

измерителем разности частот, то при помощи формулы (4) мы найдем линейную (окружную) скорость и, следовательно, скорость вращения звезды.

Тут уместно вспомнить анекдотичный случай с одним Физиком, автомобиль которого остановил Полисмен за движение на красный свет. Физик объяснил, что при сближении со светофором красный свет кажется зеленым. Зная характерные длины волн для этих участков спектра ($\lambda_{кр} \approx 0,65$ мкм, $\lambda_{зел} \approx 0,55$ мкм), по формуле (3) можно рассчитать или по формуле (4) оценить эту скорость сближения – она более ста миллионов километров в час! Поэтому Полисмен все-таки оштрафовал Физика – за превышение скорости в городе. (Полисмен всегда прав.)

Эффект Доплера сыграл большую роль в космологии. Астрономические наблюдения показали, что чем дальше находится галактика, тем больше ее излучение сдвинуто в красную сторону спектра («красное смещение») и, значит, тем быстрее она удаляется от нас: $v = Hr$. Это выражение получило имя *закона Хаббла*, а коэффициент пропорцио-

нальности H – постоянной Хаббла. Картина похожа на разлет осколков при сильном взрыве. Так появилось понятие Большого Взрыва – исходной точки нашей Вселенной. В настоящее время постоянная Хаббла принимается равной приблизительно 50 км/с на миллион парсеков. Поскольку 1 парсек $\approx 3 \cdot 10^{13}$ км, то $H \approx 2 \cdot 10^{-18} \text{ с}^{-1}$. Обратная H величина не случайна – это время: $1/H = \tau_H \approx 5 \cdot 10^{17} \text{ с} \approx 20$ млрд. лет. И оно имеет определенное отношение к возрасту Вселенной, а будучи умноженным на скорость света, дает оценку современного размера Вселенной: $R \sim t_H c \sim 10^{26}$ м.

Так эффект Доплера позволил добраться до самого начала Мира. Почему же древние физики умалчивают о нем (хотя они ближе к Большому Взрыву). Конечно, не только потому, что Доплер тогда еще не родился. По-видимому, это связано с тем, что в то время не было достаточно больших скоростей передвижения, которые позволили бы обнаружить этот эффект. А с лошади что возьмешь?..

Кинематика и векторы

В. ПЛИС

ОБСУДИМ ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РАБОТЫ С ВЕКТОРНЫМИ СООТНОШЕНИЯМИ В КИНЕМАТИКЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПРОИЛЛЮСТРИРУЕМ ИХ НА ПРИМЕРАХ РАВНОМЕРНОГО И РАВНОПЕРЕМЕННОГО ДВИЖЕНИЙ.

Равномерное движение

Известно, что при равномерном движении скорость \vec{v} материальной точки остается постоянной и равной начальной скорости \vec{v}_0 , а перемещение

$$\vec{s}(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t$$

за время от 0 до t сонаправлено с вектором \vec{v}_0 и пропорционально ему по величине (здесь \vec{r} – радиус-вектор материальной точки).

Задача 1. *Сверхзвуковой самолет летит горизонтально. Два микрофона, находящиеся на одной вертикали на расстоянии d друг от друга, зарегистрировали приход звука от самолета с запаздыванием по времени, равным τ . Найдите величину v скорости самолета. Скорость звука в воздухе c .*

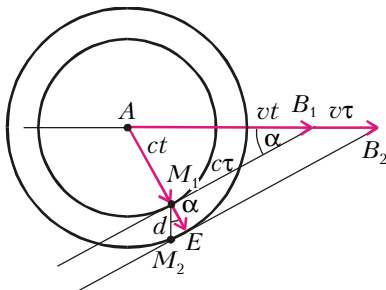


Рис. 1

Обратимся к рисунку 1, иллюстрирующему последовательные перемещения сверхзвукового самолета (источника звука) и фронта звуковой волны (огibaющей вторичных волн). Пусть при пролете самолета через точку A в атмосфере

возбуждается звуковая волна, и через некоторое время t волновое возмущение достигает первого микрофона M_1 . В этот момент времени самолет находится в точке B_1 , и прямая B_1M_1 определяет положение волнового фронта. За последующий промежуток времени τ самолет перемещается в точку B_2 , а волновой фронт, двигаясь со скоростью c , перемещается в положение B_2EM_2 . Проанализировав кинематику перемещений самолета и волнового фронта, находим:

из прямоугольного треугольника AB_1M_1

$$\sin \alpha = \frac{AM_1}{AB_1} = \frac{ct}{vt} = \frac{c}{v},$$

из прямоугольного треугольника M_1M_2E

$$\cos \alpha = \frac{c\tau}{d}.$$

Исключая α из полученных соотношений, получаем

$$v = c \sqrt{1 - \frac{(c\tau)^2}{d^2}}.$$

Задача 2. *Две частицы 1 и 2 движутся с постоянными скоростями \vec{v}_1 и \vec{v}_2 , их радиусы-векторы в начальный момент времени равны \vec{r}_{01} и \vec{r}_{02} соответственно. При каком соотношении между этими четырьмя векторами частицы испытают столкновение друг с другом?*

По условию, частицы в лабораторной системе отсчета движутся равномерно, их радиусы-векторы зависят от времени по законам

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_{01} + \vec{v}_1 t, \quad \vec{r}_2(t) = \vec{r}_{02} + \vec{v}_2 t.$$

Перейдем в систему отсчета, связанную с первым телом и движущуюся поступательно относительно лаборатории. В этой системе положение точки 2 в любой момент времени определяется вектором

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t) = \left(\vec{r}_{02} - \vec{r}_{01} \right) + \left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1 \right) t. \quad (*)$$

Отсюда следует, что в подвижной системе отсчета точка 2 движется по прямой, проходящей через начальное положение точки, определяемое равенством $\vec{r}'_0 = \vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}$, а направляющим вектором прямой является относительная скорость $\vec{v}' = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Рисунок 2 наглядно иллюстрирует приведенные соотношения.

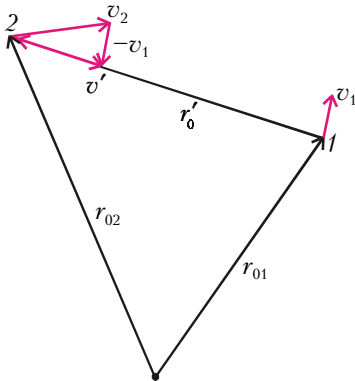


Рис. 2

При произвольных абсолютных скоростях v_1 и v_2 соотношение (*) описывает пучок прямых, проходящих через начальную точку. И только одна из этих прямых проходит через начало отсчета подвижной системы. Это происходит в том случае, когда векторы \vec{r}'_0 и \vec{v}' анти-

параллельны, т.е. соответствующие единичные векторы имеют противоположные знаки:

$$\frac{\vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}}{|\vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}|} = - \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_2}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}.$$

Равноперемнное движение

Как известно, в этом случае зависимости скорости и перемещения от времени имеют вид

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} t,$$

$$\vec{s}(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2},$$

где $\vec{a} = \text{const}$ – ускорение.

Среди всевозможных случаев равноперемнного движения особое место занимает движение под действием гравитационных сил – свободное падение тел в однородном поле тяжести с постоянным ускорением $\vec{a} = \vec{g}$. Зависимость вектора скорости от времени при свободном падении иллюстрирует рисунок 3. Из соотношения для перемещения следует,

что при свободном падении вектор перемещения материальной точки за время от 0 до t равен сумме

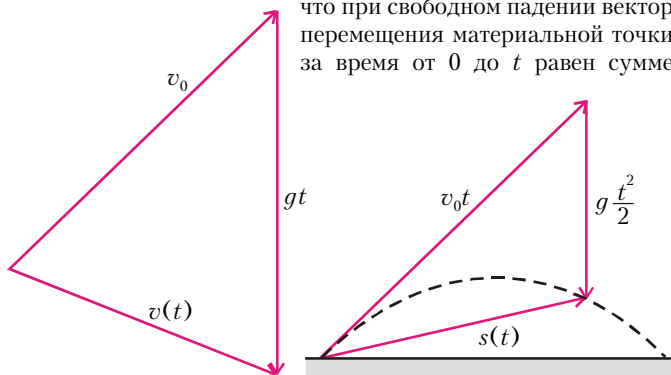


Рис. 3

Рис. 4

векторов $\vec{v}_0 t$ и $\frac{\vec{g} t^2}{2}$ (рис.4). Это означает, в частности, что движение тела, брошенного под углом к горизонту, есть суперпозиция равномерного прямолинейного движения со скоростью \vec{v}_0 и свободного падения в однородном поле тяжести с нулевой начальной скоростью.

Задача 3. Мышонок стреляет из рогатки “точно” в кот, сидящего на ветке дерева. (Вектор начальной скорости камня направлен на кота). Через $t = 1$ с камень падает на землю в точку, находящуюся на одной вертикали с котом. На какой высоте H находился кот? Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

Перемещение камня за время полета t равно

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}$$

(считаем $\vec{r}_0 = \vec{0}$). Изобразим эти векторы на рисунке 5. Отсюда получаем

$$H = \frac{g t^2}{2} = 5 \text{ м}.$$

Если бы гравитационные силы не действовали на камень, то через $t = 1$ с он действительно попал бы в кота.

Заметим, что перемещение камня, брошенного под углом к горизонту, можно представить также в виде полусуммы начальной \vec{v}_0 и конечной $\vec{v}(t)$ скоростей, умноженной на время t :

$$\vec{s}(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2} = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}_0 + \vec{g} t}{2} t = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}(t)}{2} t.$$

Задача 4. Мышонок стреляет из рогатки в кот, сидящего на ветке дерева. Через $t = 1$ с камень попадает в ветку прямо у лап кота. На каком расстоянии s от мышонка находился кот, если известно, что векторы \vec{v}_0 и $\vec{v}(t)$ взаимно перпендикулярны? Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

Искомое расстояние есть абсолютная величина (модуль) вектора перемещения камня за время полета t :

$$s = \left| \vec{s}(t) \right| = \left| \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}(t)}{2} \right| t.$$

В момент времени t вектор скорости $\vec{v}(t)$ перпендикулярен вектору \vec{v}_0 и равен $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g} t$ (рис.6). Диагонали изображенного на рисунке 6 прямоугольника равны

$$\left| \vec{v}_0 + \vec{v}(t) \right| = \left| \vec{v}(t) - \vec{v}_0 \right| = \left| \vec{g} t \right| = g t.$$

Тогда искомое расстояние будет равно

$$s = \frac{g t^2}{2} \approx 5 \text{ м}.$$

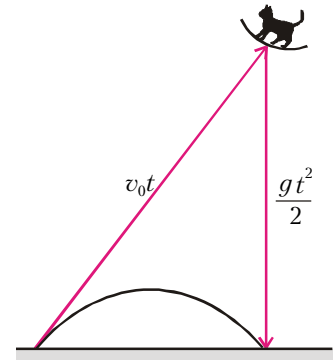


Рис. 5

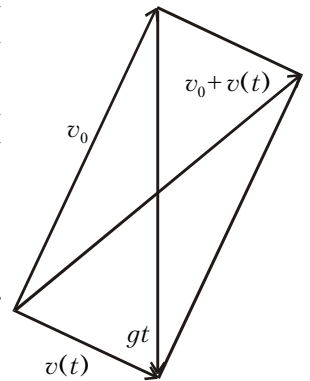


Рис. 6

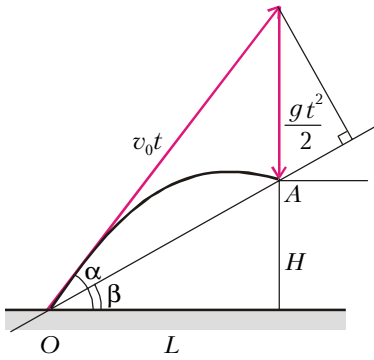


Рис. 7

Задача 5. На крышу дома высотой H с расстояния L от него мальчик хочет забросить мяч. При какой минимальной скорости $v_{0\min}$ это возможно? Под каким углом α_* следует в этом случае бросить мяч? Ускорение свободного падения равно g . Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

Через точки старта и окончания полета (рис.7) проведем прямую OA , которая образует угол β с горизонтальной прямой. Перемещение мяча за время полета t равно

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}$$

(считаем $\vec{r}_0 = \vec{0}$). Как видим, проекции векторов $\vec{v}_0 t$ и $\vec{g} t^2/2$ на направление нормали к прямой OA равны:

$$v_0 t \sin(\alpha - \beta) = \frac{g t^2}{2} \cos \beta,$$

откуда находим продолжительность полета мяча:

$$t = \frac{2v_0 \sin(\alpha - \beta)}{g \cos \beta}.$$

Далее, из рисунка 7 следует, что алгебраическая сумма проекций векторов $\vec{v}_0 t$ и $\vec{g} t^2/2$ на прямую OA равна расстоянию от точки старта до точки окончания полета:

$$\sqrt{H^2 + L^2} = v_0 t \cos(\alpha - \beta) - \frac{g t^2}{2} \sin \beta.$$

С учетом выражения для времени полета последнее соотношение перепишем в виде

$$\sqrt{H^2 + L^2} = \frac{v_0^2}{g \cos^2 \beta} (\sin(2\alpha - \beta) - \sin \beta).$$

Наименьшему значению начальной скорости соответствует угол бросания α_* такой, при котором множитель в скобках в последнем соотношении принимает наибольшее значение:

$$\sin(2\alpha_* - \beta) = 1, \quad 2\alpha_* - \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_* = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}.$$

Тогда

$$v_{0\min}^2 = g \sqrt{H^2 + L^2} \frac{\cos^2 \beta}{1 - \sin \beta}.$$

С учетом равенства $\text{tg} \beta = H/L$ получаем

$$v_{0\min}^2 = g \left(\sqrt{H^2 + L^2} + H \right),$$

и окончательно

$$v_{0\min} = \sqrt{g \left(\sqrt{H^2 + L^2} + H \right)}.$$

Задача 6. Из точек A и B , находящиеся на одной горизонтальной прямой, одновременно бросили два камня с одинаковыми по модулю скоростями $v_0 = 20$ м/с. Один из

камней полетел по навесной траектории, другой – по настильной, но каждый попал в точку старта другого камня. Известно, что в точке A угол бросания $\alpha = 75^\circ$. Через какое время τ после старта расстояние между камнями станет минимальным? Чему равно это расстояние?

Рассмотрим полет камня, брошенного из точки A . Повторяя построения, выполненные в начале решения предыдущей задачи (с учетом того, что точки начала и окончания полета лежат на одной горизонтальной прямой), находим продолжительность полета:

$$t = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha$$

и расстояние между точками A и B :

$$L = v_0 t \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Аналогично, для камня, брошенного из точки B :

$$L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\beta.$$

Сравнивая выражения для L , получаем

$$\sin 2\alpha = \sin 2\beta,$$

или, поскольку по условию $2\alpha + 2\beta = \pi$,

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Далее, выберем в качестве тела отсчета камень, вылетевший из точки A , и свяжем с ним систему отсчета, движущуюся поступательно относительно лаборатории. Скорость второго камня в этой системе \vec{u} найдем из правила сложения скоростей:

$$\vec{u} = \vec{v}_2(t) - \vec{v}_1(t) = \left(\vec{v}_{02} + \vec{g} t \right) - \left(\vec{v}_{01} + \vec{g} t \right) = \vec{v}_{02} - \vec{v}_{01},$$

т.е. в подвижной системе второй камень движется равномерно и прямолинейно со скоростью

$$\vec{u} = \vec{v}_{02} - \vec{v}_{01},$$

равной начальной относительной скорости. Так как $\vec{v}_{02} \perp \vec{v}_{01}$ и $v_{01} = v_{02} = v_0$,

вектор \vec{u} есть диагональ

Рис. 8

квадрата, построенного на векторах \vec{v}_{02} и $-\vec{v}_{01}$, поэтому $u = \sqrt{2}v_0$.

Обратимся к рисунку 8, иллюстрирующему относительное движение. Из рисунка находим кратчайшее расстояние между камнями – длину катета AC в прямоугольном треугольнике ACB , где угол при вершине B равен $\delta = \alpha - 45^\circ = 30^\circ$:

$$AC = L \sin \delta = \frac{L}{2} = 10 \text{ м}.$$

Максимальное сближение камней произойдет в момент времени

$$\tau = \frac{AC}{u \text{tg} \delta} \approx 0,6 \text{ с}.$$

Задача 7. С горизонтальной поверхности земли бросили мяч, и он упал на землю со скоростью $v = 9,8$ м/с под углом $\beta = 30^\circ$ к горизонту. Величина вертикальной составляющей скорости в точке бросания на 20% больше, чем в точке падения. Найдите продолжительность t полета. Считайте силу сопротивления пропорциональной скорости мяча:

$\vec{F}_c = -k\vec{v}$ ($k > 0$). Ускорение свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

Ускорение мяча в любой момент времени определяется силой тяжести и силой сопротивления:

$$\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{g} - \frac{k}{m} \vec{v},$$

где m – масса мяча. Найдем приращение скорости мяча за любой элементарный промежуток времени Δt :

$$\Delta \vec{v} = \left(\vec{g} - \frac{k}{m} \vec{v} \right) \Delta t$$

и за время полета t :

$$\vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \sum \left(\vec{g} - \frac{k}{m} \vec{v} \right) \Delta t = \vec{g}t - \frac{k}{m} \sum \vec{v} \Delta t = \vec{g}t - \frac{k}{m} \vec{s}(t).$$

По условию, перемещение мяча $\vec{s}(t) = \sum \vec{v} \Delta t$ за время полета – это горизонтальный вектор. Переходя в полученном соотношении к проекциям векторов на вертикальную ось, получаем

$$t = \frac{2,2v \sin \beta}{g} = 1,1 \text{ с.}$$

В заключение отметим, что кинематические соображения позволяют решать не только задачи физики. Например, при решении геометрических задач бывает полезно представить себе, что будет происходить с элементами рассматриваемой фигуры, если некоторые ее точки начнут двигаться.

Задача 8. Некто узнал, что в местности, где зарыт клад, растут три дерева: дуб, сосна и береза. Для того чтобы найти клад, следует стать под березой (точка B на рисунке 9) лицом к прямой, проходящей через дуб (точка D) и сосну (точка C), при этом дуб должен оказаться справа, а сосна слева. Затем следует пойти к дубу, считая шаги. Дойдя до дуба, повернуть под прямым углом направо и

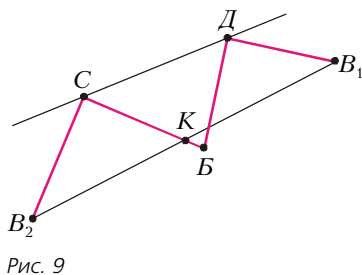


Рис. 9

пройти столько же шагов, сколько было пройдено от березы до дуба. В этом месте остановиться и поставить вешку (точка B_1). Затем следует вернуться к березе и пойти к сосне, считая шаги. Дойдя до сосны, повернуть под прямым углом налево, и пройти столько же шагов, сколько было пройдено от березы до сосны. В этом месте остановиться и поставить вешку (точка B_2). Клад зарыт точно посередине между вешками (точка K).

При такой подробной инструкции отыскание клада не могло вызвать затруднений. Однако они все-таки возникли. Дело в том, что когда кладоискатель попал в указанную местность, он обнаружил там только дуб и сосну. Березы же не было и в помине. И все же он нашел клад. Как ему это удалось сделать?

Представим себе, что точка B начала двигаться, и пусть \vec{v} – вектор ее мгновенной скорости. Так как длины отрезков DB_1 и DB равны и отрезок DB_1 получается из отрезка DB поворотом на угол $\pi/2$, то точка B_1 будет двигаться согласованно с точкой B , а именно так, что вектор \vec{v}_1 ее скорости будет

получаться из вектора \vec{v} поворотом на угол $\pi/2$. Аналогично, вектор \vec{v}_2 скорости точки B_2 будет получаться из \vec{v} поворотом на угол $-\pi/2$. Поэтому $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$. Следовательно, при произвольном движении точки B скорость точки K

$$\vec{v}_K = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}$$

всегда равна нулю: точка K неподвижна, и ее положение не зависит от положения точки B ! Чтобы найти теперь положение точки K , достаточно выбрать одно любое положение точки B . Например, совместить точку B с точкой C и применить построение, известное кладоискателю.

Упражнения

1. Самолет, летящий горизонтально на постоянной высоте с постоянной скоростью v , большей скорости звука c , в некоторый момент времени пролетает над наблюдателем. Какой угол α с вертикалью составляет направление на самолет, определяемое по звуку в тот момент, когда истинное (видимое) направление от наблюдателя на самолет составляет с вертикалью угол φ ?

2. Стрелок и мишень находятся в диаметрально противоположных точках карусели радиусом $R = 5 \text{ м}$, равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси. Период вращения карусели $T = 10 \text{ с}$. Под каким углом α к диаметру карусели должен целиться стрелок, чтобы поразить мишень? Скорость пули $v = 300 \text{ м/с}$.

3. По пересекающимся под углом α прямым дорогам едут с постоянными скоростями \vec{v}_1 и \vec{v}_2 две машины. Когда первая машина проезжает перекресток, вторая находится на расстоянии L от перекрестка и приближается к нему. Определите наименьшее расстояние L_{\min} между машинами при дальнейшем движении. Через какое время τ расстояние между машинами будет наименьшим?

4. Гимнаст в цирке прыгает с подкидного трамплина и через $t = 1,2 \text{ с}$ приземляется на расстоянии $L = 6 \text{ м}$ от трамплина. Точка приземления и трамплин расположены на одной горизонтальной прямой. Определите величину v_0 начальной скорости и угол α наклона вектора \vec{v}_0 к горизонтальной плоскости. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

5. Найдите максимальную высоту ограды H_{\max} , через которую вы могли бы перекинуть снежок, находясь на расстоянии $l = 20 \text{ м}$ от нее. В расчетах используйте свои рекордные возможности по метанию снежков на дальность. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

6. Два жонглера, стоящие на горизонтальной площадке на расстоянии L друг от друга, перекидываются мячами, бросая их одновременно. С какой по величине скоростью v_{02} и под каким углом β к горизонту был брошен второй мяч, если он попал в первый, когда тот достиг максимальной высоты? Первый жонглер бросил мяч с начальной скоростью v_{01} под углом α к горизонту. Ускорение свободного падения равно g . Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

7. За время полета мяча, брошенного мальчиком под углом к горизонту, горизонтальная составляющая скорости мяча уменьшилась на 12%, и он упал на землю на расстоянии $s_1 = 14 \text{ м}$. Когда мяч был брошен под тем же углом к горизонту со скоростью на 20% больше, чем в первом случае, горизонтальная составляющая скорости мяча уменьшилась на 15%. На каком расстоянии s_2 от мальчика упал мяч в этом случае? Считайте силу сопротивления пропорциональной скорости мяча: $\vec{F}_c = -k\vec{v}$ ($k > 0$). Опыты проводятся на горизонтальной поверхности.