из этого равенства видно, что если траектория не лежит в горизонтальной плоскости, то появляется слагаемое $-g\cos\alpha$, которым можно воспользоваться, чтобы уменьшить или совсем исключить влияние первого слагаемого $\frac{v^2}{r}\cos\theta$.

В нашем случае направлением ν, входящим в формулу (4), является нормаль к рельсам, расположенная в плоскости пути. Следовательно, для достижения указанной цели эта плоскость должна быть уже не горизонтальной, а наклонной, и притом так, чтобы внешний рельс лежал выше внутреннего. С другой стороны, каждый из двух рельсов остается расположенным в горизонтальной плоскости. Поэтому главную нормаль надо рассматривать как горизонтальную прямую. В таком случае угол θ между n и ν будет углом наклона плоскости пути к горизонтальной плоскости. Следовательно, угол α между ν и направленной вниз вертикалью будет равен $90° - \theta$, и формула (4) примет вид

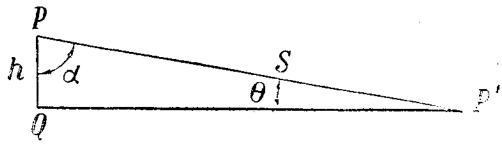
$$R_\nu = m\left(\frac{v^2}{r}\cos\theta - g\sin\theta\right).$$

Таким образом, зная r, т. е. радиус закругления, и среднюю скорость v (вычисленную для различных поездов, проходящих по линии), мы получим давление R_ν на внешний рельс в среднем равным нулю, если определим наклон θ из равенства

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v^2}{rg}. \tag{5}$$

Для скоростей бо́льших средней, давление R_ν будет положительным, т. е. R_ν будет направлено наружу; для скоростей же, меньших средней, давление R_ν будет направлено в противоположную сторону, т. е. во внутрь. Иными словами, в первом случае давление будет испытывать внешний рельс, а во втором — внутренний рельс. Но в том и другом случае, если скорость поезда не слишком отличается от средней, и то, и другое давление будет заключаться в допустимых пределах.

10. Величину возвышения одного рельса над другим мы получим из уравнения (5) на основании следующих соображений. Пусть P (фиг. 3) есть точка внешнего рельса в плоскости пути. Проведем через P нормаль ν к рельсу в плоскости пути, и пусть P' будет точка, в которой эта нормаль встречает внутренний рельс. Отрезок $PP'=s$ изображает расстояние между рельсами, он называется *шириной колеи*[1]). Обозначим через Q проекцию точки P на горизонтальную плоскость, проходящую через P', и рассмотрим треугольник PQP'. Отрезок PQ измеряет искомое возвышение h, а угол при P' (между ν и горизонталью) равен углу наклона плоскости пути к горизонтальной плоскости — θ. Имеем



Фиг. 3.

$$\sin\theta=\frac{h}{s},$$

откуда

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{h}{\sqrt{s^2-h^2}}.$$

Подставляя в уравнение (5), получаем

$$\frac{h}{\sqrt{s^2-h^2}}=\frac{v^2}{g}\cdot\frac{1}{r}.$$

Следовательно, для определения h получаем квадратное уравнение. Вполне понятно, что на практике наклон θ должен быть малым. В таком случае синус можно заменить тангенсом, т. е. в уравнении (5) прямо положить

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{h}{s}.$$

Тогда для h будем иметь более простое выражение:

$$h=\frac{v^2}{g}\cdot\frac{s}{r}. \tag{5'}$$

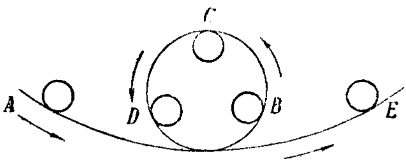
Пусть, например, радиус закругления равен 1000 *м*. Принимая среднюю скорость равной 15 *м/сек* (54 *км/час*), мы для возвышения h получим значение

$$h=\frac{225\cdot 1{,}445}{9{,}8\cdot 1000}\ \text{м}=33\ \text{мм}.$$

---

[1]) Почти во всех странах Европы (исключение составляют только СССР и Испания) ширина колеи нормальных железнодорожных линий равна 1,445 *м*. В СССР она равна 1,524 *м*.

11. Мертвая петля. При помощи формулы (4) можно объяснить акробатический номер, известный под названием мертвой петли. Велосипедист (или автомобилист) пробегает вертикальную траекторию $ABCDE$, изображенную на фиг. 4 (точнее — приблизительно вертикальную, так как вторая половина траектории CDE несколько смещена относительно первой половины ABC). Он находится все время на вогнутой стороне траектории, так что в наиболее высокой точке C петли будет расположен вниз головой.



Фиг. 4.

Здесь, как и в примере с железнодорожным вагоном, среди активных сил имеется движущая сила, возникающая в случае велосипеда от нажима на педали, а в случае автомобиля — в результате работы мотора. Однако эта сила направлена по касательной к траектории, и поэтому уравнение (4) сохраняется. В данном случае траектория движения реализуется опорной кривой, нормальная реакция этой кривой должна быть направлена в сторону опирающегося на них тела (велосипеда), т. е. в сторону вогнутости. Следовательно, такое движение велосипедиста будет возможно только при том условии, когда $R_n > 0$. С другой стороны, это условие и достаточно, потому что опора может развить нормальную реакцию, направленную в сторону опирающегося тела, какой угодно величины (если только опора обладает достаточной прочностью).

Поэтому все сводится к тому, чтобы подобрать кривизну и скорость так, чтобы всюду имело место соотношение

$$\frac{v^2}{r} > g \cos \alpha.$$

Условие это будет выполнено наверное, если взять

$$v > \sqrt{gr}.$$

Пусть в наиболее опасной части петли радиус кривизны равен приблизительно 3 *м*; тогда для успеха номера будет достаточно довольно умеренной скорости — немного большей, чем 6 *м/сек*. Это соответствует скорости 21,6 *км/час*, которая на небольшом участке пути велосипедистом легко может быть достигнута. Этот цирковой номер требует прежде всего силы и хладнокровия.

§ 4. Силы, зависящие от положения точки. Характерный признак упругих или восстанавливающих сил

12. В п. 2 мы указали, что уравнение (2′) движения точки по заданной траектории интегрируется в квадратурах только в немногих частных случаях. В этом и следующем параграфах мы рассмотрим два таких случая, когда действующие силы удовлетворяют определенным условиям.

Прежде всего рассмотрим *силы, зависящие от положения* точки (т. I, гл. VII, п. 22), т. е. примем, что

$$F_t = f(s).$$

В таком случае уравнение (2') примет вид

$$m\ddot{s} = f(s). \tag{6}$$

Покажем, что уравнение (6) посредством одной квадратуры сводится к уравнению первого порядка с одной произвольной постоянной. Для этого вспомним, что в рассматриваемом случае живая сила T движущейся точки определяется выражением $\frac{1}{2}m\dot{s}^2$, следовательно,

$$\frac{dT}{dt} = m\ddot{s}\dot{s}.$$

С другой стороны, мы знаем, что если f является функцией только от s, то существует другая функция U, зависящая тоже только от s (вернее, существует бесконечно много таких функций, отличающихся друг от друга аддитивной постоянной) и притом такая, что

$$\frac{dU}{ds} = f, \tag{7}$$

т. е. U представляет собой не что иное, как неопределенный интеграл $\int f ds$.

Поэтому, умножая обе части равенства (6) на $\dot{s}$, можно написать его в виде

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dU}{ds}\dot{s}.$$

Поскольку U рассматривается как сложная функция от t через посредство s, правая часть есть не что иное, как производная от U по t. Следовательно, интегрируя по t и обозначая постоянную интегрирования через E, получим

$$T - U = E. \tag{8}$$

Это соотношение в конечной форме между кинетической энергией T движущейся точки и ее положением на кривой (определяемом функцией $U(s)$), называется *интегралом энергии*. В конечном счете оно дает соотношение между s и $\dot{s}$ (и произвольной постоянной), т. е. дифференциальное уравнение первого порядка. Проинтегрировав его, мы закончим интегрирование уравнения (6). Но предварительно остановимся немного на интеграле энергии (8).

13. Изучая первые следствия из постулатов механики (гл. VIII, п. 11), мы уже видели, что равенство (8) имеет место для всех движений, в которых силы консервативны; для таких движений U означает соответствующий потенциал.

В нашем случае, когда траектория предполагается заданной, мы пришли к равенству (8), не вводя предположения, что силы консервативны. В самом деле, вполне достаточно, чтобы они зависели только от положения; в таком случае равенство (7) определяет некоторую функцию только от s, играющую роль обыкновенного потенциала, причем особенность этой функции (производная ее равна силе) заключается в том, что она налагает ограничение на движение точки вдоль кривой c и на тангенциальную составляющую f силы.

Разность между значениями U, соответствующими двум точкам s_0 и s_1, на основании равенства (6) всегда равна

$$\int_{s_0}^{s_1} f ds = \int_{s_0}^{s_1} F_t ds,$$

следовательно, равна работе, совершаемой силой $\boldsymbol{F}$ при переходе движущейся точки из положения s_0 в положение s_1. Это оправдывает определение величины $-U$ (ср. т. I, гл. VIII, п. 8) как формы энергии, получаемой движущейся точкой в результате перехода в определенное положение (на кривой c). Уравнение (8) выражает также закон сохранения энергии (в виде суммы двух энергий: кинетической и потенциальной) для материальной точки P.

Если сила $\boldsymbol{F}$ представляет собой производную от потенциала, то этот последний, рассматриваемый как функция положения точки на кривой c, т. е. как функция дуги s кривой, удовлетворяет уравнению (7), и, следовательно, совпадает с U с точностью до некоторой (несущественной) аддитивной постоянной.

В самом деле, обозначим через U' этот потенциал. При переходе точки P в другое какое угодно бесконечно близкое положение полный дифференциал dU' этого потенциала представляет собой элементарную работу, совершаемую силой при таком перемещении. Отсюда следует, что если перемещение ds происходит вдоль кривой c, то должно быть

$$dU' = F_t\, ds = f ds,$$

т. е. dU' совпадает с dU.

14. Интересно отметить, что если материальная точка, на которую действует активная сила, представляющая собой производную от потенциала U, вынуждена двигаться вследствие наличия идеальных связей по заданной траектории, то равенство (8) все же выполняется, потому что тангенциальная составляющая полной силы сводится к $\frac{dU}{ds}$.

С другой стороны, равенство (8) выполняется и для движения при отсутствии связей под действием консервативной силы.

Поэтому в обоих случаях имеем

$$T_1 - T_0 = U_1 - U_0,$$

где T_0 и U_0, T_1 и U_1 суть значения T и U для двух любых моментов времени t_0 и t_1.

Из этого соотношения вытекает интересное следствие. Рассмотрим две материальные точки с равной массой, начинающие (или продолжающие) движение с одинаковой скоростью из общей точки или из разных точек, лежащих на одной и той же поверхности $U = \text{const}$.

Следовательно, в начальный момент времени T_0 и U_0 в обоих случаях имеют одно и то же значение. Если обе эти точки движутся под действием некоторой силы, представляющей собой производную от потенциала U, причем одна точка движется свободно, а другая — вдоль некоторой кривой, являющейся идеальной связью, то обе точки будут пересекать любую эквипотенциальную поверхность с одинаковой скоростью.

Так, например, если две тяжелые точки с равной массой начинают падать, из состояния покоя, одна свободно, а другая по заданной направляющей (без трения), то, достигнув одного и того же уровня, обе точки будут иметь одну и ту же скорость.

Отсюда как следствие вытекает известный закон Галилея, согласно которому тяжелое тело, опустившись с определенной высоты вдоль наклонной плоскости, будет иметь всегда одну и ту же скорость независимо от угла наклона.

15. Вернемся к задаче интегрирования уравнения движения (6). Будем исходить из интеграла живой силы (8); полагая

$$\frac{2}{m}\{U(s)+E\} = \Phi(s), \tag{9}$$

его можно представить в виде

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \Phi(s). \tag{8'}$$

Отсюда получаем

$$\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{\Phi(s)},$$

причем тот или другой знак берется в зависимости от того, будет ли алгебраическое значение скорости $\frac{ds}{dt}$ положительным или отрицательным, или, другими словами, будет ли движение совершаться в сторону возрастающих значений s или в обратном направлении. Разделяя переменные, получим уравнение

$$dt = \pm \frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}},$$

по существу эквивалентное первоначальному уравнению (6). Это уравнение интегрируется одной квадратурой и дает искомое конечное соотношение между s и t. Произвольными постоянными, определяющими решение, будут постоянная E интеграла живой силы и аддитивная постоянная, появляющаяся при последнем интегрировании.

16. Среди сил $f(s)$, зависящих от положения точки, заслуживают особого внимания так называемые *восстанавливающие силы*, стремящиеся возвратить рассматриваемую материальную точку в определенное положение O на кривой c.

Такие силы характерны тем, что в точке O они исчезают, во всякой же другой точке кривой c они действуют как притяжение к точке (направленное по касательной к кривой — здесь мы рассматриваем только касательную составляющую), причем это притяжение возрастает с удалением от точки O вдоль кривой. Такое поведение является типичным для *упругих* сил, в чем легко убедиться на примере пружины; действие последней тем больше, чем сильнее она растянута или сжата, т. е. чем больше она отклонена от того естественного состояния, в котором исчезает всякое ее действие.

Если мы будем отсчитывать дуги от положения, в котором исчезает действие силы (или, другими словами, от положения равновесия), то указанное характерное свойство восстанавливающей силы с аналитической точки зрения выразится следующим образом: функция $f(s)$ исчезает при $s = 0$, имеет знак, всегда противоположный знаку s (это равносильно соотношению $sf(s) < 0$ для любого значения s, не равного нулю, и указывает, что рассматриваемая сила имеет характер притяжения), и, наконец, по абсолютной величине возрастает вместе с абсолютной величиной аргумента.

17. Наиболее простым случаем восстанавливающей силы будет, естественно, тот, когда эта сила прямо пропорциональна расстоянию от положения равновесия. Обозначая через λ положительный коэффициент пропорциональности, будем иметь

$$f(s) = -\lambda s. \tag{10}$$

Это выражение можно считать *типичным для упругой восстанавливающей силы*.

К нему можно прийти также путем следующего рассуждения. Предполагая, что $f(s)$ имеет непрерывные первую и вторую производные, разложим $f(s)$ в окрестности $s=0$ в ряд Маклорена и ограничимся тремя первыми членами; тогда получим

$$f(s)=f(0)+sf'(0)+\frac{s^2}{2}f''(s_1),$$

где s_1 есть некоторое значение между 0 и s. Ограничиваясь рассмотрением действия силы в достаточно малой окрестности положения равновесия O, величиной s^2 по сравнению с s можно пренебречь; следовательно, если предположить, что $f'(0)\neq 0$, то порядок величины произведения $sf'(0)$ будет значительно превышать порядок величины дополнительного члена $\frac{s^2}{2}f''(s_1)$, содержащего множителем s^2 (так как f'' по предположению есть величина конечная). Далее, так как $f(0)=0$, то в достаточно малой окрестности точки O можно принять $f(s)$ приближенно равной линейному члену разложения $sf'(0)$. Коэффициент $f'(0)$ не может быть положительным, потому что в противном случае мы не имели бы восстанавливающей силы. Итак, мы снова пришли к типичному выражению (10).

18. Закон движения, вызываемого силой $-\lambda s$, возвращает нас к хорошо известному классу движений. В самом деле, обозначая через ω^2 существенно положительное число λ/m, мы приведем уравнение (6) в этом случае к виду

$$\ddot{s}+\omega^2 s=0,$$

а это есть не что иное, как уравнение гармонического колебания (т. I, гл. II, п. 36), с той только разницей, что здесь вместо x входит s и, следовательно, вместо прямолинейного движения рассматривается движение по кривой c.

Период колебаний $\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\lambda}}$, как легко видеть, однозначно определяется природой восстанавливающей силы и массой движущейся точки; амплитуда колебаний и фаза, которые появляются в законе движения, выраженном в конечной форме, как постоянные интеграции, наоборот, зависят от начальных условий.

Исследование движения в общем случае, т. е. при какой угодно восстанавливающей силе, мы отложим до § 6; пока же заметим, что качественный характер движения будет оставаться аналогичным характеру движения в рассмотренном простом случае, а именно, всегда будут иметь место периодические колебания движущейся точки (если не просто синусоидальные) в ту и другую сторону от положения равновесия O. При этом наибольшие расстояния от O, достигаемые движущейся точкой (максимальные значения s и $-s$), не всегда будут равными, как это имеет место в гармоническом движении.

§ 5. Силы, зависящие только от скорости. Пассивные сопротивления. Гидравлическое сопротивление. Случай движения снаряда

19. Уравнение (2′) движения точки по заданной траектории интегрируется в квадратурах также и в том случае, когда тангенциальная сила зависит только от скорости. Уравнение (2′) в этом случае принимает вид

$$m\ddot{s}=f(\dot{s}),$$

откуда, разделяя переменные $\dot{s}$ и t, получим

$$m\frac{d\dot{s}}{f(\dot{s})}=dt.$$

Отсюда посредством одной квадратуры выводится конечное соотношение между $\dot{s}$ и t или же между $\dot{s}$ и $t-t_0$, если через t_0 обозначить постоянную интегрирования. Если разрешить это соотношение относительно $\dot{s}$, то $\dot{s}$ $\left(\text{или } \frac{ds}{dt}\right)$ будет выражено через $t-t_0$. Тогда достаточно одной новой квадратуры для того, чтобы найти $s(t)$.

20. Пассивным сопротивлением мы назвали (см. т. I, гл. VII, п. 23) такую силу, которая всегда стремится противодействовать движению, т. е. образует с направлением скорости тупой угол.

В настоящем случае мы будем рассматривать силу $F_t=f(\dot{s})$ как пассивное сопротивление, если она всегда имеет знак, противоположный знаку $\dot{s}$. В таком случае (допуская, что рассматриваемая сила есть непрерывная функция скорости) необходимо, чтобы было $f(0)=0$; в самом деле, в противном случае $f(\dot{s})$ для достаточно малого $\dot{s}$ имела бы знак, одинаковый со знаком $f(0)$, и, следовательно, не могла бы его изменить вместе с $\dot{s}$, как это необходимо для пассивного сопротивления.

21. Наиболее простым выражением пассивного сопротивления, очевидно, будет

$$f(\dot{s})=-b\dot{s}, \tag{11}$$

где через b обозначена некоторая *положительная* постоянная. По соображениям, аналогичным тем, которые были изложены в п. 15, уравнение (11) можно рассматривать как типичное выражение пассивного сопротивления для всех тех случаев, когда рассматриваются малые скорости. К этой категории пассивных сопротивлений принадлежит, по крайней мере в первом приближении, сопротивление, возникающее в вязкой, жидкой или в газообразной среде при медленном движении в ней твердого тела. Значение коэффициента b

существенно зависит от свойств среды, от размеров и формы движущегося тела (когда речь идет о локализации тела на кривой c, его следует мысленно заменить материальной точкой). Так, например, при медленном движении шара радиуса r в вязкой жидкости теория дает для коэффициента b значение

$$b = 6\pi\mu r, \quad [\mu] = mt^{-1}l^{-1},$$

где коэффициент вязкости μ, измеренный в единицах CGS и при температуре в 15°, равен для воды 0,0115 и для воздуха 0,000189.

Следовательно, измеряя r в сантиметрах, а $\dot{s}$ в сантиметрах в секунду, получим силу $b\dot{s}$ в динах. Для того чтобы получить ее в граммах, необходимо, очевидно, разделить полученное значение в динах на $g = 981$.

22. Необходимо заметить, что при быстром движении закон сопротивления среды уже не будет линейным. Для скоростей, обычно встречающихся на практике, а именно между 2 и 200 *м/сек*, сопротивление приблизительно пропорционально квадрату скорости[1]. Это так называемый *квадратичный* или *гидравлический* закон сопротивления, одинаково хорошо применимый как для воды, так и для воздуха. Коэффициент при v^2 можно взять в форме $KA\alpha$, где множитель K зависит только от свойств среды и пропорционален ее плотности, A есть площадь миделева сечения движущегося тела, т. е. площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную к направлению движения, и α — отвлеченное число, зависящее от формы, но не от размеров движущегося тела, и от ориентировки тела относительно направления движения, предполагаемого поступательным.

Очевидно, что при A и α, равных единице, коэффициент K будет представлять собой сопротивление среды.

Принимая для квадрата (в виде тонкой пластинки, движущейся перпендикулярно к своей плоскости) $\alpha = 1$, получим для воды как среднее из многочисленных опытов[2])

$$K = 94{,}6 \ \text{кг/м}^2,$$

а для воздуха

$$K = 0{,}08 \ \text{кг/м}^2.$$

Заметим, впрочем, что последнее значение действительно только для квадратных пластинок с площадью, большей 1 *м*². В случае же пластинок с меньшей площадью коэффициент K несколько меньше

---

[1]) Опыты, произведенные недавно для большого диапазона скоростей, как будто показали, что в интервале от 75 до 100 *м/сек* наблюдается небольшое уменьшение коэффициента пропорциональности (см., например, Fuchs — Hopf, *Aërodynamik*, Berlin, Schmidt, 1922).

[2]) См., например, G. Eiffel, La résistence de l'air (Paris, 1910).

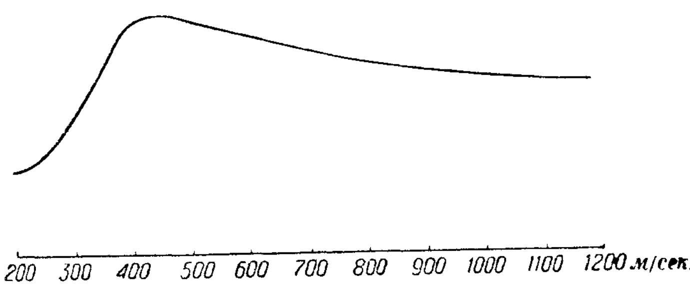
и для пластинок с площадью в несколько квадратных сантиметров достигает значения 0,066.

Итак, общим выражением квадратичного сопротивления будет

$$f(\dot{s}) = \pm KA\alpha v^2 = \pm KA\alpha \dot{s}^2.$$

Двойной знак вводится потому, что направление силы всегда противоположно направлению скорости, и поэтому надо брать знак минус, когда движение прогрессивное ($\dot{s} > 0$), и знак плюс, когда движение регрессивное ($\dot{s} < 0$).

23. Для движений с еще более значительными скоростями, встречающимися, например, в баллистике, сопротивление фактически уже не остается пропорциональным квадрату скорости, а следует совсем



Фиг. 5.

другому закону. В общем случае сопротивление воздуха, отнесенное к единице массы, можно представить в виде $\lambda F(v)$, где λ — коэффициент, зависящий от формы снаряда и от плотности воздуха (аналогично коэффициенту $KA\alpha$), но не зависящий от скорости, а $F(v)$ есть функция только скорости v.

Сиаччи [1]) первым начал систематические опыты с целью определения функции $F(v)$. В результате своих исследований он получил для частного $K(v) = \frac{F(v)}{v^2}$ (которое в случае квадратичного сопротивления должно было бы быть постоянным) кривую, изображенную на фиг. 5. Мы видим, что, начиная с 200 *м/сек*, кривая быстро поднимается, при скорости, близкой к скорости звука, имеет точку перегиба и достигает максимума между 400 и 500 *м/сек*, после чего медленно опускается, по крайней мере для скоростей, проверенных до сих пор на опыте.

[1]) Франческо Сиаччи (Francesco Siacci) родился в Риме в 1839 г., умер в Неаполе в 1907 г. Преподавал баллистику в Практической школе артиллерийских и инженерных наук (Scuola d'Applicazione d'Artiglieria e Genio в Турине. Состоял профессором в университете сначала в Турине, а потом в Неаполе. Известен как автор трактата по баллистике (F. Siacci, Balistica 2 изд., Torino, 1888) и ряда других крупных работ.

§ 6. Движение под действием позиционной силы

24. В предыдущих параграфах мы изложили общие сведения элементарного характера, относящиеся к динамике одномерного движения точки. Перейдем теперь к углублению этих сведений, иллюстрируя изложение рядом типичных задач.

Прежде всего займемся изучением качественной стороны движения точки по заданной траектории под действием какой угодно позиционной силы. Возьмем соответствующее уравнение живых сил (8')

$$\dot{s}^2 = \Phi(s);$$

на основании равенств (7) и (9) имеем

$$\frac{1}{2} m \frac{d\Phi}{ds} = f(s) = F_t. \tag{9'}$$

Уравнение (8') есть необходимое следствие из основного уравнения (2')

$$m\ddot{s} = f(s)$$

и, обратно, из уравнения (8') неизбежно вытекает уравнение (2') для всех моментов времени, кроме тех, для которых $\dot{s} = 0$. В самом деле, дифференцируя уравнение (8') по t и принимая во внимание равенство (9'), получаем

$$2\dot{s}(m\ddot{s} - f(s)) = 0.$$

Поэтому при исследовании движения мы можем пользоваться уравнением (8') вместо уравнения (2') до тех пор, пока скорость не обратится в нуль; для тех же моментов времени, когда $\dot{s} = 0$, уравнения (8') будет недостаточно. Необходимо также убедиться в том, что удовлетворяется уравнение (2').

Относительно функции $\Phi(s)$, входящей в уравнение (8'), мы сделаем одно аналитическое допущение, хорошо согласующееся с характерными чертами тех явлений, с которыми мы встречаемся в механике. А именно, предположим, что функция $\Phi(s)$ при всех тех конечных значениях s, которые мы будем рассматривать, конечна и непрерывна вместе со своими производными всех порядков; следовательно, для всякого возможного корня s_1 уравнения $\Phi(s) = 0$ между последовательными производными функции $\Phi(s)$ всегда найдется такая, которая при $s = s_1$ будет отлична от нуля. Этому условию наверное удовлетворяют все аналитические и регулярные функции*) $\Phi(s)$ для тех значений s, которые нам придется здесь рассматривать.

*) Аналитическая функция $f(z)$ называется *правильной* или *регулярной* в точке a, если внутри некоторого круга с центром в точке a она может быть разложена в ряд Тэйлора

$$f(z) = A + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots$$

(Прим. ред.)

25. Далее, заметим, что при движении, определяемом уравнением (8′), функция $\Phi(s)$, равная квадрату скорости, всегда или положительна, или равна нулю. Следовательно, в зависимости от начальных условий могут быть два случая, а именно, для значения s_0, соответствующего начальному положению движущейся точки, будет $\Phi(s_0) > 0$ или $\Phi(s_0) = 0$.

В первом случае в свою очередь представляются две возможности. В самом деле, предполагая $\Phi(s_0) > 0$, будем иметь для скорости $\dot{s}_0$ на основании уравнения (8′) два возможных значения

$$\dot{s}_0 = \pm\sqrt{\Phi(s_0)},$$

не равных нулю и отличающихся друг от друга только знаком; тот или другой знак определяется установленным произвольно положительным направлением на кривой, по которому начинается движение. После выбора направления получаем для движения одно из двух дифференциальных уравнений первого порядка,

$$\dot{s} = \pm\sqrt{\Phi(s)}.$$

Это уравнение определяет движение до тех пор (см. предыдущий пункт), пока скорость не обращается в нуль, т. е. пока s не совпадает с одним из корней $\Phi(s)$.

Таким образом, случай $\Phi(s_0) > 0$ распадается на два частных случая: или от s_0 до $\pm\infty$ в направлении движения не встречается больше корней $\Phi(s)$; или же в указанном направлении существует первый корень s_1 функции $\Phi(s)$.

26. Рассматривая первый частный случай, предположим для определенности, что $\dot{s}_0 > 0$; следовательно, согласно сказанному выше движение определяется уравнением

$$\dot{s} = \sqrt{\Phi(s)} \tag{8″}$$

и при $s \geqslant s_0$ $\Phi(s)$ всегда > 0. Из уравнения (8″), разделяя переменные, как в п. 15, получаем

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}}. \tag{12}$$

Так как $\Phi(s)$ при $s \geqslant s_0$ в нуль не обращается, то мы можем увеличивать криволинейную абсциссу s от ее начального значения s_0 до бесконечности. Следовательно, t, как показывает уравнение (12), будет все время расти (начальное значение t можно принять равным нулю), т. е. t будет монотонной функцией от s.

Если функция $\dfrac{1}{\sqrt{\Phi(s)}}$ допускает интегрирование в бесконечных, то t при неограниченном возрастании s будет стремиться к некоторому конечному пределу t_1; в противном случае t будет стремиться к бесконечности. Следовательно, из монотонности функции $t(s)$ вытекает, что обратная функция $s(t)$ будет также монотонной. Эта функция $s(t)$ согласно определению удовлетворяет уравнению (8″) и при $t=0$ принимает значение s_0. На основании теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка (эта теорема справедлива при весьма широких качественных условиях, которые в настоящем случае можно считать с избытком выполненными) непосредственно получаем, что функция, найденная таким путем, является решением уравнения (8″), дающим искомый закон движения. Таким образом, в рассмотренном случае движущаяся точка в течение конечного или бесконечного промежутка времени уходит из своего начального положения в бесконечность.

27. Предположим теперь, что попрежнему $\Phi(s_0)>0$ и $\dot{s}_0>0$, т. е. движение опять определяется уравнением (8″), но при изменении s от s_0 в направлении начальной скорости встречается такое конечное значение s_1, которое является первым корнем уравнения $\Phi(s)=0$.

Рассуждая так же, как и в предыдущем случае, на основании уравнения (12) будем иметь, что t при возрастании s от s_0 до s_1 тоже постоянно возрастает. Точнее, поскольку функция

$$\frac{1}{\sqrt{\Phi(s)}}$$

при $s=s_1$ имеет бесконечность порядка $\frac{m}{2}$, где m есть порядок нуля s_1 функции $\Phi(s)$, монотонная функция

$$t(s)=\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}}$$

при возрастании s от s_0 до s_1 будет стремиться к конечному значению t_1 или к бесконечности, смотря по тому, будет ли s_1 простым нулем или кратным. Но, как и в предыдущем пункте, обратная функция $s(t)$, будучи монотонной, удовлетворяет уравнению (8″) и при $t=0$ принимает значение s_0. Следовательно, $s=s(t)$ будет законом рассматриваемого движения. Таким образом, если s_1 есть простой нуль функции $\Phi(s)$, то при сделанных предположениях движущаяся точка, перемещаясь постоянно в одну сторону из положения s_0, через конечный промежуток времени придет в положение s_1; напротив, если s_1 есть кратный нуль, то движущаяся точка, перемещаясь все время в одну сторону, неограниченно приближается к положению s_1, но никогда его не достигает *(асимптотическое движение)*.

28. Остается рассмотреть тот случай, когда начальная скорость равна нулю, т. е. когда начальное значение s_0 является нулем функции $\Phi(s)$. В этом случае движение в начальный момент уже не может быть описано полностью уравнением живых сил (8′) (см. п. 24).

Сначала предположим, что s_0 является простым нулем функции $\Phi(s)$. В этом случае мы придем к „закону возникающего движения“ (т. I, гл. VII, п. 12), на основании которого при начальной скорости, равной нулю, первый элемент пути проходится движущейся точкой в направлении действующей активной силы, т. е. в нашем случае в направлении, определяемом знаком F_t, или на основании уравнения (9′) знаком производной $\frac{d\Phi}{ds}$ при $s=s_0$, которая, по предположению, для $s=s_0$ отлична от нуля. Отсюда следует, что непосредственно вслед за этим начальным мгновением мы снова будем иметь условия, рассмотренные в двух предыдущих пунктах, т. е. материальная точка, не изменяя направления своего движения, или будет двигаться в направлении первого элемента своего пути до бесконечности, если только с этой стороны от s_0 нет нулей функции $\Phi(s)$, или в конечное время достигнет первого нуля функции $\Phi(s)$, если этот нуль простой, или, наконец, асимптотически будет стремиться к этому нулю, если он кратный.

29. Предположим, наконец, что начальное расстояние s_0 является кратным нулем функции $\Phi(s)$. Тогда для определения движения недостаточен и закон возникающего движения, так как при обращении в нуль $\frac{d\Phi}{ds}$ при $s=s_0$ обращается в нуль на основании равенства (9′) также и начальная (касательная) сила $f(s_0)$. Однако в этом случае, как и во всяком другом, $s=s_0$ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка (2′)

$$m\ddot{s}=f(s),$$

к которому необходимо возвращаться всегда, когда при обращении скорости в нуль уравнение первого порядка (живых сил) становится недостаточным для определения движения.

На основании теоремы существования и единственности интеграла дифференциального уравнения второго порядка решение $s=s_0$ будет единственным решением уравнения (2′), для которого начальными условиями будут $s=s_0$ и $\dot{s}=0$. Отсюда следует, что при сделанных предположениях материальная точка остается в равновесии в начальном положении.

Сравнивая этот результат с результатом п. 27, можно сказать, что движущаяся точка не может уже во время движения проходить через такое положение, криволинейная абсцисса которого является кратным (правильным) нулем функции $\Phi(s)$: она может только стремиться к нему в асимптотическом движении, или же неограниченно долго оставаться в нем в случае, если она была там вначале.

30. Результаты пп. 26—29 позволяют выяснить, как протекает изучаемое движение, начиная с какого-нибудь начального положения.

Особого внимания заслуживает случай, когда это начальное положение находится между двумя простыми последовательными нулями s_1 и s_2 функции $\Phi(s)$, причем оно может и совпадать с одним из этих нулей. Напомним, что между этими нулями функция $\Phi(s)$ на основании условия действительности движения остается все время положительной. В таком случае, предполагая для определенности, что $s_1 < s_2$, можно представить функцию $\Phi(s)$ в виде

$$\Phi(s) = (s - s_1)(s_2 - s)\,\Phi_1(s), \tag{13}$$

где $\Phi_1(s)$ обозначает функцию, положительную во всем интервале от s_1 до s_2, включая и концы интервала. Уравнение живых сил примет вид

$$\dot{s}^2 = (s - s_1)(s_2 - s)\,\Phi_1(s). \tag{14}$$

Фиксируя в интервале от s_1 до s_2, например, в какой-нибудь внутренней точке, начальное положение s_0 материальной точки, мы тем самым определим абсолютную величину $\sqrt{(s_0 - s_1)(s_2 - s_0)\,\Phi_1(s_0)}$ начальной скорости $\dot{s}_0$, но не ее знак, который можно выбрать произвольно.

Если, например, взять знак плюс, то получим движение, все время направленное к точке s_2, причем это положение достигается движущейся точкой за конечное время (п. 27). В точке s_2 скорость обращается в нуль, и, так как s_2 есть простой нуль функции $\Phi(s)$, то отсюда движение начнется снова в направлении, указываемом знаком действующей тангенциальной силы, т. е. знаком, который в точке s_2 имеет функция $\frac{d\Phi}{ds}$. Так как на основании равенства (13)

$$\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)_{s=s_2} = -(s_2 - s_1)\,\Phi_1(s_2) < 0\,,$$

то движение после достижения точки s_2 будет происходить в обратном направлении, т. е. по направлению к точке s_1. В это положение движущаяся точка придет опять за конечный промежуток времени и будет иметь в нем скорость, равную нулю. Так как s_1 есть простой нуль функции $\Phi(s)$ и так как

$$\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)_{s=s_1} = (s_2 - s_1)\,\Phi_1(s_1) > 0\,,$$

то движущаяся точка, остановившись на мгновение в положении s_1, снова начнет двигаться к s_2. Следовательно, материальная точка будет неограниченно долго колебаться между положениями s_1 и s_2.

Таким образом, из рассмотрения уравнения (14) следует, что материальная точка при двух *последовательных* прохождениях через одно и то же положение s', заключенное между s_1 и s_2, будет иметь скорости, одинаковые по абсолютной величине, но с противоположными знаками. Следовательно, при третьем прохождении через s' материальная точка снова будет иметь ту же скорость (и по величине и по знаку), что и при первом прохождении.

Отсюда ясно, что рассматриваемое движение *периодично*; в самом деле, при третьем прохождении через любое положение s' скорость приобретает те же величину и направление, что и при первом прохождении, следовательно, картина движения полностью повторяется. Промежуток времени между двумя последовательными повторениями картины движения называется *периодом* колебания.

Этому интуитивному выводу можно придать строгую аналитическую форму, если применить теорему существования и единственности интеграла к уравнению (2')

$$m\ddot{s} = f(s).$$

Обозначим через t' и $t' + T$ моменты первого и третьего прохождения нашей точкой положения s' и через $\dot{s}'$ — соответствующую скорость. Координата s движущейся точки, рассматриваемая как функция от t, дает решение $s(t)$ уравнения (2'), причем при $t = t'$ эта координата принимает значение s', а ее производная становится равной $\dot{s}'$. С другой стороны, уравнение (2'), не зависящее явно от t, не изменяется при замене t на $t + \text{const}$, следовательно, функция $s(t + T)$ тоже будет интегралом уравнения (2'). Но при $t = t'$ значения этой функции и ее первой производной дают координату и скорость при третьем прохождении, совпадающие с координатой и скоростью при первом прохождении. Отсюда на основании упомянутой теоремы о единственности решения (соответствующего указанным начальным условиям) будем иметь тождество

$$s(t + T) = s(t),$$

которое как раз и выражает периодичность движения.

Таким образом, мы устанавливаем, в частности, что промежуток времени T, введенный сначала для частного положения s', не зависит от него. Кроме того, эта независимость может быть установлена аналитическим путем, если будет найдено явное выражение периода T. Действительно, из самого определения T на основании формулы (12) получим, предполагая для определенности, что вначале движение направлено от s' к s_2,

$$T = \int_{s'}^{s_2} \frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}} + \int_{s_2}^{s_1} \frac{ds}{-\sqrt{\Phi(s)}} + \int_{s_1}^{s'} \frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}},$$

или

$$T=2\int\limits_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}}. \tag{15}$$

Это и есть период колебания.

Из тождества

$$\int\limits_{s_2}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}}=\int\limits_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{-\sqrt{\Phi(s)}},$$

только что использованного для вывода формулы (15), мы видим, что всякое *полное колебание*, т. е. движение, заключенное между двумя последовательными прохождениями точки через одно из крайних положений, например через s_1, можно разбить на два *простых колебания* (первое от s_1 до s_2, второе от s_2 до s_1) равной продолжительности

$$\tau=\frac{1}{2}T=\int\limits_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{\sqrt{\Phi(s)}}.$$

Вследствие периодичности можно ограничиться изучением одного полного колебания, например колебания, начинающегося в s_1, вследствие чего второе крайнее положение s_2 будет достигнуто за полупериод τ, в то время как движущаяся точка возвратится в первый раз в s_1 по истечении целого периода $T=2\tau$. Так как замена t на $t+\mathrm{const}$ является несущественной, то можно предположить, что прохождение через s_2 происходит в момент $t=0$, или, другими словами, что наше полное колебание совершается за интервал времени от $-\tau$ до τ.

Далее, легко видеть, что в моменты t и $-t$, равно отстоящие от $t=0$, движущаяся точка занимает одно и то же положение, но имеет равные по абсолютной величине и противоположные по знаку скорости. Это обстоятельство также непосредственно вытекает из теоремы существования и единственности интеграла, если принять во внимание, что уравнение (2′) не изменится при замене t на $-t$. Действительно, отсюда выводится, что если функция $s(t)$ есть решение уравнения (2′), принимающее при $t=0$ значение s_2, в то время как ее производная обращается в нуль, то функция $s(-t)$ также будет решением уравнения (2′), удовлетворяющим тем же начальным условиям. Отсюда получаем тождество

$$s(t)=s(-t),$$

из которого следует, что

$$\dot{s}(t)=-\dot{s}(-t).$$

В силу отмеченного свойства график функции $s=s(t)$ симметричен по отношению к оси $t=0$, если рассматривать изменение t от $t=-\tau$ до $t=\tau$, т. е. за время полного колебания.

31. В качестве непосредственного и весьма элементарного приложения предыдущей теории рассмотрим снова дифференциальное уравнение движения под действием восстанавливающей силы (п. 18)

$$\ddot{s}=-\omega^2 s \qquad \left(\omega^2=\frac{\lambda}{m}\right);$$

полагая

$$r^2=\frac{2E}{c},$$

будем иметь интеграл живой силы в виде

$$\dot{s}^2=\omega^2(r^2-s^2).$$

Отсюда следует, так как s' действительно, что движущаяся точка не может выходить из интервала, заключенного между двумя простыми нулями $\pm r$ функции, стоящей в правой части, и что речь идет о периодическом колебательном движении между этими двумя крайними положениями.

Период, не зависящий от начального положения, определяется равенством

$$T=\frac{2}{\omega}\int_{-r}^{r}\frac{ds}{\sqrt{r^2-s^2}}=\left[\arcsin\frac{s}{r}\right]_{-r}^{r}=\frac{2\pi}{\omega}; \tag{16}$$

все последовательные простые колебания (от $s=-r$ до $s=r$ или обратно) будут совершаться по одному и тому же закону, если не считать изменения направления движения и смены одного промежутка времени другим. Таким образом, мы снова получаем хорошо известные свойства гармонического движения (т. I, гл. II, пп. 34—36).

32. Последнее заключительное замечание. В п. 30 мы изучали случай, когда начальное положение движущейся точки принадлежит интервалу, заключенному между двумя последовательными простыми нулями функции $\Phi(s)$, в котором эта функция остается положительной.

Из пп. 26—29 вытекает, что помимо колебательных периодических движений, которые получаются при упомянутых выше предположениях, для случая (тангенциальной) действующей силы, зависящей только от положения (в согласии с условиями, указанными в п. 24), возможны еще движения, при которых обращение направления происходит не более одного раза (соответственно одному простому нулю функции $\Phi(s)$). Эти движения допускают асимптотическую точку на конечном расстоянии (в кратном нуле) или же в бесконечности (когда движущаяся точка не встречает уже на своем пути ни одного нуля функции $\Phi(s)$).

Исследование, изложенное в этом параграфе, заимствовано из одного (теперь уже классического) мемуара Вейерштрасса[1].

§ 7. Математический маятник

33. Применим теперь общие рассуждения предыдущего параграфа к математическому маятнику. Под этим названием в механике подразумевается тяжелая материальная точка P, вынужденная оставаться на окружности, расположенной в вертикальной плоскости, и движущаяся без трения. Тангенциальная сила F_t в этом случае сводится к составляющей веса; следовательно, речь идет о силе, зависящей только от положения, поэтому можно утверждать (§ 4), что движение можно определить при помощи квадратур.

Прежде чем исследовать ход движения, выясним, при каких практических условиях оказывается возможным приблизительно выполнить предыдущие предположения. Если, например, возьмем тяжелый шарик, скользящий в трубке, согнутой в кольцо, то действие трения будет слишком значительным для того, чтобы им можно было пренебречь хотя бы в первом приближении. Дело будет обстоять лучше, если связь, удерживающая точку P, будет осуществлена в виде нити, прикрепленной одним концом к неподвижной точке O, или в виде тонкого твердого стержня, вращающегося в заданной вертикальной плоскости вокруг точки O; материальная точка P прикреплена в том и другом случае к свободному концу (нити или стержня).

Если речь идет о нити, то мы будем предполагать, что и в случае движения остается в силе допущение о натяжении, которое мы приняли в п. 36 гл. XIV т. I. Тогда, если тяжелая точка P колеблется так, что нить остается натянутой, то сила $\boldsymbol{R}$, с которой нить действует на точку P, будет всегда направлена к неподвижной точке O, и поэтому будет нормальной к траектории, что как раз и означает отсутствие трения.

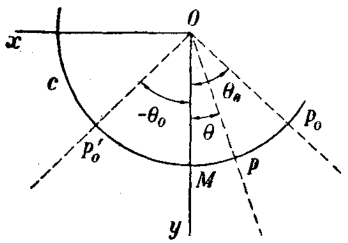
Если нить заменяется твердым стержнем, то a priori можно считать, что он будет действовать на точку P не только в радиальном направлении (в сторону точки O или, что одинаково возможно, в обратную сторону), но будет также передавать точке (полностью или частично) действие сил, приложенных к самому стержню: собственного веса, сопротивления воздуха и, кроме того, трения, развивающегося в точке подвеса O.

[1]) Карл Вейерштрасс (Karl Weierstrass) родился в 1815 г. в Остенфельде (Вестфалия), умер в 1897 г. в Берлине, где был профессором университета в течение 40 лет. Он дал новый систематический метод в теории функций и, в частности, в теории эллиптических функций. Помимо того он весьма активно работал почти во всех областях анализа. Мемуар, на который делается ссылка в тексте, находится во II томе его сочинений.

Однако трение в точке подвеса можно уменьшить путем подходящего устройства (подвес на острие); сопротивление воздуха, так же как и влияние собственного веса стержня, может быть по желанию уменьшено, если стержень взять достаточно тонким. При таких ограничениях и в этом случае оказывается возможным рассматривать связь, как связь без трения.

В дальнейшем (гл. VII, § 2) мы рассмотрим случай так называемого физического или сложного маятника, когда учитывается и вес стержня.

34. Пусть точка P движется по окружности c, расположенной в вертикальной плоскости. Будем относить точки плоскости к системе координат x, y с началом в точке подвеса O (центре окружности c) и с вертикальной осью y, направленной вниз (фиг. 6). Обозначим через l длину маятника (радиус окружности c) и через θ угол отклонения его от вертикали, т. е. угол, который радиус-вектор OP образует с вертикалью Oy. Угол θ отсчитывается в том направлении, в котором положительное вращение на прямой угол переводит положительное направление оси x в положительное направление оси y. Вследствие этого угол отклонения, соответствующий заданному положению движущейся точки P, оказывается определенным только до числа (положительного или отрицательного), кратного 2π; значение его можно уточнить, указав, сколько раз движущаяся точка описала полную окружность, считая от самого низкого положения M, прежде чем прийти в P. Если за угол θ возьмем какое-нибудь значение угла отклонения вектора $\overrightarrow{OP}$ от вертикали, то $\frac{\pi}{2}+\theta$ можно будет рассматривать как угол, который прямая OP составляет с положительным направлением оси x (угол считается положительным в направлении $x \to y$ и отрицательным в обратном направлении). Поэтому для всякой точки P окружности c будем иметь



Фиг. 6.

$$x = l\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -l\sin\theta, \quad y = l\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = l\cos\theta. \qquad (17)$$

Далее, если длину дуги s окружности c будем отсчитывать от самого низкого положения M при том же самом соглашении о выборе положительного направления отсчета углов, то будем иметь соотношение

$$s = l\theta, \qquad (18)$$

которое дает возможность принять за параметр, определяющий положение движущейся точки, вместо дуги s угол θ. Если это равенство мы продифференцируем по времени, то получим известное соотношение между линейной и угловой скоростями

$$\dot{s} = l\dot{\theta}. \tag{19}$$

Теперь, для того чтобы написать дифференциальное уравнение движения маятника, заметим, что $\theta + \frac{\pi}{2}$ есть угол, который образует с вертикалью, направленной вниз, касательная к окружности (ориентируемая в направлении возрастания s или θ). Тангенциальная составляющая веса P, если принять массу равной единице, будет равна

$$g \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -g \sin\theta.$$

Поэтому, принимая во внимание соотношение (18), мы получим дифференциальное уравнение движения маятника в виде

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta. \tag{20}$$

Это уравнение, как увидим далее, замечательно во многих отношениях; оно нам уже встречалось в указаниях, данных в т. I по поводу задачи о плоской пружине (гл. XIV, п. 74).

Здесь прежде всего следует обратить внимание на то, что уравнение (20) в силу того способа, каким оно было выведено (вспомним выражение для касательной составляющей действующей силы), действительно лишь при том условии, что на движущуюся точку наложена связь, допускающая движение только *по окружности* (двусторонняя связь). Это условие выполняется непременно, если связь, удерживающая точку P, осуществляется посредством твердого невесомого стержня (двусторонняя связь). Чтобы по возможности облегчить исследование, по крайней мере на первое время, мы разберем задачу сперва в предположении двусторонней связи.

Далее (п. 39) мы рассмотрим, учитывая реакцию связи, верны ли, и в какой мере, те заключения, к которым мы пришли, также и для маятника, подвешенного на нити (односторонняя связь).

35. Из общей теории, изложенной в пп. 12, 15, мы уже знаем, что уравнение (20) интегрируется двумя квадратурами. Первый интеграл мы получим, умножая обе части равенства (20) на $2\dot{\theta}$ и интегрируя. Этот интеграл представляет собой интеграл живых сил

$$T - U = E,$$

где U обозначает потенциал силы тяжести, отнесенный к единице массы, и определяется равенством

$$U = gy = gl\cos\theta,$$

а живая сила точки P в силу формулы (19) выразится в виде

$$T = \frac{1}{2} l^2 \dot{\theta}^2.$$

Следовательно, интеграл живых сил будет

$$\frac{1}{2} l^2 \dot{\theta}^2 - gl \cos\theta = E, \qquad (21)$$

или

$$\dot{\theta}^2 = 2\frac{g}{l}(\cos\theta + e),$$

где постоянная $e = \frac{E}{gl}$ определяется по начальным условиям, т. е. путем подстановки в уравнение (21) вместо θ и $\dot{\theta}$ тех значений, которые они имеют в начальный момент.

Рассматривая равенство (21), мы видим, что к исследованию определяемого им движения можно применить общие выводы предыдущего параграфа для уравнений типа (8′) с той лишь разницей, что качественные результаты, полученные там для дуги s, здесь будут относиться к углу θ.

Заметим, что условие действительности $\dot{\theta}$ влечет за собой неравенство $e \geqslant -1$.

Рассмотрим здесь последовательно два предположения: $e > 1$ и $-1 \leqslant e \leqslant 1$.

36. Вращательное движение. При $e > 1$ картина движения исследуется легко.

Функция

$$2\frac{g}{l}(\cos\theta + e),$$

представляющая собой функцию $\Phi(s)$ общего случая, при всяком значении θ остается отличной от нуля и всегда не меньшей, чем $2\frac{g}{l}(e-1)$; поэтому при всяком возможном выборе начального значения угла θ, подчиненном условию $e > 1$, функция $\theta(t)$ при бесконечном возрастании t монотонно стремится к бесконечности в произвольно выбираемом направлении, совпадающем с направлением начальной скорости. Угловая скорость будет всегда превосходить положительное значение корня

$$\sqrt{2\frac{g}{l}(e-1)}$$

или, в крайнем случае, равняться ему. В конечном счете мы будем иметь вращательное движение, совершающееся постоянно в одном и том же направлении.

Движущаяся точка неограниченное число раз проходит через каждую точку окружности (в частности, через свое начальное положение) и, как это вытекает из уравнения (21) и из периодичности функции $\cos\theta$, при каждом таком прохождении она всякий раз имеет в этой точке одну и ту же угловую, а следовательно, и линейную скорость. Теперь легко показать, что здесь мы имеем дело с *периодическим движением*. Действительно, заметим прежде всего, что если θ_0 является начальным значением отклонения движущейся точки и если для определенности предположим, что движение в начальный момент было прямым, то отклонение $\theta(t)$ точки в любом ее положении будет определено в функции от времени (отсчитываемого от момента начала движения) тем интегралом дифференциального уравнения

$$\dot{\theta}=\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta+e)}, \tag{22}$$

который однозначно определяется начальным условием

$$\theta(0)=\theta_0. \tag{23}$$

Если обозначим через T промежуток времени, по истечении которого точка, выйдя из начального положения, вновь в него возвратится, то для того же интеграла уравнения (22) будем иметь

$$\theta(T)=\theta_0+2\pi. \tag{24}$$

Функция $\theta(t+T)$, так же как и $\theta(t)$, удовлетворяет дифференциальному уравнению (22), как в этом легко убедиться, замечая, что это дифференциальное уравнение преобразуется само в себя при замене переменного t на $t+T$; этому же уравнению (22) вследствие периодичности косинуса удовлетворяет также функция $\Theta(t)$, определяемая равенством

$$\Theta(t)=\theta(t+T)-2\pi. \tag{25}$$

Но для этого частного интеграла уравнения (22) имеем

$$\Theta(0)=\theta(T)-2\pi,$$

или, принимая во внимание (24),

$$\Theta(0)=\theta_0.$$

Поэтому функция $\Theta(t)$, удовлетворяющая тому же начальному условию, что и $\theta(t)$, вследствие теоремы единственности интеграла совпадает с $\theta(t)$. На основании определения (25) функции $\Theta(t)$ получаем тождество

$$\theta(t+T)=\theta(t)+2\pi, \tag{26}$$

которое, в силу того, что два отличающихся на 2π угла определяют одну и ту же точку окружности, как раз и выражает то, что наше движение является периодическим с периодом T.

Аналогичное доказательство, естественно, остается в силе и в случае обратного движения; достаточно только заменить 2π на -2π в равенствах (24) и (25), а следовательно, и в тождестве (26).

37. Колебания (и, как частные случаи, состояния равновесия). Изученный выше тип прямого вращательного движения, очевидно, не выражает характерных особенностей обычных колебаний маятника.

Эти колебания определяются, как мы скоро покажем, только теми интегралами уравнения движения, для которых постоянная e больше -1 и меньше $+1$.

Но сначала рассмотрим оба исключенных случая: $e=-1$ и $e=+1$. На основании известных тригонометрических тождеств имеем

$$\cos\theta-1=-2\sin^2\frac{\theta}{2},\quad \cos\theta+1=2\sin^2\frac{\theta-\pi}{2};$$

отсюда видно, что функция в правой части равенства (21) для $e=-1$ или $e=+1$ имеет двойной нуль $\theta=0$ или соответственно $\theta=\pi$; кроме того, в каждом из двух случаев это будет единственным нулем нашей функции (по крайней мере, с точностью до произвольного числа, кратного 2π, не существенного для определения угла). Отсюда на основании п. 29 заключаем, что материальная точка P, предоставленная самой себе без начальной скорости ($\dot\theta_0=0$), в самом ли нижнем положении $M\,(\theta_0=0)$ или в положении прямо противоположном $A\,(\theta_0=\pi)$, остается там сколь угодно долго.

Для полноты мы должны исследовать, возможны ли, кроме этих двух состояний равновесия, также и движения, для которых постоянная e имела бы значение ±1 и которые мы намерены исключить. На основании уравнения (21) мы тотчас же видим, что значение $e=-1$ совместимо только с равновесием (устойчивым) в самом нижнем положении M, так как из того, что правая часть не может сделаться отрицательной ($\dot\theta^2$ не может быть меньше нуля), необходимо следует, что функция θ все время должна быть равна нулю. Наоборот, при $e=1$, каково бы ни было начальное значение θ_0 переменной θ (отличное от 0 и π), равенство (21) допускает решение, соответствующее действительному движению, поскольку начальная скорость на основании того же равенства (21) будет отличной от нуля. Правая часть равенства (21) при $e=1$ имеет *двойной* нуль $\theta=\pi$ в самом высшем положении A точки на окружности c (точка, прямо противоположная M). Движение точки в этом случае в согласии с общими выводами п. 27, начинаясь в положении P_0, происходит постоянно в одном и том же направлении, определяемом начальной скоростью; при неограниченном возрастании времени движущаяся точка асимптотически приближается к точке A.

Отбрасывая теперь оба предположения $e=\pm1$, перейдем к рассмотрению тех интегралов движения, для которых имеем $-1<e<1$.

С этой целью обратимся к условиям, наиболее типичным для начала движения маятника; предположим, что материальная точка P выведена из состояния равновесия M и в некотором положении P_0, отличном от M, и от положения, прямо противоположного M, предоставлена самой себе без начальной скорости. Обозначим через θ_0 отклонение точки P_0, заключенное между $-\pi$ и π, исключая значения $\theta_0 = \pm\pi$ и значение, равное нулю.

Подставляя в уравнение (21) начальные значения

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = 0,$$

получим для постоянной e значение

$$e = -\cos\theta_0, \tag{27}$$

явно заключенное между -1 и $+1$. Обратно, всякий раз, когда в уравнении (21) постоянная e удовлетворяет условию $-1 < e < 1$, достаточно взять

$$\theta_0 = \arccos(-e),$$

чтобы иметь угол отклонения для того положения, исходя из которого точка P, предоставленная самой себе с начальной скоростью, равной нулю, совершает движение, определяемое уравнением (21).

Поэтому мы будем брать уравнение (21) в форме

$$\dot{\theta}^2 = 2\frac{g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0); \tag{21'}$$

на основании известного тригонометрического тождества это уравнение можно написать также в виде

$$\dot{\theta}^2 = 4\frac{g}{l}\sin\frac{\theta_0-\theta}{2}\sin\frac{\theta_0+\theta}{2}.$$

Отсюда следует, что функция в правой части имеет два бесконечных ряда корней: $\theta_0 + 2k\pi$ и $-\theta_0 + 2k\pi$, где k есть какое-нибудь целое число (положительное, отрицательное или равное нулю). Так как все члены каждого из этих двух рядов определяют на окружности одно и то же положение, то достаточно рассмотреть только один член каждого из этих рядов, т. е. достаточно взять, например, два корня: θ_0 и $-\theta_0$. Так как производная от синуса, т. е. косинус, при обращении синуса в нуль отлична от нуля, то каждый из двух корней θ_0 и $-\theta_0$ является простым для правой части равенства (21'), за исключением тех случаев, когда эти корни совпадают или же отличаются друг от друга на кратное 2π. Но второй случай не может иметь места, так как предполагается, что $|\theta_0| < \pi$, первый же сам собой исключается, так как это означало бы, вопреки предположению, что $\theta_0 = 0$.

Поэтому на основании п. 30 можно прямо заключить, что маятник периодически колеблется между положениями P_0 и P_0', углы отклонения которых равны соответственно θ_0 и $-\theta_0$. Каждое полное колебание (от P_0 до P'_0 и обратно) можно разбить на два простых колебания равной продолжительности. Простые колебания совершаются таким образом, что маятник при простом колебании от P_0 до P'_0 и при следующем простом колебании от P'_0 до P_0 проходит через одно и то же положение P в два мгновения, одно из которых предшествует, а другое следует за тем мгновением, когда маятник достигает крайнего положения P'_0, по истечении одного и того же промежутка времени.

Но здесь мы уже можем сказать несколько больше. Прежде всего всякое простое колебание, например от P_0 до P'_0, в свою очередь можно разбить на два полуколебания равной продолжительности: одно от P_0 до самой нижней точки M, другое от M до P'_0. Действительно, предположим, что $\theta_0 > 0$ (т. е. заключено между 0 и π); это значит, что простое колебание является обратным и поэтому описывается уравнением

$$\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}. \tag{22'}$$

Продолжительности двух полуколебаний от P_0 до M и от M до P'_0 будут даны двумя определенными интегралами

$$\left.\begin{aligned} -\sqrt{\frac{l}{2g}}\int\limits_{\theta_0}^{0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}} &= \sqrt{\frac{l}{2g}}\int\limits_{0}^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}},\\ -\sqrt{\frac{l}{2g}}\int\limits_{0}^{-\theta_0}&\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

которые, очевидно, будут тождественными, если во втором из них заменить θ на $-\theta$. Далее, маятник будет отклоняться на равные по абсолютной величине (но противоположные по знаку) углы, или, другими словами, будет занимать два положения, симметричные относительно вертикали, проходящей через наиболее низкую точку M, по истечении одинаковых промежутков времени после прохождения через M. Действительно, будем отсчитывать время от начала любого простого колебания. Пусть прохождение маятника через M произойдет в момент времени τ_1; тогда, давая общее значение обоим интегралам (28), положим $t = \tau_1 + t^*$, т. е. обозначим через t^* время, отсчитываемое от момента прохождения через M. После этого все сведется к доказательству тождества

$$\theta(\tau_1 + t^*) = -\theta(\tau_1 - t^*). \tag{29}$$

Для доказательства достаточно заметить, что уравнение второго порядка (20) останется неизменным как при замене θ на $-\theta$, так и при замене t на $\pm t + \mathrm{const}$; так что, если одна из двух частей равенства (29) будет интегралом уравнения (20), то и другая часть будет также его интегралом. А так как при $t^*=0$ обе эти части совпадают вместе с их производными, то на основании теоремы о единственности интеграла мы заключаем, что они тождественны. В самом деле, обе части равенства (29) обращаются в нуль при $t^*=0$; дифференцируя обе части равенства и полагая затем $t^*=0$, мы найдем, что и производные тождественны.

38. Вычисление периода. Период T колебаний маятника равен двойной продолжительности τ простого колебания, которое в свою очередь на основании сказанного выше равно двойной продолжительности τ_1 полуколебания. Поэтому имеем

$$\frac{T}{2}=\tau=\sqrt{\frac{2l}{g}}\int\limits_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}.$$

Прежде всего покажем, как этот интеграл приводится к *эллиптическому*.

Для доказательства сделаем замену переменного, определяемую равенством

$$\sin\frac{\theta}{2}=u\sin\frac{\theta_0}{2},$$

где u — новая переменная, и примем во внимание следующее соотношение

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=\sin\frac{\theta_0}{2}\,du$$

и тождества

$$\cos\theta-\cos\theta_0=2\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{1-u^2\sin^2\frac{\theta_0}{2}},$$

где корень берется в арифметическом смысле.

Заметим, что при изменении θ от 0 до θ_0 переменная u изменяется, всегда возрастая, от 0 до 1. Для продолжительности τ одного простого колебания мы получим выражение в виде эллиптического интеграла (первого рода)

$$\tau=2\sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},\tag{30}$$

где для простоты записи положено $\sin\frac{\theta_0}{2}=k$.

Такой интеграл нельзя вычислить посредством элементарных трансцендентных функций. Он выражается только в виде ряда. Чтобы получить быстро сходящийся, а поэтому и удобный для вычисления ряд, можно поступить следующим образом.

Так как во всем промежутке интеграции имеем $k^2u^2 < 1$, то функцию

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2u^2}} = (1-k^2u^2)^{-\frac{1}{2}}$$

можно разложить в сходящийся ряд по формуле бинома, в силу чего получим

$$(1-k^2u^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2u^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4u^4 + \ldots + \\ + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}k^{2n}u^{2n} + \ldots,$$

или, в более сжатой форме,

$$(1-k^2u^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n k^{2n}u^{2n},$$

где положено

$$c_0 = 1, \quad c_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n} \qquad (n>0). \tag{31}$$

Подставим это в выражение (30) для τ и проинтегрируем полученный ряд почленно (это возможно, так как ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n k^{2n}u^{2n}$, как это вытекает из сравнения с рядом с постоянными членами $\sum_{n=0}^{\infty} c_n k^{2n}$, является равномерно сходящимся во всем промежутке интеграции). Это дает выражение для τ:

$$\tau = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n k^{2n} \int_0^1 \frac{u^{2n}du}{\sqrt{1-u^2}},$$

которое, если принять во внимание известное соотношение

$$\int_0^1 \frac{u^{2n}du}{\sqrt{1-u^2}} = c_n \frac{\pi}{2},$$

упрощается и принимает вид

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 k^{2n}.$$

Если напишем его в развернутом виде и вместо k подставим его значение $\sin\frac{\theta_0}{2}$, то получим искомое разложение

$$\tau=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\theta_0}{2}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\frac{\theta_0}{2}+\ldots+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\right)^2\sin^{2n}\frac{\theta_0}{2}+\ldots\right\}. \tag{32}$$

Если начальный угол отклонения θ_0 является малым, то с известным приближением можно ограничиться только двумя первыми членами, что дает

$$\tau=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta_0}{2}\right). \tag{32'}$$

Если можно пренебречь и членами второго порядка, то получим хорошо известную элементарную формулу

$$\tau=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{32''}$$

39. Реакция связи. Так как активная сила сводится к весу, то реакция выразится формулой (п. 7).

$$R_n=\frac{v^2}{r}-g\cos\alpha,$$

где величина R_n может быть истолкована также как составляющая по внешней нормали (в нашем случае радиальная) центробежной силы, действующей на стержень маятника (гл. I, § 3, п. 6), а величины r и α соответственно будут радиусом кривизны и углом наклона нормали, направленной в сторону вогнутости, к вертикали, направленной вниз. Ясно, что для маятника имеем $r=l$, $\cos\alpha=-\cos\theta$, так что сила, действующая на стержень, выразится в виде

$$\frac{v^2}{l}+g\cos\theta.$$

Эту силу можно представить в зависимости только от угла θ, если обратиться к интегралу живых сил, который мы возьмем в его общей форме (21).

Действительно, так как в силу (19) $\frac{v^2}{l}=l\dot{\theta}^2$, то, принимая во внимание (21), получим

$$R_n=3g\left(\cos\theta+\frac{2}{3}e\right). \tag{33}$$

Если, как предполагалось до сих пор, связь осуществляется посредством твердого стержня и поэтому является двусторонней, то характер движения, изученного нами для различных возможных случаев, не будет нарушаться тем, что R_n исчезает или переходит от положительных значений к отрицательным. Пока $R_n > 0$, стержень противодействует растягиванию, и, наоборот, он противодействует сжатию, если $R_n < 0$.

Так, например, на основании формулы (33) легко проверить, как это, впрочем, и непосредственно ясно, что в обоих рассмотренных в п. 36 случаях равновесия мы будем иметь растяжение или сжатие, смотря по тому, будет ли масса маятника занимать самое низкое положение M или положение прямо противоположное.

Но если связь осуществляется посредством нити (односторонняя связь), то необходимо учитывать и знак у R_n, так как движение маятника в различных возможных случаях будет происходить так, как указано в предыдущих пунктах, только при условии, что связь проявляет свое действие, т. е. если постоянно $R_n > 0$.

Чтобы лучше уяснить дело, посмотрим, для каких значений постоянной e (которая, как мы знаем, всегда $\geqslant -1$) выражение для R_n (33) может стать отрицательным. Из того же равенства (33) следует, что R_n будет положительным, если $e > \frac{3}{2}$; с другой стороны, достаточно написать выражение (33) в виде

$$R_n = 3g(\cos\theta + e) - eg$$

и заметить, что на основании уравнения (21) $(\cos\theta + e)$ всегда больше нуля, чтобы убедиться, что R_n обязательно будет положительным всякий раз, когда $e < 0$.

Следовательно, случаи, когда выражение для R_n может стать отрицательным, вследствие чего движение маятника, подвешенного на нити, будет требовать дальнейшего исследования, соответствуют значениям e, заключенным в двух промежутках: от 0 до 1 и от 1 до $^3/_2$. Если бы связь была двусторонней, то речь шла бы соответственно о колебательном движении, в котором, как это следует из равенства (27), маятник опускается без начальной скорости из самого высокого положения над центром подвеса O, или же о достаточно медленном вращательном движении (точнее, о таком движении, у которого минимальная угловая скорость (п. 36) не превышает $\sqrt{\frac{g}{l}}$; при $e = 1$ мы имели бы асимптотическое движение к наивысшей точке круговой траектории C.

Предположим, что подвес осуществлен посредством нити, и рассмотрим сначала колебательное движение. Случай $e = 0$ соответствует колебательному движению, которое можно осуществить, если отпустить маятник с натянутой нитью и без начальной скорости из какого-либо из двух положений, находящихся на одинаковой высоте с центром подвеса. В этом случае можно только сказать, что R_n остается положительной в течение всего колебания и исчезает в крайних его точках. Фиксируем теперь значение e, заключенное между 0 и 1 (исключая крайние значения), и попытаемся определить соответствующее колебательное движение. Для этого приведем маятник в движение из самого низкого положения M ($\theta = 0$) в том или другом направлении с такой угловой скоростью, которая необходима в силу уравнения (21) для рассматриваемого движения. Сначала все будет происходить так, как если бы подвес был осуществлен посредством твердого стержня. Но реакция R_n, которая на основании соотношения (33) положительна в начале (т. е. для значений θ, достаточно близких к 0), при возрастании абсолютного значения θ будет уменьшаться и в некотором положении исчезнет. Это положение в силу равенства (33), конечно, выше точки подвеса $O\left(\theta > \frac{\pi}{2}\right.$ или $\left.\theta < -\frac{\pi}{2}\right)$ и во всяком случае, как это следует из сравнения формулы (33) с уравнением (21), предшествует тому, в котором $\dot{\theta}$ обращается в нуль и которое, в случае двусторонней связи, представляло бы крайнюю точку колебания.

Аналогичные обстоятельства представятся при $1 \leqslant e \leqslant {}^3/_2$, т. е. в случаях вращательного движения и асимптотического движения к наивысшей точке окружности c.

Следовательно, при том и другом предположении найдется такое мгновение t_1, когда R_n исчезает и притом так, что если бы связь была осуществлена в виде стержня, то R_n сделалась бы затем отрицательной, и движение продолжалось бы и после этого мгновения и представило бы один из случаев, рассмотренных в предыдущих пунктах. Легко видеть, что произойдет в наших условиях. В положении P_1, соответствующем моменту t_1 (и, конечно, находящемся выше точки O), масса маятника покинет окружность c, и движение (по крайней мере на некоторое время, т. е. до тех пор, пока не будет натянута нить) будет происходить свободно под действием силы тяжести, как если бы нити не было.

Естественно, что обе фазы движения в точке P_1 полностью совпадают не только в отношении скорости, но также и в отношении ускорения. Это происходит потому, что (в движении по окружности) в момент t_1 реакция $R_n = 0$, маятнику не противодействует уже никакая реакция связи, и равнодействующая всех сил в этот момент сводится только к весу, как и в последующем затем свободном движении.

Совпадение скоростей влечет за собой совпадение касательных к обеим дугам траекторий в точке P_1 (к окружности и к параболе). Далее, из совпадения ускорений следует, что радиус кривизны параболы в точке P_1 равен радиусу l окружности c. Достаточно заметить, что при совпадении нормалей и равенстве нормальных ускорений v^2/r радиусы кривизны траекторий должны быть одинаковыми, если скорости равны.

40. Случай малых колебаний. Если предположить, что отклонения θ маятника от вертикали малы, таковы, например, что можно пренебречь величиной θ^2 по сравнению с единицей, то вместо синуса можно взять дугу (как в этом можно убедиться, если функцию $\sin\theta$ разложить в ряд Маклорена).

Если ограничиться этим порядком приближения, то дифференциальное уравнение (20) можно заменить линейным уравнением

$$\ddot{\theta}=-\frac{g}{l}\theta.$$

В правой части этого уравнения мы видим типичное выражение (п. 18) для упругой восстанавливающей силы; таким образом, мы пришли к гармоническому колебательному движению точки по окружности c.

Постоянная ω^2, которая характерна для уравнения гармонических колебаний, заменяется здесь отношением g/l. Период колебания $T=2\pi/\omega$ в этом случае равен $2\pi\sqrt{l/g}$. Полупериод (продолжительность одного простого колебания) определяется из равенства

$$\tau=\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

как мы уже нашли (п. 38) из точного выражения для τ в предположении (по существу равносильном настоящему), что можно пренебречь величиной $\sin^2\frac{\theta_0}{2}$ по сравнению с единицей.

41. Влияние вязкого сопротивления. Для того чтобы учесть пассивное сопротивление, пропорциональное скорости вида $-b\dot{s}$ (п. 21), очевидно, достаточно прибавить к правой части уравнения (20) член, пропорциональный $\dot{\theta}$, с отрицательным коэффициентом пропорциональности. Обозначая этот коэффициент через $-2h$, получим

$$\ddot{\theta}=-\frac{g}{l}\sin\theta-2h\dot{\theta}.$$

Если ограничиться, как выше, колебаниями с малой амплитудой, то уравнение упростится, и мы получим

$$\ddot{\theta}=-\frac{g}{l}\theta-2h\dot{\theta}.$$

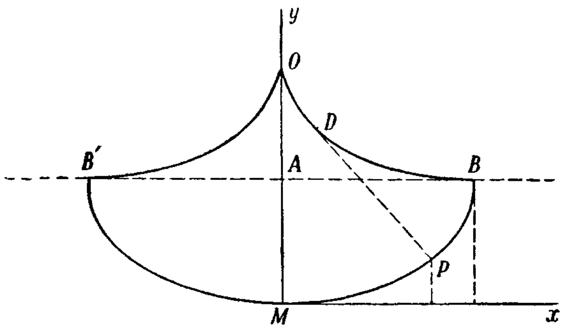
Оно снова приводится к уравнению вида $\ddot{x}+2h\dot{x}+kx=0$ (где h и k — положительные постоянные), изученному в пп. 41—43, гл. II, т. I. При $k>h^2$ будем иметь затухающие колебания.

В случае маятника, если речь идет о вязком сопротивлении воздуха, порядок величин $k=\sqrt{g/l}$ и h таков, что выполняется неравенство $k>h^2$. Для этого достаточно, введя линейную скорость $l\dot{\theta}$, представить коэффициент вязкого сопротивления b в виде $2h/l$ и приравнять (п. 21) $6\pi\mu r$, где r — радиус сферы, внутри которой заключена масса маятника, а $\mu=0{,}000189$. Если для примера принять $l=1$ *м* $=100$ *см*, $r=1$ *см*, то мы немедленно получим, что $k=9{,}8$ будет больше h^2, так как

$$h^2=\left(6\pi r \frac{l}{2} 0{,}000189\right)^2=(0{,}178)^2.$$

Итак, сопротивление (вязкое) воздуха отразится на движении в том, что малые колебания маятника будут затухать по показательному закону, рассмотренному в кинематике.

42. Изохронизм (таутохронность) циклоидального движения. Из соображений, развитых в п. 38 о продолжительности колебаний математического маятника, вытекает один вопрос, который в силу исторического интереса заслуживает особого внимания.



Фиг. 7.

Мы видели, что продолжительность колебания τ маятника (кругового), вообще говоря, зависит от начального угла наклона θ_0 (см. формулы (32) или (32′)); только для малых значений θ_0 она оказывается приблизительно постоянной (и равной $\pi\sqrt{l/g}$). То же относится и к времени падения (из начального положения до самой низкой точки M), которое равно $\tau/2$.

Еще Гюйгенс поставил вопрос о замене, если это возможно, окружности другой кривой, тоже расположенной в вертикальной плоскости и строго *изохронной*, т. е. такой, чтобы время падения тяжелой точки, вынужденной двигаться по кривой без трения, действительно стало независимым от начального положения. Он нашел, что этим свойством обладает циклоида (с горизонтальным основанием и с вогнутостью, обращенной вверх).

Вывод Гюйгенса можно получить из рассмотрения уравнения движения, которое мы легко найдем, вспоминая одно свойство циклоиды, уже рассмотренное нами в первом томе.

Пусть $B'B$ (фиг. 7) есть основание циклоиды, A — середина основания, a — радиус образующего круга, M — самая нижняя точка циклоиды, находящаяся на вертикали, проходящей через точку A, на расстоянии $2a$ от A. Начало координат возьмем в точке M и ось My направим по вертикали вверх; тогда ось Mx будет горизонтальной и касательной к циклоиде. Если условимся отсчитывать дуги s от самой низкой точки, считая их положительными в одном направлении (например, в направлении к B) и отрицательными в противоположном, то между s и y для любой точки P будет существовать соотношение (т. I, гл. V, п. 43)

$$s^2 = 8ay,$$

которое как раз и позволяет обнаружить интересующее нас свойство. Действительно, отсюда следует

$$\frac{dy}{ds} = \frac{s}{4a};$$

так как $\frac{dy}{ds}$ есть косинус угла, который образует вертикаль, направленная вверх (т. е. ось My), с касательной в точке P (направленной в сторону возрастания s), то для тангенциальной составляющей F_t веса (материальной точки с массой, равной 1) в положении P мы находим выражение

$$F_t = -\frac{g}{4a}s;$$

поэтому уравнение движения принимает вид

$$\ddot{s} = -\frac{g}{4a}s. \tag{34}$$

Напомним еще раз, что это уравнение является характерным для того гармонического колебательного движения, частота которого определяется равенством

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Период такого движения, как мы знаем, не зависит от начальных условий и равен

$$\frac{2\pi}{\omega} = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Полупериод $2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ представляет собой продолжительность любого простого колебания, а половина его $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ выражает время, необходимое для того, чтобы маятник достиг наиболее низкой точки $M(s=0)$, исходя из некоторого крайнего положения (которое может быть любой точкой циклоиды).

Таким образом изохронизм циклоиды доказан как в отношении времени падения, так (если рассматривать движение в целом) и в отношении колебаний маятника в ту и другую сторону от M.

43. Для физического осуществления связи Гюйгенс придумал простой прибор, называемый *циклоидальным маятником*. Устройство его опирается на другое геометрическое свойство циклоиды:

Эволютой всякой циклоиды служит равная ей циклоида, основание которой смещено на $2a$ (в сторону вогнутости) и сдвинуто по фазе на полупериод, т. е. точки заострения ее соответствуют вершинам M, а вершины совпадают с точками заострения B', B, ... (см. фиг. 7).

Обозначим через O точку заострения интересующей нас ветви, расположенную над точкой M, и представим себе две дуги эволюты (OB' и OB), реализованные посредством выпуклых профилей.

Далее, если в точке O укрепить нить длиной $4a$, несущую на конце груз P, то этот груз при качании будет вынужден описывать циклоиду $B'MB$. Достаточно заметить, что когда маятник будет удаляться от вертикали, нить вынуждена будет огибать дугу эволюты OD, сходя с нее затем по касательной, так что сумма дуги $\widehat{OD}$ и отрезка касательной DP будет постоянной и равной $4a$. В силу характеристического свойства эволюты геометрическим местом точек P будет циклоида эвольвента.

Заметим, что этот вид маятника не представляет практического интереса, потому что трение, встречаемое нитью на выпуклом профиле циклоиды, имеет заметное влияние и его нельзя устранить, как это было бы необходимо, чтобы движение действительно совершалось по закону, вытекающему из уравнения (34).

44. Отметим еще без доказательства, что циклоида не только изохронна; она является еще и брахистохроной относительно силы тяжести.

Это значит, что если заданы две какие угодно точки A и B с различными высотами (пусть, например, B выше A), то из всех дуг различных кривых, соединяющих эти точки, дуга циклоиды обладает тем свойством, что тяжелая точка, выходящая из B без начальной скорости и вынужденная оставаться на кривой, проходит эту дугу в кратчайшее время. Эта циклоида имеет горизонтальное основание, точку заострения в B и проходит через A. В частном случае, если B и A расположены на одной и той же вертикали, дуга циклоиды вырождается в отрезок AB.

§ 8. Трение во время движения. Шероховатая наклонная плоскость

45. Обратимся теперь к вопросу о том, как ведет себя реакция связи в условиях движения.

В статике (гл. IX, т. I) мы видели, что когда материальная точка, опирающаяся на какую-нибудь поверхность или кривую, находится в равновесии, трение (касательная реакция, развиваемая опорой) по абсолютной величине не превосходит некоторой части f нормальной реакции. Направление, в котором действует эта касательная сила, зависит от активной силы; более точно, так как трение уравновешивает касательную составляющую активной силы, то мы можем сказать, что направление статического трения противоположно направлению проекции силы.

Если при шероховатой опоре происходит какое-либо движение под действием активной силы $\boldsymbol{F}$, приложенной к движущейся точке, то опора также будет действовать на точку с некоторой силой $\boldsymbol{R}$ — реакцией опоры.

Чтобы определить, какому закону подчиняется действие этой реакции, необходимо обратиться к опыту. Интуиция прежде всего подсказывает, что, как и в статическом случае, опора способна действовать только во внешнюю сторону по отношению к реализующему ее телу.

Обозначим теперь через N абсолютную величину нормальной составляющей реакции опоры $\boldsymbol{R}$ и через $\boldsymbol{A}$ — ее касательную составляющую.

Эта последняя называется *трением* с присоединением определения *динамическое* или *во время движения*, если желательно отметить, что скорость движущейся точки отлична от нуля.

Опыты, производившиеся почти одновременно Кулоном и Мореном, привели последнего (около 1830 г.) к формулировке следующих законов:

1°. Направление динамического трения прямо противоположно направлению движения или, что все равно, скорости. Если случится, что скорость во время движения исчезнет, то остаются в силе законы статического трения. Следовательно, движение оканчивается или начинается снова, в зависимости от того, удовлетворяет или не удовлетворяет активная сила $\boldsymbol{F}$ условиям равновесия. Если опорой является поверхность, то можно также сказать, что движение оканчивается или начинается снова в зависимости от того, будет ли линия действия силы $\boldsymbol{F}$ проходить внутри или вне конуса трения, относящегося к положению равновесия.

То же выражение можно употребить, если опорой служит кривая (заменив лишь слово „*внутри*“ словом „*вне*“) (см. гл. IX, т. I).

2°. Величина динамической силы трения A прямо пропорциональна величине нормальной реакции N. Коэффициент пропорциональности есть правильная дробь, не зависящая ни от скорости движущейся точки, ни от размеров соприкасающихся поверхностей, и зависит только от их материальной природы.

Этот коэффициент пропорциональности называется *коэффициентом трения* (*динамического* или *трения при движении*) и обозначается также буквой f, введенной уже для обозначения статического трения. Такое обозначение введено не без оснований, так как, по крайней мере в очень грубом приближении, оба коэффициента трения, статический и динамический, совпадают.

В этом порядке приближения поведение реакции $\boldsymbol{R}$ можно представить в следующей отчетливой форме.

Реакция, развиваемая шероховатой опорой (которая в статическом случае ограничивается лишь тем, что она не должна выходить из конуса трения) *в динамических условиях, будет находиться именно на конической поверхности* и на той образующей, которая проектируется (ортогонально) на касательную к траектории в направлении, обратном движению.

Из всего этого интуитивным путем можно сделать вывод, что трение во всяком случае (как в условиях равновесия, так и в условиях движения) можно рассматривать как пассивное сопротивление, способное достигать известного максимума (определенной дроби от N). Оно проявляется в том, что препятствует началу движения при значениях (не превышающих максимума), уравновешивающих активную силу, и достигает максимума (в направлении прямо противоположном движению), когда скорость отлична от нуля.

В действительности явление не вполне соответствует этой схеме. Коэффициент динамического трения всегда несколько (а иногда даже значительно) меньше коэффициента статического трения. Кроме того, он остается приблизительно постоянным до тех пор, пока речь идет о малых скоростях (не превышающих 4 или 5 *м/сек*) и не слишком больших давлениях, затем медленно уменьшается при возрастании скорости и при увеличении давления.

В частности, это подтверждается на примере железнодорожных тормозов (чугунные колодки против стальных ободов), где поэтому можно думать, что речь идет не о сухом соприкосновении: в этом случае играет роль воздух, действующий почти как смазка[1]). Здесь невозможно углублять этот важный вопрос, заметим только, что когда между поверхностями движущегося тела и опоры помещается смазка,

---

[1]) Новейшие опыты, производимые в лабораториях очень тонкими методами, позволяют установить непредвиденный факт, что большая отполированность соприкасающихся поверхностей глубоко изменяет законы трения. По этому вопросу, а также о случае, технически более важном, когда употребляется смазка, см.: A. Sommerfeld, Zur Theorie der Schmiermittelreibung, *Zeitschrift für technische Physik*, 1921, стр. 59—93. [(См. также „Гидродинамическая теория смазки“, сборник статей из серии „Классики естествознания“, 1934. (*Прим. ред.*)]

коэффициент трения существенным образом (и пока еще не вполне выясненным) зависит от скорости v, от нормального давления N и от коэффициента вязкости μ смазки; можно принять, что коэффициент трения зависит только от произведения $(\mu v N^{-1})$.

46. Принцип независимости действия связей от способа, каким они осуществляются, уже использованный в статике (т. I, гл. IX, п. 12), с успехом может быть введен и в динамику. Так, например, при трении во время движения предполагается, что всякий раз, когда материальная точка подходящими приспособлениями удерживается на определенной кривой или поверхности, она будет вести себя так, как если бы она опиралась на материальную поверхность.

Следствия из этого предположения находятся в достаточном согласии с наблюдаемыми фактами.

47. На основании предыдущих общих рассуждений мы можем тотчас же составить уравнение, согласно которому совершается движение точки по заданной траектории, если известна активная сила $\boldsymbol{F}$ и коэффициент трения f.

Для этого, очевидно, достаточно спроектировать на направление касательной $\boldsymbol{t}$ уравнение (1′)

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R}$$

и принять во внимание (п. 45), что $R_t = \pm A = \pm fN$, где знак выбирается в согласии с тем, что сила будет всегда сопротивлением; поэтому необходимо взять знак минус, когда (относительно направления $\boldsymbol{t}$) движение является прямым, т. е. когда $\dot{s} > 0$, и знак плюс, когда $\dot{s} < 0$.

Из этого замечания о двойном знаке следует:

$$\begin{aligned} &(а) \qquad m\ddot{s} = F_t - fN \text{ при } \dot{s} > 0, \\ &(б) \qquad m\ddot{s} = F_t + fN \text{ при } \dot{s} < 0. \end{aligned} \tag{35}$$

Остается выразить N (абсолютное значение нормальной реакции), для чего необходимо еще раз вернуться к основному уравнению (1′), спроектировав его на два другие главные направления (главную нормаль $\boldsymbol{n}$ и бинормаль $\boldsymbol{b}$). Что касается проекции на главную нормаль, то на основании формулы (3) имеем

$$R_n = m\frac{v^2}{r} - F_n;$$

так как для бинормали соответствующая составляющая ускорения $\boldsymbol{a}$ равна нулю, то

$$R_b = -F_b.$$

Если теперь заметим, что нормальная реакция в силу своего определения представляет собой проекцию полной реакции $\boldsymbol{R}$ на нормальную плоскость, т. е. вектор в этой плоскости с составляющими R_n и R_b, то, очевидно, получим

$$N=\sqrt{R_n^2+R_b^2}=\sqrt{\left\{m\frac{v^2}{r}-F_n\right\}^2+F_b^2},$$

где радикал берется по абсолютной величине.

Это и будет искомым выражением N, которое справедливо в самом общем случае. Как мы видим, оно зависит от нормальных составляющих *активной* силы F_n и F_b, от скорости v движущейся точки (или от $\dot{s}$) и от радиуса кривизны r траектории в любом положении (или же от s).

Наконец, если, как мы предполагаем, закон действия силы известен и F_n и F_b являются известными функциями от s, $\dot{s}$, t, то то же можно будет сказать и об N.

Мы ограничимся случаем, когда активная сила $\boldsymbol{F}$ лежит в соприкасающейся плоскости. Тогда $F_b=0$, и выражение для N упрощается

$$N=\left|m\frac{v^2}{r}-F_n\right|.$$

Таким образом для реакции трения имеем

$$R_t=\mp fN=\mp f\left|m\frac{v^2}{r}-F_n\right|,$$

где верхний или нижний знак берется всегда в зависимости от того, будет ли значение $\dot{s}$ положительным или отрицательным.

В форме, отличной от этой, но по существу эквивалентной, можно написать

$$R_t=\begin{cases} f\left(F_n-m\dfrac{v^2}{r}\right) & \text{всякий раз, когда } \left(m\dfrac{v^2}{r}-F_n\right)\dot{s}>0, \\ -f\left(F_n-m\dfrac{v^2}{r}\right) & \text{всякий раз, когда } \left(m\dfrac{v^2}{r}-F_n\right)\dot{s}<0. \end{cases}$$

Действительно, когда произведение $\left(m\frac{v^2}{r}-F_n\right)\dot{s}$ положительно, то множители $\dot{s}$ и $m\frac{v^2}{r}-F_n$ будут оба положительными или оба отрицательными. В первом случае $N=m\frac{v^2}{r}-F_n$, $R_t=-fN$, во втором $N=-\left(m\frac{v^2}{r}-F_n\right)$, $R_t=fN$, откуда получается в том или другом случае верхнее выражение для R_t. Аналогично проверяется и тот случай, когда произведение $\left(m\frac{v^2}{r}-F_n\right)\dot{s}$ отрицательно, тогда для R_t будем иметь нижнее выражение. Если бы указанное произведение было равно нулю, то из обоих выражений мы имели бы $R_t=0$, так как речь идет о динамическом трении, где существенно предположение, что $\dot{s}$ отлично от нуля; поэтому рассматриваемый случай может представиться только тогда, когда исчезает первый множитель $m\frac{v^2}{r}-F_n$.

Уравнение (35) равносильно уравнению

$$m\ddot{s}=F_t\pm f\left(F_n-m\frac{v^2}{r}\right), \tag{35'}$$

где знак выбирается согласно только что указанному критерию.

Если заметим, что F_t и F_n даже в более общих условиях должны рассматриваться как известные функции от s, $\dot{s}$ и t, а f (коэффициент трения) и r (радиус кривизны) являются также известными функциями положения движущейся точки, т. е. функциями s, и, с другой стороны, $v^2=\dot{s}^2$, то увидим, что уравнение (35') действительно является дифференциальным уравнением второго порядка только с одной неизвестной функцией $s(t)$.

48. Если сила $\boldsymbol{F}$ позиционная, то F_t и F_n будут зависеть исключительно от s, и правая часть уравнения (35') представится в виде

$$A(s)v^2+B(s),$$

где $A(s)$ и $B(s)$ означают соответственно $-f\frac{m}{r}$, F_t+fF_n или $f\frac{m}{r}$, F_t-fF_n, в зависимости от того, какой берется знак. Из выражения $\pm f\frac{m}{r}$ для $A(s)$ следует, что, если речь идет о шероховатой опоре (для которой надо предположить $f>0$), то эта функция может исчезать только в случае прямолинейной траектории (бесконечно большой радиус кривизны). В этом случае (который мы рассмотрим в следующем параграфе) правая часть равенства (35') сведется к функции только от s; следовательно, в отношении интегрирования мы приходим здесь к случаю, подробно разобранному выше (§ 4).

Но и в общем случае, какова бы ни была функция $A(s)$, порядок уравнения (35') можно понизить до первого и тем самым свести уравнение к типу, непосредственно интегрируемому в квадратурах.

Достаточно принять за неизвестную функцию v^2 вместо s, а за независимую переменную s вместо t. Действительно, имеем тождественно

$$\ddot{s}=\frac{d\dot{s}}{dt}=\frac{d\dot{s}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{d\dot{s}}{ds}\dot{s}=\frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds},$$

и уравнение (35') принимает вид

$$\frac{1}{2}m\frac{dv^2}{ds}=A(s)v^2+B(s),$$

т. е. становится линейным дифференциальным уравнением по отношению к v^2, если рассматривать v^2 как функцию от s. Интегрирование его, требующее, вообще говоря, двух квадратур, приводит к выражению v^2 в функции от s. Таким образом, скорость движущейся точки будет функцией занимаемого ею положения. Чтобы полностью определить движение, надо выразить положение точки в зависимости от времени, указав соотношение между s и t. Эта зависимость получится в результате новой квадратуры, если заметим, что выражение скорости в функции от s равносильно формуле вида

$$\frac{ds}{dt} = \text{известной функции от } s.$$

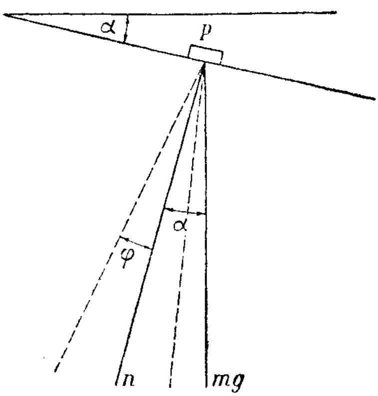
Разделяя переменные и интегрируя, будем иметь t в функции от s, откуда, обратно, мы выразим также и s в функции от t. Следовательно, задача полностью разрешима в квадратурах.

49. Остается еще учесть влияние двойного знака в правой части уравнения (35′) или в правой части первоначального уравнения (35) (которое в этом исследовании удобнее, чем уравнение (35′)). Как уже отмечалось в п. 47, движение определяется уравнением (35) (а) в том промежутке времени, в котором оно остается прямым ($\dot{s} > 0$), и уравнением (35) (б) в промежутке времени, когда оно оказывается обратным ($\dot{s} < 0$). Поэтому, при непрерывности $\dot{s}$, случай, когда мы должны будем заменить для определения движения одно уравнение другим, может представиться только в момент t_1 остановки ($\dot{s} = 0$). На этот момент надо обратить особое внимание, так как он может означать конец движения. По законам динамического трения (п. 45) это может произойти только тогда, когда в момент остановки t_1 будет выполняться условие статического равновесия $|F_t| \leqslant fN$ (где f обозначает коэффициент статического трения). В противном случае тотчас же за моментом t_1 движение начнется снова. Более точно, в силу закона возникающего движения движущаяся точка направится в ту сторону, в которую в момент t_1 направлена касательная сила F_t, так что в новой фазе движение будет определяться равенством (35) (а) или равенством (35) (б), смотря по тому, будет ли в момент $t = t_1$ сила $F_t > 0$ или < 0. Таким образом, закон движения, начиная от положения $s = s_1$ (и с момента $t = t_1$), будет однозначно определен тем интегралом уравнения (35) (а) или соответственно (35) (б), которое характеризуется начальными условиями

$$s = s_1, \quad \dot{s} = 0 \quad \text{при} \quad t = t_1.$$

Этот интеграл будет представлять движение неопределенно долго, если $\dot{s}$ сохраняет свой знак; в противном же случае — до первого следующего момента t_2, когда $\dot{s}$ снова обратится в нуль. В последнем случае необходимо проверить, как и в момент t_1, не окончилось ли движение, и, если этого нет, определить, принимая во внимание, в какую сторону действует касательная сила, какое из двух уравнений вступает в силу, и т. д.

50. Шероховатая наклонная плоскость. Изложенную выше теорию можно непосредственно приложить к движению тяжелого тела по шероховатой наклонной плоскости в предположении, что начальная скорость равна нулю или направлена по прямой наибольшего наклона. Вследствие очевидной симметрии движение будет происходить вдоль этой прямой наибольшего наклона.



Фиг. 8.

Обозначим через α угол наклона плоскости и через φ угол трения (статического) (фиг. 8). Можно утверждать, что если в какой-нибудь момент скорость равна нулю, то тяжелое тело или останется неподвижным, или начнет опускаться, смотря по тому, будет ли $\alpha \leqslant \varphi$ или $> \varphi$. Далее, если s будем отсчитывать по направлению вниз (исходя, например, от начального положения), то

$$F_t = mg \sin \alpha, \quad N = mg \cos \alpha.$$

Если предположим для определенности, что коэффициент динамического трения остается постоянным и совпадает с коэффициентом статического трения, то будем иметь $f = \operatorname{tg} \varphi$, и сила $F_t \mp fN$ в обоих случаях будет постоянной.

Полагая для краткости

$$g_1 = \frac{g}{\cos \varphi} \sin (\alpha - \varphi), \quad g_2 = \frac{g}{\cos \varphi} \sin (\alpha + \varphi),$$

на основании равенств (35) (а) и (35) (б) соответственно будем иметь

$$\ddot{s} = g \sin \alpha - fg \cos \alpha = g_1,$$
$$\ddot{s} = g \sin \alpha + fg \cos \alpha = g_2;$$

первое из этих уравнений остается в силе, когда тело опускается ($\dot{s} > 0$), второе — когда оно поднимается. Постоянная g_2 всегда положительна, поэтому из тождества

$$\frac{dv^2}{dt} = 2\ddot{s}\dot{s}$$

вытекает, что в течение восходящего движения ($\ddot{s} = g_2$, $\dot{s} < 0$) абсолютная величина скорости, как это и следовало ожидать, будет постоянно уменьшаться; при постоянном ускорении g_2 движение будет равнозамедленным.

Аналогично убедимся, что нисходящее движение, уравнение которого имеет вид $\ddot{s}=g_1$, будет равнозамедленным или равноускоренным (включая и предельный случай, когда ускорение равно нулю) в зависимости от того, будет ли g_1 отрицательным или нет, т. е. в зависимости от того, будет ли φ больше или меньше α. Это зависит исключительно от физической природы опоры.

51. Остановимся, например, на случае, когда угол наклона больше угла трения ($\alpha>\varphi$) (фиг. 8). Представим себе, что телу был дан начальный толчок, направленный вверх, со скоростью v_0 (по абсолютной величине).

При $t=0$ будем иметь $s=0$, $\dot{s}=-v_0$; движение вначале будет восходящим и поэтому представится тем интегралом уравнения $\ddot{s}=g_2$, который соответствует начальным значениям $s=0$ и $\dot{s}=-v_0$. Очевидно, будем иметь

$$s=\frac{1}{2}g_2t^2-v_0t.$$

Уравнение $\dot{s}(t)=0$, т. е.

$$g_2t-v_0=0,$$

допускает один (и только один) положительный корень

$$t_1=\frac{v_0}{g_2}.$$

От момента $t=0$ до $t=t_1$ движение будет восходящим, и пройденный путь будет измеряться (по абсолютной величине) значением

$$-s=t\left(v_0-\frac{1}{2}g_2t\right).$$

При $t=t_1$, в частности, имеем $-s_1=\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g_2}$. Хотя скорость будет равна нулю, движение, однако, не прекратится (в предположении, что $\alpha>\varphi$). Начнется, следовательно, нисходящая фаза движения, определяемая уравнением $\ddot{s}=g_1$ (где $g_1>0$) и начальными условиями $s=s_1$, $\dot{s}=0$ при $t=t_1$. Соответствующий интеграл будет выражен равенством:

$$s=\frac{1}{2}g_1(t-t_1)^2+s_1.$$

Уравнение $\dot{s}(t)=0$ не имеет корня, большего, чем t_1 (или, иначе, скорость не исчезает при $t>t_1$), потому что движение будет равноускоренным, начинаясь из состояния покоя в момент t_1. Поэтому предыдущее выражение для s остается в силе для всякого значения $t > t_1$.

Совершенно аналогично разбираются и случаи $\alpha > \varphi$, $\dot{s}_0 > 0$, или $\alpha \leqslant \varphi$ с вариантами $\dot{s}_0 < 0$ и $\dot{s}_0 > 0$.

§ 9. Вертикальное движение тяжелого тела с учетом сопротивления воздуха

52. В виде приложения теории, изложенной в § 4, рассмотрим простой случай свободного падения тяжелого тела, принимая во внимание сопротивление воздуха.

Предположим, что падение происходит по вертикали и сопротивление воздуха может быть представлено силой, пропорциональной квадрату скорости.

Условимся отсчитывать расстояния s от начального положения вниз; тогда будем иметь $\dot{s} = v$, $\ddot{s} = \frac{dv}{dt}$,

$$F_t = mg - KAav^2.$$

Если для краткости введем положительную постоянную V, определяемую равенством

$$V^2 = \frac{mg}{KA\alpha}, \tag{36}$$

то уравнение движения примет вид

$$\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right). \tag{37}$$

Это уравнение показывает, что если скорость v меньше V, то ускорение $\frac{dv}{dt}$ положительно и, следовательно, движение будет ускоренным; если, наоборот, скорость v больше V, движение будет замедленным.

Отметим, что одно из частных решений определяется равенством $v = V$, т. е. мы имеем равномерное движение с критической скоростью V. Чтобы составить себе представление о порядке величины V, положим в равенстве (36) $\alpha = 1$ и $K = 0{,}08$ (п. 22), в силу этого $1/\sqrt{K}$ будет немного меньше 3.

Тогда V приблизительно будет равно утроенному значению корня

$$\sqrt{\frac{\text{вес (выраженный в } \textit{кг})}{\text{площадь наибольшего сечения, перпендикулярного к скорости (выраженная в } m^2)}}$$

При весе в 100 *кг* парашюта с радиусом в 5 или 6 *м* (т. е. с площадью наибольшего сечения около 100 $м^2$) можно предполагать для V значение около 3 *м/сек*; такая скорость сама по себе не опасна.

Как увидим немного ниже, V представляет собой асимптотическое значение скорости падения.

53. Формальное интегрирование уравнения (37) непосредственно выполняется путем разделения переменных. Прежде чем выполнять это интегрирование, отметим, что если в какой-нибудь момент скорость тела меньше критической скорости V, то она, постоянно возрастая, никогда не будет превосходить V и будет асимптотически стремиться к V при $t \to \infty$. Равным образом, если в какой-нибудь момент скорость превосходит V, то она будет постоянно оставаться больше V и, убывая, будет асимптотически стремиться к V при бесконечном возрастании t.

В обоих случаях доказательства совершенно аналогичны. Рассмотрим, например, первый случай и покажем, что, допустив противное, мы придем к противоречию.

Допустим, следовательно, что скорость может превзойти V. Так как речь идет о непрерывной функции, то она должна, по крайней мере один раз, принять значение V. Пусть t_1 будет момент времени, когда это произойдет в первый раз; пусть, далее, t' и $t'' > t'$ будут два какие-нибудь момента времени, предшествующие t_1, v' и v'' (причем $v'' > v'$, в силу того, что скорость возрастает вместе с t) — соответствующие значения v.

Разделяя переменные в уравнении (37) и интегрируя от t' до t'' (при этом заметим, что при возрастании t от t' до t'' v изменяется, все время возрастая, от v' до v''), получим

$$\int_{v'}^{v''} \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{V^2}} = g(t'' - t').$$

Противоречие, о котором было сказано выше, можно увидеть из этой формулы, если заставить t'' приближаться к t_1'. Действительно, в то время как правая часть стремится к конечному пределу $g(t_1 - t')$, левая часть (v'' стремится к V, когда t'' стремится к t_1) имеет пределом бесконечность, так как функция под знаком интеграла при $v = V$ имеет бесконечность первого порядка.

54. Перейдем теперь к интегрированию уравнения (37) в предположении, что движущееся тело предоставлено самому себе без начальной скорости, или в более общем случае, что оно брошено вниз со скоростью $v_0 < V$. Как мы уже видели, v все время меньше V, поэтому, если написать уравнение (37) с разделенными переменными в виде

$$\frac{2g\,dt}{V} = \frac{2}{V} \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{V^2}} = \left\{ \frac{1}{1 + \frac{v}{V}} + \frac{1}{1 - \frac{v}{V}} \right\} \frac{dv}{V},$$

то в правой части знаменатели всегда будут положительными. Отсюда, интегрируя, получим

$$\frac{2g}{V}t = \ln\frac{1+\frac{v}{V}}{1-\frac{v}{V}} + \text{const},$$

где постоянную интегрирования можно обозначить через $\frac{2g}{V}t^*$ мы определим ее исходя из условия, что $v = v_0$ при $t = 0$, что, в частности, дает $t^* = 0$, когда начальная скорость $v_0 = 0$[1]).

Если перейдем от логарифмов к числам, разрешим уравнение относительно v и положим для краткости $\tau = g\frac{t-t^*}{V}$, то найдем

$$\frac{v}{V} = \frac{e^{\tau}-e^{-\tau}}{e^{\tau}+e^{-\tau}} \tag{38}$$

или

$$v = V - \frac{2V}{e^{2\tau}+1}.$$

Последнее соотношение, в котором v явно выражено через τ, а потому и через t подтверждает тот факт, что скорость всегда меньше V и стремится к V при безграничном возрастании t.

55. Пройденное пространство s можно вычислить посредством новой квадратуры. Действительно, так как $ds = v dt$, то на основании соотношения между t и τ можно написать

$$ds = \frac{V}{g}v d\tau$$

и, следовательно, в силу уравнения (38)

$$ds = \frac{V^2}{g}\frac{e^{\tau}-e^{-\tau}}{e^{\tau}+e^{-\tau}}d\tau = \frac{V^2}{g}d\ln(e^{\tau}+e^{-\tau}).$$

Отсюда, интегрируя и принимая $s = 0$ при $t = 0$, т. е. при $\tau = -\frac{gt^*}{V} = \tau_0$, получим искомое выражение для s

$$s = \frac{V^2}{g}\ln\frac{e^{\tau}+e^{-\tau}}{e^{\tau_0}+e^{-\tau_0}}. \tag{39}$$

---

[1]) Так как в течение всего движения предполагается, что сопротивление пропорционально квадрату скорости, то необходимо предварительно проверить, что предельные скорости v_0 и V не превосходят значений, при которых этот закон справедлив. При строгом доказательстве случай начальной скорости, равной нулю, следовало бы исключить (п. 29), потому что при очень малых скоростях этот закон не имеет места. Поэтому приложение формулы к этому случаю можно оправдать только тем, что скорость возрастает достаточно быстро, и, следовательно, можно пренебречь возмущающим влиянием первого периода, когда закон квадратичного сопротивления еще не имеет места.

К тому же результату, но в другой форме можно прийти, если взять уравнение (37) и рассматривать (как в п. 48) $v=\frac{ds}{dt}$ как сложную функцию от t через посредство s. В силу этого будем иметь

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{dv}{ds}v=\frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{ds}$$

и уравнению (37) можно придать вид

$$\frac{2g}{V^2}ds=\frac{1}{V^2}\frac{d(v^2)}{1-\frac{v^2}{V^2}}.$$

Интегрируя и замечая, что при $v=v_0$ должно быть $s=0$, придем к равенству

$$s=\frac{V^2}{2g}\ln\frac{V^2-v_0^2}{V^2-v^2}, \tag{39'}$$

которое вместе с равенством (38) даст выражение s через τ. Эквивалентность выражений (39') и (39) можно установить, принимая во внимание равенство (38) и его выражение в начальный момент

$$\frac{v_0}{V}=\frac{e^{\tau_0}-e^{-\tau_0}}{e^{\tau_0}+e^{-\tau_0}}.$$

56. Равенством (39') можно воспользоваться для установления соотношения между высотой падения и энергией, потерянной вследствие сопротивления воздуха. В любой момент полная энергия (сумма кинетической и потенциальной энергий) равна

$$m\left(\frac{v^2}{2}-gs\right).$$

Вычитая эту величину из ее начального значения $\frac{mv_0^2}{2}$, получим меру потерянной энергии (которая преобразуется главным образом в тепловую)

$$q=\frac{m}{2}(v_0^2-v^2+2gs).$$

Теперь равенство (39') можно написать в виде

$$-\frac{2gs}{V^2}=\ln\left\{1+\frac{v_0^2-v^2}{V^2-v_0^2}\right\}.$$

Если перейдем теперь от логарифмов к числам, разрешим уравнение относительно $v_0^2-v^2$ и подставим результат в предыдущее равенство, то получим

$$q=\frac{m}{2}\left\{(V^2-v_0^2)(e^{-\lambda}-1)+2gs\right\},$$

где для краткости положено

$$\lambda = \frac{2gs}{V^2}.$$

Предположим, в частности, что $v_0 = 0$ и высота падения мала; точнее, рассмотрим такие значения s, при которых величина $\sqrt{2gs}$, т. е. скорость, которую приобрело бы в пустоте тяжелое тело при высоте падения s, мала по сравнению с предельной скоростью V. Можно пренебречь тогда степенями отношения $\lambda = 2gs/V^2$ выше второй и положить

$$e^{-\lambda} = 1 - \lambda + \frac{\lambda^2}{2}.$$

(Вместо $e^{-\lambda}$ мы берем здесь разложение этой функции в ряд Маклорена, ограничиваясь первыми тремя членами, так как четвертый и следующие члены имеют степени λ выше второй и потому отбрасываются.) В таком случае получим

$$q = \frac{m}{4} V^2\lambda^2 = \frac{1}{2}\lambda mgs,$$

откуда видно, что энергия, потерянная на пути s, есть часть работы, совершенной силой тяжести, или, если угодно, часть живой силы, которую имело бы падающее тело, падая по тому же пути в пустоте. $\left(\frac{\lambda}{2} = \frac{gs}{V^2}\right.$ при нашем предположении — величина малая.$\left.\right)$

57. Следует добавить, что при вертикальном движении вверх имеем $F_t = mg + KA\alpha v^2$ (вертикальная сила, направленная вниз) и $\dot{s} = -v$. Принимая во внимание равенство (36), можно уравнение движения представить в виде

$$\frac{dv}{dt} = -g\left(1 + \frac{v^2}{V^2}\right). \tag{37'}$$

Если вначале движущееся тело имеет скорость, направленную вверх, то надо воспользоваться уравнением (37'). Оно будет справедливым до тех пор, пока скорость тела не станет равной нулю (при этом сила тяжести и сопротивление воздуха вместе противодействуют движению). Это произойдет даже скорее, чем в пустоте (как это непосредственно ясно и как к тому же это следует из уравнения (37')). До этого момента между t и v имеем соотношение

$$\operatorname{arctg}\frac{v}{V} = -\frac{g}{V}t + \text{const},$$

которое получается непосредственно из уравнения (37'), если мы разделим в нем переменные и проинтегрируем его. Постоянная определяется на основании значения начальной скорости. Обозначив ее через $\frac{g\tau}{V}$ и, придав предыдущему уравнению вид

$$v = V \operatorname{tg} \frac{g}{V}(\tau - t), \tag{38'}$$

мы убедимся, что v убывает, начиная с момента $t=0$, и к концу промежутка времени τ принимает значение, равное нулю.

При дальнейшем интегрировании уравнения (38') можно получить выражение для пути при движении вверх для промежутка времени $(0, \tau)$. Начиная с этого момента, будет происходить свободное падение, определяемое уравнением (37).

§ 10. Свободные и вынужденные колебания. Резонанс

58. В виде приложения теории, развитой в § 4 и 5, рассмотрим движение по заданной траектории материальной точки P с массой m, находящейся под действием восстанавливающей силы $-\lambda s$ и пассивного сопротивления вязкого трения $-b\dot{s}$ [1]).

Дифференциальное уравнение движения в этом случае имеет вид

$$m\ddot{s} = -b\dot{s} - \lambda s,$$

где b и λ обозначают две положительные постоянные; достаточно положить

$$\frac{b}{m} = 2h, \quad \frac{\lambda}{m} = k,$$

чтобы привести его к виду

$$\ddot{s} + 2h\dot{s} + ks = 0. \tag{40}$$

Таким образом мы снова нашли дифференциальное уравнение (линейное, с постоянными коэффициентами), исчерпывающим образом разобранное в отношении определяемых им движений в кинематике (т. I, гл. II, п. 41—43). Вспоминая установленные там результаты, мы можем прямо утверждать, что точка P при указанных выше условиях совершает или затухающие колебания около точки O, или же апериодическое движение (самое большее с одним обращением направления и с асимптотической точкой на конечном расстоянии или в бесконечности).

Наиболее интересным случаем, которым мы здесь и ограничимся, является случай затухающих колебаний; он, как мы знаем, характеризуется условием $k > h^2$. Если положим тогда $k = h^2 + \omega^2$, то уравнение (40) примет известную уже форму

$$s + 2h\dot{s} + (h^2 + \omega^2)s = 0; \tag{40'}$$

[1]) Глубокое исследование для случая, когда сопротивление выражается квадратичным законом, можно найти в мемуаре Синьорини (Signorini, *Atti del R. Ist. Ven*, т. 73, 1914, стр. 803—858).

здесь ω определяет постоянную частоты колебаний и h — постоянную затухания; тогда закон движения (общий интеграл уравнения (40′)) принимает вид

$$s = re^{-ht}\cos(\omega t + \theta_0),$$

где r и θ_0 суть две произвольные постоянные.

Первым примером движений этого типа, реализуемым физически, является пример колебаний простого маятника в вязкой среде (п. 41). Не менее наглядным и интересным является случай *свободных колебаний* камертона, когда камертон, после возбуждения в нем колебаний, предоставлен самому себе в спокойном воздухе.

В этом случае конец одной из ножек можно рассматривать как материальную точку, которая колеблется, описывая линию, очень мало отличающуюся от прямой. Его связь с ножкой определяет восстанавливающую силу и пассивные сопротивления (трение, несовершенную упругость и т. п.), к которым присоединяется пассивное сопротивление воздуха. Эти пассивные сопротивления в первом приближении можно свести к простому вязкому сопротивлению, так что приблизительно будут осуществлены условия действия силы, предположенные в самом начале. Тогда, если обозначим через s дугу, описываемую концом ножки и отсчитываемую от положения равновесия (положительную в одном направлении и отрицательную в другом), то движение определится как раз уравнением типа (40). Так как, далее, результирующее (касательное) пассивное сопротивление крайне мало по сравнению с упругой силой, то с большим избытком выполнится условие $k > h^2$, обеспечивающее для движения характер затухающего колебания.

То обстоятельство, что в предположенных условиях период $T = 2\pi/\omega$ не зависит от начальных условий (способа возбуждения), а зависит только от h и k, т. е. только от внутренних свойств камертона, оправдывает его назначение как инструмента, служащего для получения звука определенной высоты.

59. Вынужденные колебания. Обыкновенно так называют те колебания, которые возбуждаются заданной периодической силой, действующей вместе с силами уже рассмотренного типа (восстанавливающая сила и вязкое сопротивление).

Обозначая через Q касательную составляющую этой силы в направлении возрастания s, деленную на m, т. е. отнесенную к единице массы движущейся точки, и через $E(s)$ — дифференциальное выражение в левой части равенства (40), получим уравнение движения в виде

$$E(s) = Q. \tag{41}$$

Периодическая сила Q в любой момент предполагается численно определенной и, следовательно, рассматривается как функция только одного t с некоторым заданным периодом $T_1 = 2\pi/\omega_1$.

60. При интегрировании уравнения (41) (линейное неоднородное уравнение) все сводится, как известно, к определению частного интеграла $J(t)$, так как из него далее сразу же выводится общий интеграл, если положить

$$s = J + \sigma, \tag{42}$$

где σ обозначает общий интеграл уравнения без правой части $E(s) = 0$, т. е. (п. 58)

$$\sigma = re^{-ht}\cos(\omega t + \theta_0), \quad \omega = \sqrt{k - h^2}$$

с двумя произвольными постоянными интеграции r и θ_0.

Что сумма $J + \sigma$ действительно представляет собой общий интеграл уравнения (41) — очевидно. Прежде всего, складывая оба уравнения, которым по определению удовлетворяют J и σ,

$$E(J) = Q, \quad E(\sigma) = 0,$$

получим

$$E(J) + E(\sigma) = E(J + \sigma) = Q,$$

и, следовательно, $J + \sigma$ удовлетворяет уравнению (41). Кроме того, эта сумма содержит (как и σ) две независимые произвольные постоянные.

Из выражения общего интеграла (42), приняв во внимание то обстоятельство, что σ стремится к нулю при бесконечном возрастании t (или практически становится равным нулю через сравнительно небольшой промежуток времени), мы получим важнейший критерий для конкретных приложений. Именно, *чтобы характеризовать режим вынужденных колебаний* (режим, который устанавливается тем быстрее, чем больше затухание h), достаточно *рассмотреть частный интеграл J.*

61. Постоянная добавочная сила. Рассмотрим прежде всего простейший случай постоянной добавочной силы (которая является пределом периодически изменяющейся силы, когда стремится к нулю период, в конце которого восстанавливаются те же условия). Частный интеграл J уравнения $E(s) = Q$ при постоянном Q определяется, естественно, значением, тоже постоянным, $s = Q/k$, соответствующим состоянию *вынужденного равновесия*; положение вынужденного равновесия несколько смещено от положения естественного равновесия ($s = 0$).

Добавочное возбуждение является статическим, статическим же будет и соответствующее ему состояние. Что же касается общего интеграла $s = J + \sigma$, то он представляет собой (как это легко видеть, принимая положение $s = J$ за начало дуг) затухающие колебания, тождественные с теми, которые имели бы место при отсутствии Q, за исключением лишь того, что центр колебания оказывается смещенным и находится в новом положении равновесия.

62. Синусоидальная возмущающая сила. Явное выражение J легко может быть получено еще в одном особенно важном случае, когда периодическая функция Q является синусоидальной, т. е. выражается функцией вида

$$q \sin(\omega_1 t + \alpha),$$

где q, α (и ω_1) суть какие-нибудь заданные постоянные. Заметим, что если мы хотим иметь косинус вместо синуса, то можно заменить α на $\alpha + \pi/2$; с другой стороны, смещая начало отсчета времени, всегда можно сделать $\alpha = 0$, $q > 0$.

Положим

$$Q = q \sin \omega_1 t, \qquad (q > 0)$$

и покажем, что дифференциальное уравнение (41) допускает частный интеграл вида

$$J(t) = p \sin(\omega_1 t - \varphi), \tag{43}$$

где постоянные p и φ, разумеется, должны быть выбраны надлежащим образом.

и С этой целью будем исходить из тождества

$$E(J) = \ddot{J} + 2h\dot{J} + kJ = p\{2h\omega_1 \cos(\omega_1 t - \varphi) + \\ + [k - \omega_1^2] \sin(\omega_1 t - \varphi)\}$$

и заметим, что для того, чтобы сделать $E(J)$ тождественным с

$$Q = q \sin \omega_1 t = q \sin[\varphi + (\omega_1 t - \varphi)] = \\ = q\{\sin \varphi \cos(\omega_1 t - \varphi) + \cos \varphi \sin(\omega_1 t - \varphi)\},$$

достаточно в обоих выражениях приравнять коэффициенты при

$$\cos(\omega_1 t - \varphi) \quad \text{и} \quad \sin(\omega_1 t - \varphi).$$

Таким образом получим систему

$$2hp\omega_1 = q \sin \varphi, \\ p(k - \omega_1^2) = q \cos \varphi,$$

однозначно определяющую обе постоянные p и φ, если примем $p > 0$ и $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Действительно, возводя в квадрат последние два равенства, складывая их и извлекая квадратный корень, получим

$$p = \frac{q}{\sqrt{(k - \omega_1^2)^2 + 4h^2\omega_1^2}}, \tag{44}$$

где согласно принятому условию радикал надо понимать в арифметическом смысле. С другой стороны, если эти равенства разделим одно на другое, то получим соотношение

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2h\omega_1}{k - \omega_1^2}, \tag{45}$$

которым в согласии с условием $0 \leqslant \varphi < \pi$ и определяется угол φ.

Частное решение (43), определенное таким образом, является, очевидно, периодическим с периодом $T_1 = 2\pi/\omega_1$ возмущающей силы $Q = q \sin \omega_1 t$; в нем p есть амплитуда вынужденных колебаний, а φ можно истолковать как *разность фаз* или *запаздывание фазы* между силой и перемещением. Из равенства (45) следует, что $\operatorname{tg} \varphi$ будет положительным или отрицательным и, следовательно, φ меньше или больше $\pi/2$ (т. е. четверти периода[1]) в зависимости от того, будет ли ω_1^2 меньше или больше k.

63. Случай слабого затухания. Если предположим, что постоянная затухания h очень мала (как это, в частности, имеет место для камертона) и если, следовательно, величиной h^2 можно пренебречь по сравнению с k, то можно отождествить k с $k - h^2 = \omega^2$ (квадрат постоянной частоты свободных колебаний). Тогда установленному выше критерию различения $\omega_1^2 \lessgtr k$ можно придать вид $\omega_1^2 \lessgtr \omega^2$ или

$$\left(\frac{\omega_1}{2\pi}\right)^2 \lessgtr \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2.$$

Отсюда приходим к заключению, что при очень слабом затухании запаздывание фазы будет меньше четверти периода ($\varphi < \pi/2$) всякий раз, когда частота (величина, обратная периоду) внешней (возмущающей) силы будет меньше частоты свободных колебаний; в противном случае запаздывание фазы будет больше четверти периода.

Полезно, кроме того, заметить, что при вычислении амплитуды p нельзя пренебречь в знаменателе (44) слагаемым $4h^2\omega_1^2$ по сравнению с $(k - \omega_1^2)^2$, если известно только, что h^2 мало по сравнению с k. Этого, конечно, нельзя делать, если ω_1^2 и k (или ω^2) близки по величине. В этом случае надо придерживаться точной формулы (44). Но если при очень малом h частота ω_1 возмущающей силы не очень близка к частоте ω свободных колебаний системы, то вместо формулы (44) можно будет воспользоваться приближенной формулой

$$p = \frac{q}{k - \omega_1^2} \tag{44'}$$

или, если угодно,

$$p = \frac{q}{\omega^2 - \omega_1^2}.$$

Далее, если, помимо допущенных до сих пор предположений, имеет место также и то обстоятельство, что величина ω_1 очень мала, так что ею можно пренебречь по сравнению с ω (или, что одно и то же, по сравнению с k), то из равенства (45) следует, что

[1] Поскольку по отношению к фазе $(\omega_1 t - \varphi)$ интеграла J, определяемого уравнением (43), $\pi/2$ представляет как раз четверть от периода 2π.

приближенно $\varphi = 0$. В этом случае можно сказать, что следствие (перемещение) находится в одной фазе с причиной (сила). Амплитуду p можно положить на основании формулы (44') приближенно равной q/k, т. е. *статическому смещению*, которое было бы вызвано постоянной силой, по величине равной максимальному значению q периодической возмущающей силы.

64. Идеальный случай, когда сопротивление равно нулю. Обратимся прямо к идеальному предположению об абсолютном отсутствии всякого пассивного сопротивления ($h = 0$, $k = \omega^2$), и для соответствующего уравнения

$$\ddot{s} + \omega^2 s = q \sin \omega_1 t \tag{41'}$$

будем искать периодическое решение в форме (43). При фактической подстановке придем к системе

$$\begin{gathered} 0 = q \sin \varphi, \\ p(\omega^2 - \omega_1^2) = q \cos \varphi, \end{gathered} \tag{46}$$

которая (если также и здесь принимается ограничение $0 \leqslant \varphi < \pi$) дает

$$\varphi = 0,$$

и при условии

$$\omega \lessgtr \omega_1$$

$$p = \frac{q}{\omega^2 - \omega_1^2}.$$

Таким образом, в качестве точного выражения амплитуды вынужденных колебаний мы получили то, что в предыдущем пункте было получено как приближенная величина при очень малом значении h и при значении ω, заметно отличающемся от ω_1.

Если, далее, $\omega_1 = \omega$, т. е. если период $2\pi/\omega_1$ возмущающей силы равен периоду свободных колебаний системы, то, так как требуется, чтобы возмущающая периодическая сила не была постоянно равна нулю (т. е. чтобы не было $q = 0$), система (46) становится противоречивой, т. е. в этом случае для уравнения (41') не существует интеграла чисто синусоидального типа. Непосредственная подстановка показывает, что при $\omega_1 = \omega$ уравнение (41') допускает частный интеграл

$$J(t) = \frac{q}{2\omega^2} t \sin \omega t,$$

который соответствует колебаниям, имеющим период $2\pi/\omega$, общий для свободных колебаний и возмущающей силы, но обладает тем свойством, что амплитуда колебаний возрастает до бесконечности вместе с временем.

65. Резонанс. Обращаясь к общей теории, мы будем предполагать, что постоянные h и k (а следовательно, ω и T), характеризующие колеблющуюся систему, остаются неизменными, равно как и максимальная величина q возмущающей силы; изменяя частоту ω_1 возмущающей силы (или же ее период $T_1=2\pi/\omega_1$), мы увидим, что вместе с этим будет изменяться амплитуда p соответствующих вынужденных колебаний. Мы покажем, что p всегда допускает единственный максимум. Если постоянная затухания h, свойственная колеблющейся системе, мала, то максимум этот будет достигнут при значении ω_1, близком (почти равном) к частоте ω свободных колебаний.

Отсюда вытекает объяснение явления *резонанса* (для колеблющихся систем с очень малой постоянной затухания), которое, как известно, заключается в следующем. Пусть внешняя периодическая возмущающая сила с заданной максимальной величиной q при каком-либо значении частоты ω_1 вызывает едва ощутимый эффект (очень малая амплитуда); если величина ω_1 очень близка к собственной частоте ω колеблющейся системы, то эффект (характеризуемый величиной амплитуды p) усиливается и может сделаться значительным.

Типичным примером этого является камертон (постоянная затухания h которого, как мы уже знаем, очень мала).

Предположим, что в окружающем воздухе происходят звуковые колебания, возбуждаемые каким-нибудь другим внешним телом (например, камертоном или органной трубой и т. п.). В этих условиях рассматриваемый камертон подвергается некоторому (очень слабому) периодическому и приближенно синусоидальному воздействию (см. последнее замечание п. 66), которое накладывается на действие внутренних упругих сил.

Мы имеем здесь, таким образом, случай вынужденных колебаний. Обычно они слабы и даже незаметны. Однако, когда внешний звук имеет высоту, равную (или очень близкую) к высоте, характерной для этого камертона, то получается значительное усиление, и колебания камертона оказываются довольно заметными.

Чтобы исследовать изменение p в зависимости от изменения ω_1, возьмем снова равенство (44) и положим

$$\frac{\omega_1^2}{k}=x, \qquad \frac{4h^2}{k}=\varepsilon^2,$$

благодаря чему переменная x, заменяющая частоту ω_1, получается существенно положительной, а при предполагаемой малости h величина ε будет правильной и даже очень малой дробью. В силу этого уравнение (44) можно написать в виде

$$p=\frac{q}{k}\,\frac{1}{\sqrt{(1-x)^2+\varepsilon^2 x}}. \qquad (44'')$$

Функция $(1-x)^2+\varepsilon^2 x$ имеет первую производную, равную $-2(1-x)+\varepsilon^2$, и вторую производную, равную постоянной 2, так что она допускает минимум (и притом только один) при $x=1-\varepsilon^2/2$. Отсюда следует, что p при изменении ω_1 имеет максимум (и только один), который соответствует частоте ω_1, определяемой равенством

$$\omega_1^2=k\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\right)=k-2h^2=\omega^2-h^2. \tag{47}$$

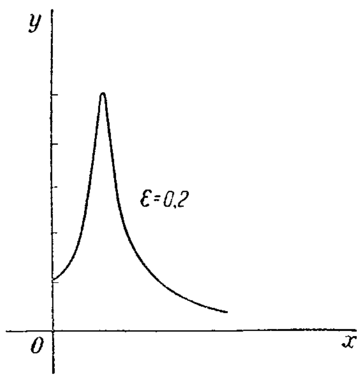
Этот максимум, как легко проверить, полагая в формуле (44)

$$k-\omega_1^2=2h^2,\quad \omega_1^2=\omega^2-h^2,$$

равен

$$\frac{q}{2h\omega}=\frac{\omega}{2h}\cdot\frac{q}{\omega^2}. \tag{48}$$

Из равенств (47) и (48) непосредственно следует, что при очень малых по сравнению с ω значениях h максимум p получится в том случае, когда частота ω_1 близка к ω; этот максимум будет иметь очень большую величину по сравнению с величиной q/ω^2 или, что то же самое, по сравнению с величиной q/k, которая на основании формулы (44″) представляет собой значение p при $x=0$, или же при $\omega_1=0$.



Фиг. 9.

Чтобы получить более отчетливое представление о характере максимума при указанных выше условиях, достаточно обратить внимание на то, что если бы можно было вполне пренебречь величиной h по сравнению с ω и, следовательно, тем более величиной h^2 по сравнению с k, т. е. величиной ε^2 по сравнению с единицей, то максимум величины

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x)^2+\varepsilon^2 x}}$$

был бы просто равен бесконечности (при $x=1$). Но и при небольших значениях ε (например, не превышающих $^1/_5$) мы будем иметь при $x=1-\varepsilon^2/2$ резко выраженный максимум. Кривая (см. фиг. 9)

$$y=\frac{1}{\sqrt{(1-x)^2+\varepsilon^2 x}}$$

очень быстро падает с той и другой стороны от вершины.

66. Случай произвольной периодической возмущающей силы. Мы подробно рассмотрели свойства интеграла J в частном предположении, что периодическая сила Q является синусоидальной, т. е. приводится к виду $q \sin \omega_1 t$.

Важное значение, которое мы придаем этому специальному виду возмущающей силы, вполне оправдывается следующими соображениями.

Прежде всего, если в уравнении (41)

$$E(s) = Q(t)$$

функция $Q(t)$ является суммой двух или нескольких других функций $Q_1, Q_2, \ldots$, для каждой из которых мы умеем определить частные интегралы $J_1, J_2 \ldots$ уравнений $E(s) = Q_1$, $E(s) = Q_2, \ldots$, то, очевидно, достаточно положить

$$J = J_1 + J_2 + \ldots,$$

чтобы иметь интеграл уравнения (41).

Таким образом, если Q есть сумма членов вида

$$q \sin(\omega_1 t + \alpha)$$

при постоянных q, ω_1, α, выбираемых как угодно для каждого члена, то тотчас же можно будет определить частный интеграл J уравнения (41) в виде суммы стольких же членов типа (43) (плюс возможная постоянная, если среди значений ω_1 имеется и нуль (п. 61)).

Это замечание имеет большую важность, если его связать с одним результатом анализа, известным под названием теоремы Фурье[1]), в силу которой какая угодно функция $Q(t)$, конечная, непрерывная и с заданным периодом $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ (при любом t), может быть представлена рядом (абсолютно и равномерно сходящимся) вида

$$q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin(n\omega_1 t + \alpha_n), \tag{49}$$

где q_n и α_n суть надлежащим образом выбранные постоянные.

---

[1]) Жан Баптист Жозеф Фурье (Jean Baptiste Joseph Fourier) родился в Оксерре в 1768 г., умер в Париже в 1830 г., особенно прославился благодаря своему фундаментальному сочинению о распространении тепла (Théorie analytique de la chaleur), представляющему собой классический образец физико-математической теории, не зависящей от схем теоретической механики и выступающей в самостоятельной трактовке. В этом исследовании широко применяются ряды и интегралы, носящие его имя. Он занимался также статикой, обосновав новыми путями принцип виртуальной работы. Был профессором в Высшей политехнической школе в Париже, совершил с Наполеоном I поход в Египет, с 1802 по 1816 г. управлял префектурой Изера и с 1817 г. до конца жизни был непременным секретарем Академии наук в Париже. Полное собрание его сочинений составляют два больших тома, опубликованных в 1890 г. (Paris, Gauthier — Villars).

Разложение определенной функции $Q(t)$ в ряд указанного вида представляет задачу так называемого *гармонического анализа.*

Теорема Фурье вместе с предыдущим замечанием позволяет непосредственно определить (в виде суммы ряда, сходимость которого легко может быть доказана) частный интеграл J уравнения (41) при любом законе действия периодической возмущающей силы.

Заметим еще, что в большинстве практических случаев первый отличный от постоянного член ряда (49) (*основной тон* в акустике) значительно превосходит последующие *(высшие гармоники)*, так что частный интеграл J (если отвлечься от несущественной постоянной) приблизительно приводится к типичной форме (43).

67. Энергия, поглощаемая колеблющейся системой. Сделаем последнее замечание, касающееся энергии, которая при вынужденных колебаниях сообщается (или отнимается, если окажется представленной отрицательным числом) колеблющейся системе действием возмущающей силы Q. В любой промежуток времени dt, которому соответствует перемещение ds движущейся точки, рассматриваемая энергия будет не чем иным, как элементарной работой силы, и, следовательно, поскольку Q относится к единице массы, мы имеем (п. 59)

$$mQds = mQ\dot{s}dt.$$

Энергия, сообщенная в течение целого периода T_1, может быть, таким образом, выражена в виде

$$e = m\int_t^{t+T_1} Q\dot{s}dt. \tag{50}$$

Если примем во внимание, что движение определяется уравнением $E(s) = Q$ и что, следовательно, имеем тождественно

$$Q\dot{s} = E(s)\,\dot{s} = \ddot{s}\dot{s} + 2h\dot{s}^2 + ks\dot{s} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{s}^2}{dt} + 2h\dot{s}^2 + \frac{k}{2}\frac{ds^2}{dt},$$

то равенству (50) можно будет придать вид

$$e = \frac{m}{2}\left[\dot{s}^2 + ks^2\right]_t^{t+T_1} + 2hm\int_t^{t+T_1} \dot{s}^2dt.$$

Замечая, что s в рассматриваемом случае имеет вид $J + \sigma$ и что при достаточно большом t слагаемым σ можно пренебречь, мы найдем, что при установившемся режиме проинтегрированная часть равна нулю, так как (предыдущий пункт) функция J и, следовательно, $\dot{J}^2 + kJ^2$, так же как и Q, имеет период T_1. Остается, следовательно только интеграл, в котором вместо $\dot{s}$ можно также подставить $\dot{J}$, так что

$$e = 2hm\int_{t}^{+T_1} \dot{J}^2 dt.$$

Эта формула показывает, что энергия e получается существенно положительной, т. е. *чтобы поддерживать вынужденные колебания, необходимо сообщать энергию колеблющейся системе.*

Следует заметить, что энергия e не зависит от t, т. е. что при установившемся режиме затрата энергии, соответствующая интервалу в один период, является всегда одной и той же, каков бы ни был момент t начала интервала. Чтобы это показать, достаточно взять производную по t от предыдущего выражения e; так как определенный интеграл зависит от t только через посредство двух пределов, верхнего и нижнего, это даст

$$\frac{de}{dt} = 2hm\{\dot{J}^2(t+T_1) - \dot{J}^2(t)\}.$$

Правая часть равна нулю в силу периодичности функции $\dot{J}$.

Ввиду независимости величины e от t можно условиться выражать затрату энергии в течение одного периода *при установившемся режиме* в виде

$$e = 2hm\int_{0}^{T_1} \dot{J}^2 dt. \qquad (50')$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Рассматривая хорды сферы, имеющие один конец в самой нижней (или самой верхней) точке, доказать, что падение тяжелой точки вдоль какой нибудь из этих хорд при отсутствии трения совершается в течение одного и того же промежутка времени.

2. На основании предыдущего упражнения определить прямолинейный путь, по которому должна двигаться тяжелая точка при отсутствии трения и с начальной скоростью, равной нулю от заданного положения, чтобы достигнуть данной кривой или данной поверхности в наименьшее возможное время.

3. Математик Т. Бонати предложил и разрешил (Венеция, 1781) следующую задачу. Дана точка O в некоторой вертикальной плоскости; провести через эту точку в заданной плоскости такую кривую, чтобы тяжелая точка, пущенная из точки O без начальной скорости, пробежала по ней некоторую дугу в то же самое время, что и соответствующую хорду, предполагая, что обе опоры лишены трения. Некоторыми авторами эта задача цитируется под именем задачи Саладини, которым она была снова решена (1806).

В полярных координатах ρ и θ с полюсом в O и полярной осью, направленной вдоль нисходящей вертикали, при движении по хорде имеем $2\rho = g\cos\theta t^2$; при движении же по кривой интеграл живых сил дает

$\dot{\rho}^2 = 2g\rho\cos\theta$. Исключая t, получим для кривой дифференциальное уравнение, которое, по выполнении выкладок, приводится к виду

$$d\rho = \rho \operatorname{ctg} 2\theta d\theta.$$

Интегрирование этого соотношения дает уравнение лемнискаты (с осью, наклоненной под углом в 45°) $\rho^2 = c^2 \sin 2\theta$.

4. Исследовать прямолинейное движение точки, притягиваемой или отталкиваемой неподвижным центром с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния.

5. Материальная точка с массой m притягивается к центру O силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния. Предполагая, что точка предоставлена самой себе без начальной скорости на расстоянии a от O, доказать, что время, которое она употребляет, чтобы достигнуть O, равно $a^3\sqrt{\dfrac{m}{\mu}}$, где μ есть величина силы, отнесенной к единице массы на единице расстояния.

6. На две материальные точки с одинаковой массой наложена такая связь, что они могут двигаться без трения по двум взаимно перпендикулярным прямым Ox и Oy. Они притягиваются с силой, зависящей только от взаимного расстояния r. Доказать, что если начальные скорости их равны нулю, то обе точки одновременно придут в O.

7. Машина Атвуда. Два груза p и p_1 прикреплены к концам одной веревки, проходящей по жолобу блока с горизонтальной осью. Предполагая, ради определенности, $p > p_1$, представим себе, что система предоставлена самой себе в состоянии покоя. Доказать, что p опускается, и, следовательно, p_1 поднимается с постоянным ускорением

$$\frac{p - p_1}{p + p_1} g.$$

Примечание. Это выражение для ускорения используется в машине Атвуда. При помощи этой машины, как известно, преследуется цель уменьшения в желаемом отношении ускорения g, соответствующего свободному падению тяжелого тела, которое слишком быстро для того, чтобы его можно было удобно наблюдать.

При разборе задачи p и p_1 уподобляются двум материальным точкам, каждая из которых находится под действием двух сил: своего веса и натяжения веревки, причем для последней силы допускается, что она передается вдоль веревки без изменения от p к p_1. Мы уже знаем, что в *статических условиях* принимается в соображение предположение, что можно отвлечься от собственного веса веревки, от ее несовершенной гибкости и, сверх того, от трения, развивающегося на протяжении части веревки, помещающейся в жолобе блока (т. I, гл. XIV, п. 36). При тех же ограничениях можно принять натяжения в точках прикрепления веревки к грузам p и p_1 равными между собой также и во время движения, как это можно было бы легко доказать на основании так называемой *теоремы о движении центра тяжести* (п. 6, гл. V).

Указанный выше результат устанавливается исключением натяжения из уравнений движения двух точек p и p_1, каждой по своей (прямолинейной) траектории.

8. Для точки, находящейся под действием консервативной силы с потенциалом U и вынужденной двигаться по кривой без трения, в силу замечаний гл. I существуют соотношения:

$$R_n = \frac{mv^2}{r} - F_n, \quad mv^2 = 2(U+E)$$

и, следовательно, по исключении v,

$$R_n = \frac{2(U+E)}{r} - F_n.$$

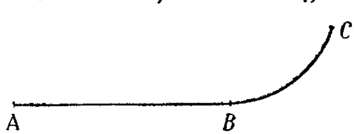
Применить эту формулу к случаю тяжелой точки, находящейся на параболе с вертикальной осью и с вогнутостью, обращенной вверх; в частности доказать, что если скорость точки равна нулю на высоте фокуса, то реакция параболы в самой нижней точке равна удвоенному весу.

9. Кривая c, расположенная в вертикальной плоскости, обращена своею выпуклостью кверху и служит опорой для тяжелой точки, которой сообщается в заданном положении P_0 касательная скорость v_0. Точка покидает кривую, как только реакция перестает быть направленной во внешнюю сторону, так что условие отрыва есть $R_n = 0$, где для R_n, в предположении отсутствия трения, сохраняет силу выражение предыдущего упражнения.

Рассмотреть случаи круга и параболы с вертикальной осью. В этом втором случае ввести скорость u_0, принадлежащую тяжелой точке, которая проходила бы через P_0 в свободном движении (т. е. при отсутствии опоры), описывая данную параболу; доказать, что если $v_0 > u_0$, то движущаяся точка покидает параболу сразу же после начала движения.

10. При предположениях предыдущего упражнения рассмотреть параболический профиль с горизонтальной осью и представить себе, что тяжелая точка оставлена без начальной скорости на высоте h над осью. Доказать, что если p есть параметр параболы, то высота y положения отрыва является положительным корнем кубического уравнения $y^3 + 3p^2y - 2p^2h = 0$, и показать, что при начальной высоте h, очень малой по сравнению с p, отрыв произойдет на высоте $\frac{2h}{3}$.

11. Эллиптический профиль без трения расположен так, что его большая ось вертикальна. В конце малой оси с внутренней стороны профиля бросается тяжелая точка с вертикальной (и, следовательно, касательной), направленной вверх скоростью v_0, определяемой из равенства $v_0^2 = \frac{a^2+8b^2}{3\sqrt{3b}} g$, где a и b суть полуоси эллипса. Показать, что точка по истечении небольшого промежутка времени покидает профиль и движется свободно, описывая дугу параболы, проходящую через центр эллипса.



Фиг. 10.

12. Тяжелая точка брошена вдоль горизонтальной опоры со скоростью 5 *м/сек*. Если коэффициент трения опоры есть 0,1, то какой путь будет пройден движущейся точкой, когда ее энергия сведется к половине начальной?

13. Тяжелое колечко, которое можно рассматривать как материальную точку, может скользить с легким трением вдоль направляющей, состоящей из горизонтального прямолинейного участка AB (фиг. 10) длиной l и из плавно

сопряженной с ним дуги BC, представляющей дугу круга в вертикальной плоскости с центром над AB, с радиусом r и центральным углом α. Обозначая через f коэффициент трения, определить скорость, которую надо сообщить движущейся точке (колечку) в A, чтобы она достигла конца C без удара о находящийся там упор (т. е. с нулевой скоростью).

14. Поезд, масса которого M, движется с постоянной скоростью по горизонтальным прямолинейным рельсам так, что, если пренебречь сопротивлением воздуха, тяговое усилие будет равно сопротивлению, происходящему от трения (качения) fMg, где f — постоянная. В некоторый момент несколько вагонов с общей массой m отрываются. Так как двигателя нет, то движение их замедляется в силу сопротивления fmg, и по истечении некоторого времени они останавливаются. Если l есть путь, пройденный ими за время до остановки, то показать, что остальная часть поезда будет находиться от них на расстоянии $Ml/(M-m)$.

15. Показать, обозначая через R полное сопротивление (предполагаемое постоянным), испытываемое поездом, масса которого есть M, и через H — мощность (тоже постоянную) силы тяги, что время, необходимое для того, чтобы сообщить поезду скорость v, меньшую предельной $\frac{H}{R}$, определяется выражением

$$\frac{MH}{R^2}\ln\frac{H}{H-Rv}-\frac{Mv}{R}.$$

16. Сопротивление воздуха движению железнодорожного поезда приближенно выражается в килограммах формулой[1] $R=(0{,}0193+0{,}00172\,n)\,v^2$, где n — число вагонов, составляющих поезд, включая паровоз и тендер, и v — скорость в *км/час*. Если ветер дует со скоростью u в направлении, противоположном движению поезда, то v в этой формуле надо заменить через $v+u$.

Предполагая, что поезд состоит из паровоза, тендера и восьми вагонов и весит 400 *т*, определить добавочную энергию, которую должен дать двигатель, чтобы поддерживать постоянную скорость в 72 *км/час* на пути в 10 *км* и с наклоном $5^0/_{00}$ при встречном порывистом ветре ($u=60$ *км/час*). Ответ 24 528 800 *кг/м*.

17. Тело заданной формы и размеров (в силу чего можно считать известным коэффициент $K\alpha A$, п. 22 предыдущей главы) брошено вертикально вверх. Предполагая энергию заданной и равной Q, определить массу, которую должно иметь тело, чтобы достигнуть максимальной высоты[2]).

Очевидно, надо принять во внимание сопротивление воздуха, так как иначе можно было бы сделать высоту какой угодно, уменьшая неограниченно массу.

18. В прямом круговом движении, изученном в п. 36, гл. I, рассмотреть точку Q, расположенную на вертикали над точкой O, на расстоянии $OQ=l/e$ (и поэтому находящуюся внутри круга, поскольку $e>1$) и доказать, что всякая хорда, проходящая через Q, делит окружность на две дуги, пробегаемые движущейся точкой в равные промежутки времени.

19. Исследовать движение математического маятника, принимая во внимание сопротивление, пропорциональное квадрату скорости. Дифференциаль-

---

[1]) Cavalli, Meccanica applicata alle macchine, Napoli, Trani, 1908, стр. 84.
[2]) См. Lecornu, Dynamique appliquée 2-е изд., т. I, Париж, 1921, стр. 264—272.

ное уравнение движения в этом случае будет типа $m\ddot{s} = Av^2 + B$, рассмотренного в п. 48, гл. I.

20. Изучить циклоидальное движение (п. 42, гл. I), принимая во внимание сопротивление, пропорциональное квадрату скорости, или же сопротивление трения. В случае с трением доказать, что существует с той и другой стороны от вершины M положение таутохронности, т. е. такая точка N, которую тяжелая точка, начинающая двигаться без начальной скорости из любого более высокого положения (расположенного с той же стороны, что и N, по отношению к M), достигает за одно и то же время. Исследовать движение в соответствии с общими выводами § 8.

21. Исследовать движение без трения по однородной цепной линии (т. I, гл. XIV, п. 50):

а) тяжелой точки,

б) точки, притягиваемой основанием с силой, пропорциональной расстоянию.

22. При свободном колебании груза на пружине (m есть масса, msk — восстанавливающая сила, $-2mh\dot{s}$ — пассивное сопротивление, при $k > h^2$; см. п. 58) полная энергия (кинетическая энергия + упругая потенциальная энергия) $E = m(\dot{s}^2 + ks^2)/2$ неограниченно убывает с течением времени.

Проверить это, вычислив производную dE/dt и показав, что $dE/dt < 0$ (*рассеяние энергии*).

23. Если к нижнему концу упругой нити с закрепленным верхним концом подвесить груз mg, то нижний конец будет колебаться вдоль вертикали в течение некоторого времени, после чего система примет некоторое положение равновесия. Обозначить удлинение через s. Подвешенное тело подвергается действию упругой силы ks (направленной вертикально вверх), где k есть коэффициент упругости (коэффициент жесткости) нити. Статическое влияние веса выражается в том, что определяет (статическое) удлинение mg/k (п. 61).

Рассматривая то колебание, которое получится, если мы предоставим тело самому себе без начальной скорости и в том положении, когда нить находится в естественном состоянии, располагаясь по вертикали, показать, что максимум удлинения (динамического), если отвлечься от пассивных сопротивлений, равен удвоенному статическому удлинению mg/k. Если же принять во внимание также и вязкое сопротивление $-2mh\dot{s}$, то максимум динамического удлинения равен произведению статического удлинения на $1 + e^{-h\pi/\omega}$, где, как обычно, $\omega^2 = k - h^2$.

24. Пружина, модуль упругости которой k, растянута силой Q и находится в равновесии. Показать, что если направление силы изменить на противоположное, то максимальное сжатие, происходящее вследствие этого, будет равно утроенному начальному удлинению. Пассивными сопротивлениями при этом пренебрегают.

25. Материальная точка (массы 1), движущаяся по заданной траектории, притягивается к началу с силой, равной $\omega^2 s$, и испытывает сопротивление среды, пропорциональное квадрату скорости, с очень малым множителем пропорциональности ε, т. е. таким, квадратом которого можно пренебречь. Уравнение движения есть $\ddot{s} \pm \varepsilon\dot{s}^2 + \omega^2 s = 0$, причем знак у ε выбирается обратный знаку $\dot{s}$.

Из уравнения живых сил следует, что энергия движущейся точки $E = (\dot{s}^2 + \omega^2 s^2)/2$ за любой интервал времени от t_0 до t_1 уменьшается на

$\varepsilon\int\limits_{t_0}^{t_1}\dot{s}^3dt$. Пренебрегая величиной ε^2, можно подставить под знак интеграла вместо $\dot{s}$ то значение этой величины, которое она имеет при $\varepsilon=0$ и которое соответствует гармоническому движению $s=r\cos(\omega t+\theta_0)$ при постоянных r и θ_0.

При полном колебании s не возвращается к своему начальному значению s_0 и получает значение s_1, немного меньшее s_0. Показать, что если принять величину $\Delta s=s_1-s_0$ за величину первого порядка и, следовательно, вместо $s_1^2-s_0^2$ величину $2s_0\cdot\Delta s$, то получится $\Delta s=-4\varepsilon s_0^2/3$.

26. Изложить теорию индикатора Уатта[1]).

27. Вычислить энергию, необходимую для одного периода вынужденного синусоидального колебания при условиях п. 62. Исследовать изменение ее при изменении частоты.

28. Исследовать вынужденные колебания в предположении, что возмущающая сила $Q(t)$ является затухающей синусоидальной, т. е. вида $Q(t)=qe^{-bt}\sin pt$, где b, pq — положительные постоянные.

29. Точка массы m удерживается на гладкой кривой c, которая движется, как неизменяемая система, по заданному закону. Если обозначить через $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{R}$ приложенную к точке силу и реакцию связи и принять во внимание теорему Кориолиса (т. I, гл. IV, п. 3), в силу которой $\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_\tau+\boldsymbol{a}_r+2\boldsymbol{a}_c$, то основное уравнение можно написать в виде

$$m\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{F}'+\boldsymbol{R}-2m\boldsymbol{a}_c,$$

где $\boldsymbol{F}'$ представляет собой результирующую силы $\boldsymbol{F}$ и силы инерции переносного движения $-m\boldsymbol{a}_\tau$. Доказать, что уравнение движения точки по кривой c при очевидном значении символов будет $m\ddot{s}=F'_t$, т. е. что отличие от случая неподвижной опоры (заданной траектории) состоит в том, что вместо активной силы подставляется результирующая этой силы и силы инерции переносного движения системы.

Предполагая, что прямо приложенная сила является позиционной (зависящей только от положения) и что c равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси, доказать, что теорема живых сил дает $\frac{m\dot{s}^2}{2}-U(s)-\frac{m\omega^2r^2}{2}=\text{const}$, где U имеет значение, указанное в п. 12, гл. I, а r означает расстояние движущейся точки от оси, вообще говоря, изменяющееся вместе с s. Этот результат, в частности, представляет интерес для теории гидравлических турбин[2]).

---

[1]) См. Lecornu, цит. на стр. 78 соч., т. I, стр. 353.

[2]) Müller—Prange, Allgemeine Mechanik, Hannover, 1923, стр. 211