

## ГЛАВА IV

# ТВЕРДОЕ ТЕЛО

### § 22. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Как мы видели в начале § 7, твердое тело имеет *шесть степеней свободы*: *три степени свободы поступательного движения и три степени свободы вращательного движения*.

Рассмотрим тело в двух различных положениях — в «начальном» и в «конечном». Выберем произвольную точку тела  $O$  в качестве «начала отсчета» и вокруг этой точки опишем сферу (например, единичного радиуса). На поверхности сферы отметим две точки  $A$  и  $B$ . Если перевести три точки  $O$ ,  $A$  и  $B$  из их начального положения в конечное, то и все точки твердого тела перейдут из начального положения в конечное.

Сначала мы перенесем начало отсчета  $O$  из начального положения  $O_1$  в конечное положение  $O_2$ . Осуществим это путем параллельного переноса, при котором каждая точка тела испытывает прямолинейное перемещение на отрезок  $O_1O_2$ . Этим мы и определили три степени свободы поступательного движения.

Итак, мы совместили сферу  $K_1$ , описанную вокруг точки  $O_1$ , со сферой  $K_2$ , описанной вокруг точки  $O_2$ ; но это, вообще говоря, отнюдь не означает совпадения начальных и конечных положений точек  $A$  и  $B$  ( $A_1$  и  $B_1$  на поверхности сферы  $K_1$  и, соответственно,  $A_2$  и  $B_2$  на поверхности  $K_2$ ). Мы покажем, что эти точки могут быть переведены из положения  $A_1, B_1$  в положение  $A_2, B_2$  с помощью вполне определенного поворота вокруг точки  $O_1 = O_2$ . Положение соответствующей оси вращения и угол поворота определяют три степени свободы вращательного движения.

Чтобы построить ось вращения, т. е. найти точку  $\Omega$  пересечения ее с поверхностью сферы, соединим дугами больших кругов точки  $A_1$  и  $A_2$  и соответственно точки  $B_1$  и  $B_2$ ; точка пересечения дуг, проведенных

через середины дуг  $A_1A_2$  и  $B_1B_2$  перпендикулярно к ним, и будет искомой точкой  $\Omega$ . Тогда угол поворота, который мы обозначим через  $\Omega$ , будет:

$$\Omega = \sphericalangle A_1\Omega A_2 = \sphericalangle B_1\Omega B_2. \quad (22.1)$$

Равенство этих углов вытекает из равенства (по трем соответственным сторонам) двух заштрихованных на рис. 39 сферических треугольников  $A_1\Omega B_1$  и  $A_2\Omega B_2$ . Поэтому равны между собой также и два угла, обозначенные на рис. 39 через  $\gamma$ . Вычитая из полного угла  $A_1\Omega B_2$  поочередно эти углы  $\gamma$ , получим правую и левую части равенства (22.1). Это равенство показывает, что с помощью одного и того же поворота  $\Omega$  не только точка  $A_1$  приводится в положение  $A_2$ , но и точка  $B_1$  — в положение  $B_2$ .

Ввиду произвольного выбора начала отсчета  $O$ , величина и направление поступательного перемещения могут изменяться в широких пределах<sup>1</sup>. Напротив, величина угла поворота и направление оси вращения не зависят от выбора начала отсчета. В самом деле: если мы выберем в качестве начала отсчета не точку  $O$ , а какую-либо другую точку  $O'$ , то разность между поступательными перемещениями, соответствующими точкам  $O$  и  $O'$ , будет опять-таки поступательным перемещением. Последнее, однако, совершенно не изменяет положения точек  $A$  и  $B$  на сферах  $K_1$  и  $K_2$ . Таким образом, построение, представленное на рис. 39, остается неизменным; угол поворота  $\Omega$  сохраняет прежнюю величину, а новая ось вращения, проходящая теперь через новое начало отсчета  $O'$ , параллельна прежней оси вращения.

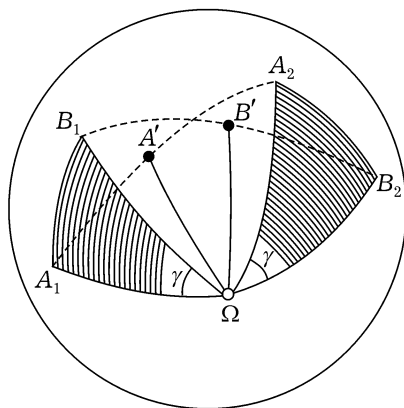


Рис. 39. Построение оси вращения и угла поворота  $\Omega$  при сложении двух конечных вращений

<sup>1</sup>В добавлении к § 23 мы увидим, в частности, что направление поступательного движения можно выбрать, параллельным оси вращения. В этом случае говорят о «винте».

Более важными, чем рассмотренные до сих пор *конечные* движения твердого тела, являются следующие друг за другом (фактически непрерывно) *бесконечно малые* движения твердого тела. Таким образом, мы предположим теперь, что поступательное перемещение  $O_1O_2$  и угол поворота  $\Omega$  как угодно малы, и разделим их на соответствующий малый промежуток времени  $\Delta t$ . Тогда в пределе при  $\Delta t \rightarrow 0$  мы получим линейную скорость поступательного движения  $\mathbf{u}$  и угловую скорость вращения  $\boldsymbol{\omega}$ :

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{O_1O_2}}{\Delta t}, \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{\overrightarrow{\Omega}}{\Delta t}. \quad (22.2)$$

$\boldsymbol{\omega}$  также не зависит от выбора начала отсчета  $O$ , тогда как  $\mathbf{u}$  существенно от него зависит. Мы рассматриваем угловую скорость как *вектор*, т. е. учитываем не только ее величину, но также и направление оси вращения, соответствующей этой угловой скорости.

Покажем, что угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}$  действительно имеет *векторный характер*. Рассматривая виртуальный поворот, мы [см. рис. 15 и уравнение (13.4)] вывели следующее соотношение:

$$\delta \mathbf{s} = [\delta \vec{\varphi} \cdot \mathbf{r}]. \quad (22.3)$$

Переходя от виртуального поворота  $\delta \vec{\varphi}$  к угловой скорости вращения  $\boldsymbol{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$  и от вызванного этим поворотом виртуального перемещения  $\delta \mathbf{s}$  к скорости  $\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{s}}{dt}$ , получаем из соотношения (22.3):

$$\mathbf{w} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]. \quad (22.4)$$

Здесь, как и на рис. 15,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из расположенного на оси вращения начала отсчета  $O$  в точку  $P$  скорости которой  $\mathbf{w}$

определяется этой формулой.

Рассмотрим одновременные или следующие непосредственно друг за другом воздействия двух вращений  $\boldsymbol{\omega}_1$  и  $\boldsymbol{\omega}_2$  на одну и ту же точку  $P$  твердого тела (начало отсчета  $O$  является общим для осей обоих вращений  $\boldsymbol{\omega}_1$  и  $\boldsymbol{\omega}_2$ ). Мы имеем:

$$\mathbf{w}_1 = [\boldsymbol{\omega}_1 \mathbf{r}], \quad \mathbf{w}_2 = [\boldsymbol{\omega}_2 \mathbf{r}].$$

В последнем из этих уравнений слева стоит результирующая линейная скорость  $\mathbf{w}_r = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ . Из сравнения с уравнением (22.4) видно, что

$$\boldsymbol{\omega}_r = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \quad (22.5)$$

также является результирующей угловой скоростью такого вращения, действие которого на твердое тело эквивалентно действию обоих вращений  $\boldsymbol{\omega}_1$  и  $\boldsymbol{\omega}_2$ . Таким образом, *угловые скорости вращения складываются как векторы и при сложении их можно менять местами*, т. е.

$$\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_1. \quad (22.6)$$

Оба последних утверждения не имеют места для рассмотренных ранее конечных поворотов, сложение которых происходит *не* по простым правилам векторного исчисления, а по правилам введенного Гамильтоном *исчисления кватернионов*. Результат сложения двух конечных поворотов зависит от их последовательности, т. е. *их нельзя менять местами*.

Здесь будет уместно рассмотреть разницу между *полярными* и *аксиальными* векторами.

*Полярными* векторами являются, например, скорость, ускорение, сила, радиус-вектор и т. д. Они наглядно изображаются направленными отрезками со стрелкой на конце. Их прямоугольные слагающие преобразуются при *вращении системы координат* как сами координаты, т. е. по схеме ортогонального преобразования (определитель = +1). При *инверсии координатной системы* (замена  $x, y, z$  на  $-x, -y, -z$ , определитель = -1) слагающие изменяют свои знаки на противоположные.

*Аксиальными* векторами являются, например, угловая скорость, угловое ускорение, момент силы, момент импульса. Они изображаются при помощи соответствующей оси с указанием направления и величины вращения. Если же мы хотим изобразить их с помощью отложенной на этой оси стрелки соответствующей длины, то мы должны вполне произвольно условиться относительно направления стрелки, например, установить правило правого винта. Прямоугольные слагающие аксиального вектора преобразуются при чистом *вращении системы координат* так же, как и слагающие соответствующей стрелки, т. е. ортогонально<sup>1</sup>; однако *при инверсии* системы координат они *не* изменяют своих знаков.

<sup>1</sup>С определителем преобразования = +1. (Прим. ред.)

В этом случае правило правого винта должно быть заменено правилом левого винта, и наоборот, — в соответствии с тем, что правая система координат переходит при инверсии в левую систему координат.

Векторное произведение двух полярных векторов будет аксиальным вектором (п р и м е р: момент силы). Векторное произведение аксиального и полярного векторов будет полярным вектором [п р и м е р: скорость  $\mathbf{w}$  в уравнении (22.4)]. В этом можно легко убедиться, рассмотрев поведение этих векторных произведений при инверсии системы координат<sup>1</sup>.

После этого отступления вернемся к кинематике твердого тела. Движение каждой из его точек складывается из поступательного движения со скоростью  $\mathbf{u}$  [уравнение (22.2)] и вращательного движения, которому соответствует линейная скорость  $\mathbf{w}$  [уравнение (22.4)]. Таким образом, скорость  $\mathbf{v}$  произвольной точки твердого тела равна

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]. \quad (22.7)$$

При этом выбор начала отсчета  $O$  совершенно произволен: для этой точки имеет место

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}. \quad (22.7a)$$

Часто, однако, бывает удобно, чтобы начало отсчета  $O$  совпадало с центром тяжести  $S$  тела. Выясним это на при мере вычисления ки-

---

<sup>1</sup>Все эти свойства векторного произведения непосредственно вытекают из его определения. По определению, компоненты векторного произведения  $\mathbf{C} = [\mathbf{A}\mathbf{B}]$  вдоль координатных осей прямоугольной системы координат даются следующими выражениями:

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y; \quad C_y = A_z B_x - A_x B_z; \quad (IV.1)$$

$$C_z = A_x B_y - A_y B_x, \quad (IV.2)$$

независимо от того, применяем ли мы правую или левую систему координат. При вращении системы координат, как легко убедиться, эти выражения преобразуются как компоненты вектора. Если векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  полярные, то при инверсии системы координат их компоненты меняют знаки, а следовательно, величины  $C_x$ ,  $C_y$ ,  $C_z$  остаются без изменения. Поэтому, если изображать векторное произведение стрелкой, то при инверсии координатной системы необходимо изменять направление этой стрелки на противоположное. Если вектор  $\mathbf{A}$  полярный, а вектор  $\mathbf{B}$  аксиальный, то инверсия системы координат ведет к изменению знаков  $C_x$ ,  $C_y$ ,  $C_z$ ; в этом случае вектор  $\mathbf{C}$  полярный. Напротив, если оба вектора  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  аксиальные, то их векторное произведение — также аксиальный вектор. (Прим. ред.)

нетической энергии тела

$$T = \int \frac{dm}{2} \mathbf{v}^2. \quad (22.8)$$

Возведем выражение (22.7) в квадрат

$$v^2 = u^2 + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]^2 + (\mathbf{u}[\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]) \quad (22.8a)$$

и разобьем кинетическую энергию  $T$  на три части, соответствующие трем членам формулы (22.8a):

$$T = T_{\text{пост.}} + T_{\text{вращ.}} + T_{\omega}, \quad (22.9)$$

где  $T_{\omega}$  — «смешанная энергия», определяемая одновременно поступательным и вращательным движениями.

Поскольку скорость поступательного движения одинакова для всех элементов массы  $dm$ , то, очевидно,

$$T_{\text{пост.}} = \frac{u^2}{2} \int dm = \frac{m}{2} u^2. \quad (22.10)$$

Чтобы вычислить часть  $T_{\omega}$ , преобразуем ее выражение следующим образом:

$$T_{\omega} = \int [\mathbf{u}[\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]] dm = (\mathbf{u}[\boldsymbol{\omega} \int \mathbf{r} dm]) = m(\mathbf{u}[\boldsymbol{\omega} \mathbf{R}]). \quad (22.11)$$

Здесь  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор, проведенный из начала отсчета  $O$  в центр тяжести тела  $S$ . Он равен

$$\mathbf{R} = \frac{\int \mathbf{r} dm}{m}, \quad (22.11a)$$

как и в определении (13.36). Если же совместить точки  $O$  и  $S$ , то  $\mathbf{R} = 0$  и, согласно формуле (22.11),

$$T_{\omega} = 0. \quad (22.11b)$$

В этом случае — полная кинетическая энергия  $T$  будет простой суммой  $T_{\text{пост.}}$  и  $T_{\text{вращ.}}$ . Заметим, что если тело вращается вокруг неподвижной точки и мы примем ее за начало отсчета  $O$ , то в нуль обратится не только  $T_{\omega}$ , но и  $T_{\text{пост.}}$  (поскольку  $\mathbf{u} = 0$ ); таким образом,

$$T = T_{\text{вращ.}} \quad (22.11b)$$

Займемся теперь этой *вращательной частью кинетической энергии*. Возведя в квадрат слагающие вектора  $[\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}]$ , получим из среднего члена правой части уравнения (22.8а):

$$\begin{aligned} 2T_{\text{вращ.}} = & \omega_x^2 \int (y^2 + z^2) dm + \omega_y^2 \int (z^2 + x^2) dm + \\ & + \omega_z^2 \int (x^2 + y^2) dm - 2\omega_y \omega_z \int yz dm - \\ & - 2\omega_z \omega_x \int zx dm - 2\omega_x \omega_y \int xy dm. \end{aligned} \quad (22.12)$$

Если ввести обозначения

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{xx} &= \int (y^2 + z^2) dm \dots, \\ \Theta_{xy} &= \int xy dm \dots, \end{aligned} \right\} \quad (22.12a)$$

то выражение (22.12) примет вид

$$\left. \begin{aligned} 2T_{\text{вращ.}} = & \Theta_{xx}\omega_x^2 + \Theta_{yy}\omega_y^2 + \Theta_{zz}\omega_z^2 - 2\Theta_{yz}\omega_y\omega_z - \\ & - 2\Theta_{zx}\omega_z\omega_x - 2\Theta_{xy}\omega_x\omega_y. \end{aligned} \right\} \quad (22.12б)$$

Согласно определению (11.3), величина  $Q_{xx}$  является *моментом инерции тела относительно оси x*; соответственно,  $\Theta_{yy}$  и  $\Theta_{zz}$  являются моментами инерции того же тела относительно осей  $y$  и  $z$ . Величины  $\Theta_{xy}$ ,  $\Theta_{yz}$ ,  $\Theta_{zx}$  называются *центробежными моментами инерции*; их обозначают также терминами «*произведения инерции*» и «*девиационные моменты*». Вместо  $\Theta_{xx} \dots$  можно сокращенно писать  $\Theta_x \dots$ .

По аналогии с выражением (11.5), положим левую часть уравнения (22.12) равной  $\Theta\omega^2$  и введем обозначения

$$\frac{\omega_x}{\omega} = \alpha, \quad \frac{\omega_y}{\omega} = \beta, \quad \frac{\omega_z}{\omega} = \gamma. \quad (22.13)$$

Тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} \Theta = & \Theta_{xx}\alpha^2 + \Theta_{yy}\beta^2 + \Theta_{zz}\gamma - 2\Theta_{yz}\beta\gamma - \\ & - 2\Theta_{zx}\gamma\alpha - 2\Theta_{xy}\alpha\beta. \end{aligned} \right\} \quad (22.13a)$$

Величины  $\alpha, \beta, \gamma$  являются, очевидно, направляющими косинусами оси вращения  $\omega$ , произвольно выбранной в твердом теле. Таким образом, согласно формуле (22.13а), момент инерции относительно любой оси полностью определяется заданием шести величин  $\Theta_{ik}$ .

Совокупность шести величин, аналогичных  $\Theta_{ik}$ , называется *тензором* или, точнее, *симметричным тензором*. Термин этот взят из теории упругости, в которой *тензоры напряжений и деформаций* играют центральную роль. Для записи тензора удобно пользоваться следующей квадратной схемой:

$$\Theta_{ik} = \begin{pmatrix} \Theta_{xx} & \Theta_{xy} & \Theta_{xz} \\ \Theta_{yx} & \Theta_{yy} & \Theta_{yz} \\ \Theta_{zx} & \Theta_{zy} & \Theta_{zz} \end{pmatrix}, \quad (22.13б)$$

причем в нашем случае  $\Theta_{xy} = \Theta_{yx} \dots$

Тензорное исчисление в отношении наглядности уступает векторному. В то время как вектор изображается отрезком, для геометрического представления тензора нужно пользоваться *поверхностью второго порядка*. В нашем случае к понятию такой «тензорной поверхности» можно прийти следующим образом: положим

$$\alpha = \frac{\xi}{\rho}, \quad \beta = \frac{\eta}{\rho}, \quad \gamma = \frac{\zeta}{\rho}, \quad (22.14)$$

где  $\xi, \eta, \zeta$  — декартовы координаты; величина  $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$  будет, очевидно, радиусом-вектором, проведенным из точки  $O$ . Возьмем  $\rho$  равным  $\Theta^{-1/2}$ , т. е. будем откладывать по каждой оси, проходящей через точку  $O$ , не просто соответствующую величину  $\Theta$ , а величину, обратную  $\sqrt{\Theta}$  (иначе мы не получили бы поверхности «второго» порядка). Тогда формула (22.13а) принимает вид

$$1 = \Theta_{xx}\xi^2 + \Theta_{yy}\eta^2 + \Theta_{zz}\zeta^2 - 2\Theta_{yz}\eta\zeta - 2\Theta_{zx}\zeta\xi - 2\Theta_{xy}\xi\eta. \quad (22.15)$$

Это уравнение (отвлекаясь от случаев вырождения) является уравнением поверхности *эллипсоида*, так как при распределении масс на конечных расстояниях момент инерции  $\Theta$ , вообще говоря, отличен от нуля. Поверхность, изображаемую уравнением (22.15), мы называем *эллипсоидом инерции*.

Если преобразовать уравнение (22.15) к главным осям эллипсоида инерции, то оно примет вид

$$1 = \Theta_1\xi_1^2 + \Theta_2\xi_2^2 + \Theta_3\xi_3^2. \quad (22.15а)$$



Величины  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$ ,  $\Theta_3$  называются *главными моментами инерции*. Центробежные моменты относительно главных осей обращаются в нуль, что можно рассматривать как определение главных осей инерции. Наша тензорная схема (22.136) становится «диагональной», т. е. только ее диагональные элементы  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$ ,  $\Theta_3$  будут отличны от нуля. Если же мы будем рассматривать тензор не в системе главных осей, а в какой-либо другой системе координат, то мы должны будем добавить три параметра, определяющие направление главных осей, и таким образом опять получим шесть величин, характеризующих симметричный тензор.

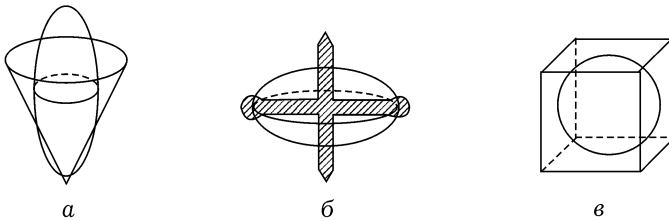


Рис. 40. а — эллипсоид инерции волчка, б — эллипсоид инерции гироскопа, в — пример шарового волчка

Каждая плоскость симметрии относительно распределения масс является, конечно, и плоскостью симметрии эллипсоида инерции; нормаль к этой плоскости определяет одну из главных осей этого эллипсоида. Распределению масс с симметрией вращения соответствует эллипсоид инерции, являющийся *эллипсоидом вращения*, следовательно, это распределение масс наряду с главной осью, совпадающей с осью симметрии тела, имеет еще бесчисленное множество «экваториальных» главных осей инерции. Примерами могут служить обыкновенный игрушечный волчок и волчок в форме маховичка, которым обычно пользуются для демонстраций (рис. 40а и б). У первого волчка момент инерции относительно оси симметрии минимален; поэтому соответствующая главная ось (в силу соотношения  $\rho = \Theta^{-1/2}$ ) *длиннее* экваториальных главных осей; эллипсоид инерции будет *продолговатым*. У второго волчка, напротив, момент инерции относительно оси симметрии максимален; поэтому (в силу того же соотношения) соответствующая главная ось *короче* экваториальных главных осей; эллипсоид инерции будет *сплюснутым*. В обоих случаях мы имеем дело с *симметричными волчками*.

Впрочем, эллипсоид инерции, обладающий симметрией вращения, встречается не только при распределении масс, обладающем симметрией вращения, а во всех тех случаях, когда через одну ось проходят *больше, чем две* плоскости симметрии; это имеет место, например, и случае квадратной или правильной шестигранной призмы.

В соответствии с этим, эллипсоид инерции принимает *форму шара* не только при сферически-симметричном распределении масс, но также, например, при кубическом распределении масс, так как здесь имеется больше плоскостей симметрии, чем это было бы в случае эллипсоидальной формы тензорной поверхности. В этом случае говорят о *шаровом волчке*, у такого волчка любая центральная ось является главной осью инерции (рис. 40в).

## § 23. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Статика твердого тела является теоретической основой расчета всех строительных конструкций (мостов, ферм, куполов и т. д.) и поэтому весьма подробно излагается (аналитически и графически) в учебниках прикладной механики. Здесь мы можем ограничиться изложением лишь основных черт этой части механики.

### 1. Условия равновесия

Основным принципом, на котором основано рассмотрение условий равновесия твердого тела так же, как и всех других вопросов теории равновесия, является принцип виртуальной работы. Он является частным случаем принципа Даламбера, из которого его можно получить, отбрасывая силы инерции. В связи с этим рассуждения, приводимые в настоящем параграфе, являются непосредственным следствием закона движения центра тяжести и закона площадей, разобранных в § 13. Следует также отметить, что рассмотренные там виртуальные перемещения (параллельный перенос и поворот), очевидно, не противоречат неизменяемости формы твердого тела и соответствуют рассмотренным в предыдущем параграфе поступательному движению и вращению — двум составным частям произвольного движения твердого тела.

Таким образом, отбрасывая силы инерции, мы получаем из (13.3) и (13.9) общие условия равновесия твердого тела:

$$\sum \mathbf{F}_k = 0, \quad \sum \mathbf{M}_k = 0. \quad (23.1)$$

Здесь  $\mathbf{F}_k$  — внешние силы, приложенные к каким-либо точкам  $P_k$  твердого тела. Для интерпретации первого уравнения (23.1) построим силовой многоугольник из векторов сил, не учитывая их точек приложения  $P_k$  и располагая эти векторы в любой последовательности. *Согласно первому уравнению (23.1), этот многоугольник в случае равновесия должен быть замкнутым.*

Величины  $\mathbf{M}_k$  — моменты сил  $\mathbf{F}_k$  относительно одной и той же для всех сил, но в остальном совершенно произвольной «точки отсчета»  $O$ . В соответствии со вторым уравнением (23.1), заменяем эти моменты сил  $\mathbf{M}_k$  их векторными изображениями (ср. стр. 56) и строим из них *многоугольник моментов. Согласно второму уравнению (23.1), многоугольник моментов в случае равновесия должен быть также замкнутым.*

По аналогии с уравнениями (13.12) и (13.13) мы можем перейти от двух векторных уравнений к следующим шести скалярным уравнениям для слагающих векторов  $\mathbf{F}_k$  и  $\mathbf{M}_k$ .

$$\left. \begin{aligned} \sum X_k &= \sum Y_k = \sum Z_k = 0, \\ \sum (y_k Z_k - z_k Y_k) &= \sum (z_k X_k - x_k Z_k) = \\ &= \sum (x_k Y_k - y_k X_k) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (23.2)$$

Эти уравнения получаются при проектировании векторных уравнений (23.1) на оси координат;  $x_k, y_k, z_k$  — координаты точек приложения сил, причем за начало координат взята «точка отсчета»  $O$ .

## 2. Эквивалентность сил и моментов.

### Приведение системы сил

Если силы (моменты) не находятся в равновесии, то можно задать вопрос: существует ли одна сила (один момент), обладающая тем свойством, что она вызывает точно такое же движение твердого тела, как и вся заданная система сил (моментов)?

Такая постановка вопроса, между прочим, полезна (хотя и недостаточна) при определении сил реакций, которые испытывает твердое тело со стороны своих точек опоры, если к нему приложена система сил, не находящихся в равновесии друг с другом.

Ответ на этот вопрос мы получим, если проведем отрезок, замыкающий ломаную линию (по предположению, незамкнутую), составленную из векторов сил  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ , входящих в нашу систему. Этот замыкающий отрезок мы проведем дважды: как в направлении обхода силового многоугольника (сила  $\mathbf{F}_{n+1}$  на рис. 41), так и в *противоположном направлении* (равнодействующая сила  $\mathbf{F}_r$ ), причем, очевидно, прибавление этих двух равных и противоположно направленных сил никак не изменит действия заданной системы сил. Мы получим замкнутый силовой многоугольник  $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_{n+1}$  и одиночную силу  $\mathbf{F}_r$ , которые вместе взятые эквивалентны первоначальному многоугольнику  $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$ . Но так как силы  $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_{n+1}$  образуют систему уравновешивающих друг друга сил и потому могут быть отброшены, то уже одна сила  $\mathbf{F}_r$  вполне эквивалентна всей заданной системе сил  $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$ . Таким образом,

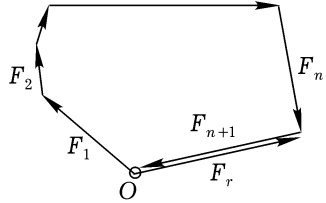


Рис. 41. Построение равнодействующей силы в случае незамкнутого многоугольника сил

$$\mathbf{F}_r = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k. \quad (23.3)$$

Точно такое же рассуждение можно привести и в отношении незамкнутого многоугольника моментов. Тогда получим равнодействующий момент  $\mathbf{M}_r$ , эквивалентный всей заданной системе моментов  $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_n$ :

$$\mathbf{M}_r = \sum_{k=1}^n \mathbf{M}_k. \quad (23.4)$$

Заметим, что ничто не препятствует нам приложить равнодействующую силу  $\mathbf{F}_r$ , как это показано на рис. 41, к точке  $O$ , относительно которой берутся моменты  $\mathbf{M}_r$ <sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Эту точку  $O$  часто называют центром приведения системы сил. Очевидно, ее можно выбрать вполне произвольно. (Прим. ред.)

### 3. Изменение точки отсчета

Уравнение (23.3) непосредственно показывает, что равнодействующая сила  $\mathbf{F}_r$  не зависит от выбора точки отсчета  $O$ . Если  $\mathbf{F}'_r$  означает равнодействующую силу, соответствующую выбору другой точки отсчета  $O'$ , то

$$\mathbf{F}'_r = \mathbf{F}_r. \quad (23.5)$$

С другой стороны, по аналогии с уравнением (23.4), имеем ( $\mathbf{M}'_r$  — равнодействующий момент относительно точки  $O'$ ):

$$\mathbf{M}'_r = \sum \mathbf{M}'_k, \quad \text{где } \mathbf{M}'_k = [\mathbf{r}'_k \mathbf{F}_k]. \quad (23.6)$$

Здесь  $\mathbf{r}'_k$  — радиус-вектор, проведенный из точки  $O'$  в точку приложения  $P_k$  силы  $\mathbf{F}_k$ . Если обозначить через  $\mathbf{a}$  вектор, проведенный от точки  $O'$  к точке  $O$ , то

$$\mathbf{r}'_k = \mathbf{a} + \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{M}'_k = [\mathbf{a}\mathbf{F}_k] + [\mathbf{r}_k\mathbf{F}_k] = [\mathbf{a}\mathbf{F}_k] + \mathbf{M}_k. \quad (23.6a)$$

Следовательно,

$$\mathbf{M}'_r = \sum [\mathbf{a}\mathbf{F}_k] + \sum \mathbf{M}_k = [\mathbf{a} \sum \mathbf{F}_k] + \mathbf{M}_r. \quad (23.6b)$$

Согласно уравнению (23.3), имеем:

$$[\mathbf{a} \sum \mathbf{F}_k] = [\mathbf{a}\mathbf{F}_r].$$

Таким образом, искомое соотношение имеет вид

$$\mathbf{M}'_r = \mathbf{M}_r + [\mathbf{a}\mathbf{F}_r]. \quad (23.7)$$

### 4. Сравнение кинематики со статикой

Как уже отмечалось в связи с уравнением (22.2), в кинематике угловая скорость вращения  $\boldsymbol{\omega}$  не зависит, а скорость поступательного движения  $\mathbf{u}$  зависит от выбора начала отсчета. Имеем:

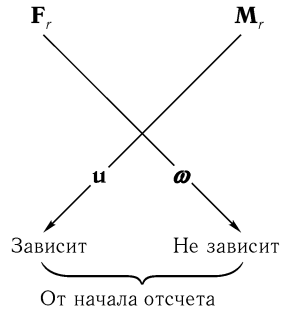
$$\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega} \quad (23.8)$$

и, согласно формуле (22.7), полагая  $\mathbf{v} = \mathbf{u}'$  и  $\mathbf{r} = \mathbf{a}$ ,

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{a}]. \quad (23.9)$$

Эта формула имеет такой же вид, как и предшествующее уравнение (23.7) (с точностью до порядка сомножителей в соответствующих векторных произведениях). Таким образом, принимая во внимание также соотношения (23.5) и (23.8), приходим к удивительной обратимости уравнений статики и кинематики; ее можно выразить приводимой ниже схемой. Эта «перекрестная» обратимость сохраняет силу также и для понятий «пара сил» и «пара угловых скоростей».

*Пара сил* является основным понятием элементарной статики. Как известно, под парой сил понимают две параллельные противоположно направленные силы  $\pm \mathbf{F}$ , линии действия которых находятся на конечном расстоянии  $l$  друг от друга. Приведение такой пары сил, наполненное по правилу раздела 2 настоящего параграфа, дает:



$$\mathbf{F}_r = 0, \quad \mathbf{M}_r = \mathbf{M}, \quad |\mathbf{M}| = |\mathbf{F}|l, \quad (23.10)$$

причем вектор момента  $\mathbf{M}$  направлен по перпендикуляру к плоскости пары сил. Но в то время как прежний равнодействующий момент  $\mathbf{M}_r$  был «привязан» к точке отсчета  $O$ , теперь момент  $\mathbf{M}$  не зависит от положения точки отсчета и может совершенно свободно перемещаться в пространстве параллельно самому себе. Таким образом, любые две пары сил складываются путем векторного сложения их моментов и дают при этом третью пару сил; две пары сил с равными, но противоположными по направлению моментами, действующие в параллельных плоскостях, взаимно уравновешиваются и т. д.

Следуя «перекрестной» обратимости, выражаемой нашей схемой, мы понимаем под *парой угловых скоростей* две равные, но противоположно направленные угловые скорости вращения  $\pm \omega$ , причем соответствующие оси вращения расположены параллельно на расстоянии  $l$  друг от друга. Приведение такой пары угловых скоростей по правилу сложения (22.5) дает результирующую угловую скорость вращения  $\omega_r = 0$ . Таким образом, наша пара угловых скоростей сообщает телу *чистое поступательное движение* по перпендикуляру к плоскости, проходящей через обе оси вращения. Скорость этого поступательного движения можно легко определить, а именно:  $|\mathbf{u}| = \omega l$ . Таким образом, здесь

имеется полная аналогия с формулами (23.10) в смысле соблюдения нашей «перекрестной» схемы обращения. Но в то время как прежняя скорость  $\mathbf{u}$  зависела от выбора начала отсчета  $O$ , скорость  $\mathbf{u}$ , эквивалентная паре угловых скоростей, совершенно не зависит от выбора точки  $O$  и может произвольно перемещаться в пространстве параллельно самой себе. Из этого далее следует: две произвольно расположенные пары угловых скоростей складываются векторно, как и скорости  $\mathbf{u}$  соответствующих им поступательных движений; две пары угловых скоростей с равными, но противоположно направленными моментами  $\pm\omega l$ , расположенные в параллельных плоскостях, взаимно уравниваются и т. д.

### ДОБАВЛЕНИЕ: О ДИНАМАХ И ВИНТАХ

Так как, согласно формуле (23.7),  $\mathbf{M}_r$  зависит от выбора точки отсчета, относительно которой этот момент рассматривается, то целесообразно выбрать эту точку ( $O'$ ) так, чтобы векторы  $\mathbf{M}_r$  и  $\mathbf{F}_r$  были параллельны друг другу. В этом случае говорят, что система сил приведена к *динаме*, т. е. к совокупности равнодействующей силы и действующего «вокруг» этой силы момента (этот момент эквивалентен паре сил, плоскость которой перпендикулярна к равнодействующей силе). Исходя из произвольной точки отсчета  $O$ , находим положение точки  $O'$ , необходимое для приведения системы к динаме, следующим образом: в уравнении (23.7) разложим момент  $\mathbf{M}_r$  на две слагающие:  $\mathbf{M}_p$ , параллельную  $\mathbf{F}_r$ , и  $\mathbf{M}_n$ , перпендикулярную  $\mathbf{F}_r$ ; далее, определяем  $\mathbf{a}$  из условия

$$\mathbf{M}_n = -[\mathbf{a}\mathbf{F}_r]. \quad (23.11)$$

Тогда для точки отсчета  $O'$ , согласно соотношениям (23.5) и (23.7), получим:

$$\mathbf{F}'_r = \mathbf{F}_r, \quad \mathbf{M}'_r = \mathbf{M}_p \parallel \mathbf{F}_r,$$

как и должно быть в случае динамы. Из условия (23.11) следует, что для получения динамы нужно передвинуть точку отсчета  $O$  перпендикулярно к векторам  $\mathbf{F}_r$  и  $\mathbf{M}_n$  на отрезок

$$a = -\frac{|\mathbf{M}_n|}{|\mathbf{F}_r|}.$$

Совершенно аналогичное рассуждение, в полном согласии с нашей схемой обращения, приводит нас к понятию *винта*. Исходя из уравнения (23.9), разложим скорость  $\mathbf{u}$  на две слагающие:  $\mathbf{u}_p$ , параллельную вектору  $\boldsymbol{\omega}$ , и  $\mathbf{u}_n$ , перпендикулярную к  $\boldsymbol{\omega}$ . Определяем необходимое смещение  $\mathbf{a}$  начала отсчета  $O$  из условия

$$\mathbf{u}_n = -[\boldsymbol{\omega} \mathbf{a}] \quad (23.12)$$

и, согласно формулам (23.8) и (23.9), получаем для нового начала отсчета  $O$ :

$$\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u}_p \parallel \boldsymbol{\omega}, \quad (23.13)$$

что действительно соответствует винту. Из уравнения (23.12) следует, что для приведения движения к винту нужно передвинуть начало отсчета  $O$  перпендикулярно к  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{u}_n$  на определенный отрезок  $\mathbf{a}$ .

Как ни привлекательно представление системы сил и движений с помощью динами и винта, все же оно не имеет большого практического значения при изучении специальных вопросов вращательного движения; поэтому мы и упоминаем об этих понятиях ёлишь в виде добавления.

## § 24. ИМПУЛЬС И МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ТВЕРДОГО ТЕЛА. ИХ СВЯЗЬ СО СКОРОСТЬЮ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЙ

Представим себе, что твердому телу сообщены импульс поступательного движения (одиночный импульс, возбуждение толчком) и импульс вращательного движения (момент импульса, вращательный импульс). Поступательный импульс обозначим через  $\mathbf{G}$ , вращательный импульс — через  $\mathbf{N}$ . Импульс  $\mathbf{G}$  вычислим как сумму всех элементарных импульсов  $d\mathbf{g} = \mathbf{v} dm$ ; следовательно,

$$\mathbf{G} = \int d\mathbf{g} = \int \mathbf{v} dm. \quad (24.1)$$

Пользуясь уравнением (22.7), получаем:

$$\mathbf{G} = \mathbf{u} \int dm + [\boldsymbol{\omega} \int \mathbf{r} dm]$$



или, вводя радиус-вектор  $\mathbf{R}$ , проведенный из точки  $O$  в центр тяжести [ср. (22.11a)],

$$\mathbf{G} = m\mathbf{u} + m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{R}]. \quad (24.2)$$

В частности, если совместить начало отсчета  $O$  с центром тяжести  $S$ , то  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$  и

$$\mathbf{G} = m\mathbf{u}. \quad (24.3)$$

С другой стороны, момент импульса  $\mathbf{N}$  твердого тела равен сумме моментов всех элементарных импульсов относительно общего начала отсчета  $O$ . Таким образом,

$$\mathbf{N} = \int [\mathbf{r} d\mathbf{g}] = \int dm[\mathbf{r}\mathbf{v}]. \quad (24.4)$$

Отсюда, принимая во внимание соотношения (22.7) и (22.11a), имеем:

$$\mathbf{N} = \int dm[\mathbf{r}\mathbf{u}] + \int dm[\mathbf{r}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]] = m[\mathbf{R}\mathbf{u}] + \int [\mathbf{r}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]] dm. \quad (24.5)$$

Первое слагаемое обращается в нуль как при совпадении точек  $O$  и  $S$ , так и при  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , так что для этих двух случаев момент импульса равен

$$\mathbf{N} = \int dm[\mathbf{r}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]]. \quad (24.6)$$

Для наглядного представления этого интеграла воспользуемся известным соотношением векторной алгебры

$$[\mathbf{A}[\mathbf{B}\mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{B}), \quad (24.7)$$

которое справедливо для любой тройки векторов  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ . В нашем случае

$$[\mathbf{r}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]] = \boldsymbol{\omega}\mathbf{r}^2 - \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})$$

и, следовательно, например,

$$N_x = \int [\mathbf{r}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]]_x dm = \omega_x \int (x^2 + y^2 + z^2) dm - \left. \begin{aligned} & -\omega_x \int x^2 dm - \omega_y \int xy dm - \omega_z \int xz dm. \end{aligned} \right\} \quad (24.8)$$

Вводя моменты инерции и произведения инерции, в соответствии с их определениями (22.12а), можем написать:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \Theta_{xx}\omega_x - \Theta_{xy}\omega_y - \Theta_{xz}\omega_z, \\ N_y &= -\Theta_{yx}\omega_x + \Theta_{yy}\omega_y - \Theta_{yz}\omega_z, \\ N_z &= -\Theta_{zx}\omega_x - \Theta_{zy}\omega_y + \Theta_{zz}\omega_z, \end{aligned} \right\} \quad (24.9)$$

Таким образом, мы пришли к линейной зависимости между *динамическим вектором*  $\mathbf{N}$  и *кинематическим вектором*  $\boldsymbol{\omega}$ , причем эта линейная зависимость характеризуется *тензором*  $\Theta$  [ср. определение (22.13б)]; поэтому говорят:  $\mathbf{N}$  есть «линейная векторная функция» от  $\boldsymbol{\omega}$ . Такие линейные векторные функции играют важную роль во всех разделах тензорного исчисления, особенно в теории упругости.

Уравнениям (24.9) можно придать замечательную форму, если использовать выражение (22.12б) для кинетической энергии вращения. Именно,

$$N_i = \frac{\partial T_{\text{вращ.}}}{\partial \omega_i}, \quad i = x, y, z. \quad (24.10)$$

Мы замечаем далее, что это выражение справедливо не только при совпадении центра тяжести  $S$  и начала отсчета  $O$  или при  $\mathbf{u} = 0$ , т. е. в случаях, для которых выведены уравнения (24.9), но также и при любом положении точки  $O$ . В этом случае нужно только дополнить выражение (22.12б) для  $T_{\text{вращ.}}$  выражением (22.11) для  $T_w$ , благодаря чему в правой части соотношения (24.10) прибавится член вида

$$\frac{\partial T_w}{\partial \omega_i} = m[\mathbf{R}\mathbf{u}]_i.$$

Но это тот же самый добавочный член, который входит в правую часть выражения (24.5) для  $\mathbf{N}$ , если точки  $O$  и  $S$  не совпадают. Так как полная кинетическая энергия  $T$  отличается от  $T_{\text{вращ.}} + T_w$  только слагаемым  $T_{\text{пост.}}$ , не зависящим от  $\boldsymbol{\omega}$  [ср. формулы (22.9) и (22.10)], то соотношения (24.10) можно обобщить, причем новые обобщенные соотношения будут справедливы для *любого положения* точки  $O$ :

$$N_i = \frac{\partial T}{\partial \omega_i}, \quad i = x, y, z. \quad (24.10a)$$

То же самое справедливо и для импульса поступательного движения  $\mathbf{G}$ , как и для вращательного импульса  $\mathbf{N}$ . Чтобы сразу же рассмотреть общий случай, когда точки  $O$  и  $S$  не совпадают, образуем с помощью формул (22.9), (22.10) и (22.11) производную

$$\frac{\partial T}{\partial u_i} = m u_i + m[\boldsymbol{\omega} \mathbf{R}]_i,$$

что совпадает с уравнением (24.2) для импульса  $\mathbf{G}$ . Таким образом, получаем соотношение, вполне аналогичное соотношению (24.10а):

$$G_i = \frac{\partial T}{\partial u_i}, \quad i = x, y, z. \quad (24.11)$$

Наши уравнения (24.10а) и (24.11) являются частными случаями гораздо более общих соотношений, связывающих обобщенные импульсы с обобщенными скоростями. Но это мы можем показать лишь в гл. VI, § 36. Теперь нам важно выяснить геометрическое толкование уравнений (24.10). Речь идет здесь о знаменитом *построении Пуансо*: по заданной оси вращения  $\boldsymbol{\omega}$  найти направление вектора момента импульса  $\mathbf{N}$ . Собственно говоря, это построение не ограничивается случаем твердого тела; его всегда можно применять в том случае, когда имеют дело с симметричным тензором; изображают этот тензор тензорной поверхностью второго порядка и находят линейную векторную функцию, с которой сопоставляется этот тензор.

Правило Пуансо гласит: из центра  $O$  эллипсоида инерции нужно отложить вектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  и в точке его пересечения с эллипсоидом провести касательную плоскость к последнему. Перпендикуляр, опущенный из центра эллипсоида на эту плоскость, и даст направление вектора момента импульса  $\mathbf{N}$ . Для доказательства правильности этого построения следует только вспомнить, что для любой поверхности  $f(\xi, \eta, \zeta) = \text{const}$  направляющие косинусы нормали к касательной пропорциональны производным

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial f}{\partial \zeta}. \quad (24.12)$$

В нашем случае  $f(\xi, \eta, \zeta) = \text{const}$  есть уравнение (22.15) эллипсоида инерции, и производные функции  $f$  по  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  действительно пропорциональны слагающим вектора  $\mathbf{N}$ , определяемым уравнениями (24.9).

Можно также сказать: построение Пуансо является непосредственным геометрическим представлением наших уравнений (24.10), так как поверхность эллипсоида инерции по существу тождественна с поверхностью

$$T_{\text{вращ.}} = \text{const.}$$

Рис. 42а, б соответствуют случаю *симметричного* эллипсоида инерции, для которого векторы  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{N}$  находится в одной и той же плоскости, проходящей через его ось симметрии («ось фигуры»); касательная плоскость может быть поэтому представлена прямой, касательной к эллипсу осевого сечения. В случае удлиненного эллипсоида вращения (рис. 42б) вектор  $\mathbf{N}$  и ось фигуры  $F$  лежат по разные стороны от вектора  $\boldsymbol{\omega}$ , а в случае сплюснутого эллипсоида вращения (рис. 42а) вектор  $\mathbf{N}$  лежит между осью  $F$  и вектором  $\boldsymbol{\omega}$ . Графическое изображение для случая трехосного эллипсоида инерции более сложно.

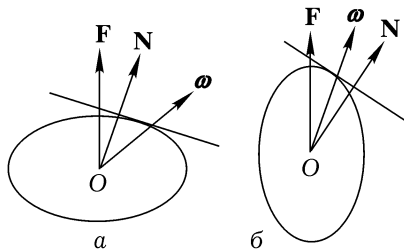


Рис. 42. Построение Пуансо для нахождения относительного положения мгновенной оси вращения  $\boldsymbol{\omega}$  и момента импульса  $\mathbf{N}$  в случае сплюснутого и удлиненного эллипсоида инерции

В заключение подчеркнем, что соотношения, рассмотренные в этом параграфе, по существу, являются не чем иным, как *ньютонским* определением, примененным к твердому телу (ср. стр. 12): «количество движения есть мера такого, устанавливаемая пропорционально скорости и количеству материи». Наши теперешние уравнения оказались значительно сложнее соотношения между импульсом и скоростью для одной и той же материальной точки только потому, что в механике точки «количество материи», т.е. масса, есть *скаляр*, а в случае твердого тела моменты инерции образуют *тензор*.

## § 25. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА. ОБЩИЙ ОБЗОР РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Сперва рассмотрим тело, свободно движущееся в пространстве. Поместим начало отсчета в центр тяжести тела и приведем к нему приложенные к телу силы согласно указанию, сделанному в § 23. Тогда вся система сил, действующих на тело, сведется к равнодействующей силе  $\mathbf{F}$  и к результирующему (главному) моменту  $\mathbf{M}$ . Согласно § 13, уравнения движения твердого тела примут форму «закона движения центра тяжести» и «закона площадей»:

$$\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{F}, \quad (25.1)$$

$$\dot{\mathbf{N}} = \mathbf{M}. \quad (25.2)$$

Так как твердое тело имеет только шесть степеней свободы, то этих двух векторных уравнений достаточно для полного описания состояния его движения.

Если сила  $\mathbf{F}$  не зависит от угловой скорости, а момент  $\mathbf{M}$  — от скорости поступательного движения, то уравнения (25.1) и (25.2) можно рассматривать независимо друг от друга. В баллистике, например, это не имеет места. В случае же, когда такое раздельное рассмотрение этих двух уравнений допустимо, уравнение (25.1) соответствует просто задаче из механики точки, а уравнение (25.2) — задаче о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки или, короче, *задаче о движении волчка*.

Мы займемся рассмотрением, главным образом, последней из этих задач. При упомянутом выборе начала отсчета мы можем не принимать во внимание силу тяжести, так как она не дает момента относительно центра тяжести. Если мы пренебрежем также сопротивлением воздуха, трением и т. д., то будем иметь дело с задачей о движении свободного волчка. Эту задачу мы рассмотрим в разделах 1–3. Волчок в кардановом подвесе также будет свободным волчком, если мы вправе пренебречь массой подвесных колец по сравнению с массой маховичка. В противном случае мы имели бы дело с задачей о движении тела с пятью степенями свободы, тогда как в задачах о движении волчка, которые мы имеем в виду, число степеней свободы равно трем.

Мы рассмотрим, однако, и вращение вокруг неподвижной точки, не совпадающей с центром тяжести. В этом случае следует, как отмечено на стр. 162, выбрать эту неподвижную точку за начало отсчета  $O$  и ввести момент силы тяжести  $\mathbf{M}$  относительно этой точки. Тогда мы говорим о тяжелом волчке. Этот вид волчка рассматривается в разделах 4 и 5.

Однако полное аналитическое рассмотрение движения свободного волчка мы отложим до следующего параграфа, где воспользуемся новым вспомогательным средством — *уравнениями Эйлера*. Полное же рассмотрение законов движения тяжелого волчка, поскольку оно вообще возможно, мы должны отложить даже до § 35, чтобы иметь возможность воспользоваться таким мощным средством, как общие уравнения Лагранжа.

В случае *свободного волчка* из уравнения (25.2) следует

$$\dot{\mathbf{N}} = 0.$$

Это уравнение немедленно интегрируется и дает:

$$\mathbf{N} = \text{const.} \quad (25.3)$$

Для свободного волчка момент импульса по величине и направлению в пространстве постоянен. Эта теорема вполне соответствует закону инерции Галилея, однако она не приводит к таким простым заключениям относительно скорости и положения в пространстве, как этот закон.

### 1. Свободный шаровой волчок

Только в частном случае, когда эллипсоид инерции превращается в шар, из уравнения  $\mathbf{N} = \Theta\boldsymbol{\omega}$  следует, что при  $\mathbf{N} = \text{const}$  и  $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$ . Ось вращения неопределенно долго совпадает с неподвижной осью момента импульса. Каждая точка тела, какую бы внешнюю форму оно ни имело (ср., например, рис. 40в), описывает окружность вокруг этой оси (с одинаковой для всего тела угловой скоростью).

### 2. Свободный симметричный волчок

В случае свободного симметричного волчка чистое вращение имеет место только тогда, когда направление момента импульса  $\mathbf{N}$  совпадает

с одной из главных осей, т. е. либо с осью фигуры, либо с одной из экваториальных осей. Общей же формой движения симметричного волчка является так называемая *регулярная прецессия*.

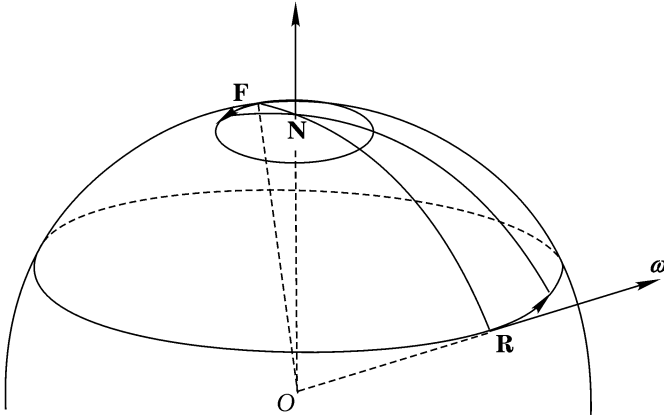


Рис. 43. Регулярная прецессия свободного симметричного волчка

Поясним регулярную прецессию при помощи рис. 43. Неподвижную в пространстве ось момента импульса  $\mathbf{N}$  направим вертикально вверх; точку пересечения этой оси с поверхностью сферы единичного радиуса, описанной вокруг центра эллипсоида инерции, обозначим через  $N$ . Точки пересечения мгновенной оси вращения и оси фигуры с этой сферой обозначим через  $R$  и  $F$ . Так как, согласно построению Пуансо, эти три оси должны лежать в меридиональной плоскости, проходящей через точку  $F$ , то наши три точки  $N$ ,  $R$  и  $F$  лежат на одном меридиане, проходящем через неподвижную точку  $N$ ; для случая сплюснутого эллипсоида инерции, который здесь подразумевается (рис. 42а), точка  $N$  находится между точками  $F$  и  $R$ . Мгновенное движение является вращением вокруг оси  $OR$ . При этом точка  $F$  движется нормально к названному меридиану, причем угловое расстояние между точками  $F$  и  $N$  не изменяется. Таким образом, мы можем изобразить мгновенное перемещение точки  $F$  в виде короткой дуги параллели, описанной вокруг оси  $ON$  (см. стрелку слева на рис. 43). Следовательно, и точка  $R$  должна изменить свое положение, а именно, переместиться так, чтобы все три точки  $F$ ,  $N$  и  $R$  оставались на одном меридиане, определяе-

мом теперь новым положением точки  $F$ . При этом угловое расстояние между точками  $N$  и  $R$  сохраняется, поскольку оно задано построением Пуансо. Таким образом, точка  $R$  также движется по дуге параллели, описанной вокруг оси  $ON$  (см. стрелку справа на рис. 43). Относительное положение точек  $F$ ,  $N$  и  $R$  теперь такое же, как и вначале, так что мы можем повторить наши рассуждения. Итак, *в пространстве ось фигуры и ось вращения описывают каждая, и притом с постоянной угловой скоростью, круговой конус вокруг неподвижной оси момента импульса* (эта угловая скорость постоянна, потому что она определяется величиной момента импульса  $\mathbf{N}$  и его положением относительно эллипсоида инерции волчка). Этим и установлен характер регулярной прецессии.

То же самое справедливо, конечно, и в случае продолговатого эллипсоида инерции, для которого, однако, точка  $R$  находилась бы между точками  $F$  и  $N$  (рис. 42б).

### 3. Свободный несимметричный волчок

Рассмотренную только что форму движения симметричного волчка можно было бы описать короче (хотя, быть может, менее наглядно). Для этого через конец вектора  $\mathbf{N}$  момента импульса проводим перпендикулярно к нему «неизменяемую плоскость»  $\mathcal{E}$  (ср. стр. 99) и строим «эллипсоид кинетической энергии» с центром в начале вектора  $\mathbf{N}$ , подобный эллипсоиду инерции и касающийся плоскости  $E$ . Точка касания является концом вектора угловой скорости вращения  $\boldsymbol{\omega}$ . Мгновенное движение волчка состоит во вращении этого эллипсоида вокруг  $\boldsymbol{\omega}$ . При этом эллипсоид катится без скольжения по плоскости  $\mathcal{E}$ .<sup>1</sup> Если эллипсоид обладает симметрией вращения, то кривая качения будет окружностью, описанной вокруг вектора  $\mathbf{N}$ ; поэтому конус, описанный вектором  $\boldsymbol{\omega}$ , равно как и конус, описанный осью фигуры, будет *круговым конусом*. Таким образом, мы снова пришли к регулярной прецессии симметричного волчка.

Это же построение приводит нас непосредственно к введенному Пуансо представлению свободного движения произвольного волчка в случае *трехосного эллипсоида инерции*. Подобно этому эллипсоиду,

<sup>1</sup> Качение без скольжения можно определить как такое качение, при котором изменение вектора угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  имеет одинаковое значение в неподвижной системе отсчета и в системе, связанной с телом. Это утверждение будет доказано нами несколько позже [см. уравнение (26.8a)].



«эллипсоид кинетической энергии» мы также заставляем катиться по неизменяемой плоскости  $\mathcal{E}$  (ср. примечание на этой странице). Однако теперь кривая качения является уже не окружностью, а трансцендентной кривой, вообще говоря, незамкнутой. Равным образом и конусы, описываемые в пространстве осью вращения и осью фигуры, являются трансцендентными конусами. Аналитическое рассмотрение движения несимметричного волчка, даже в случае отсутствия внешних сил, приводит к *эллиптическим интегралам* (ср. раздел 3, § 26), тогда как при рассмотрении движения свободного симметричного волчка можно обойтись элементарными функциями. Конечно, вращение вокруг какой-либо из трех главных осей и в случае несимметричного волчка характеризуется постоянством направления оси вращения и угловой скорости, а потому может быть представлено в элементарных функциях.

#### 4. Тяжелый симметричный волчок

Здесь мы не будем останавливаться отдельно на шаровом волчке, так как рассмотрение его движения лишь немногим проще, чем в случае симметричного волчка.

У тяжелого симметричного волчка неподвижная точка  $O$  (точка опоры о подставку) не совпадает с центром тяжести  $S$  (лежащим на оси фигуры); отрезок  $OS$  обозначим через  $s$ . Величина момента силы тяжести равна

$$|\mathbf{M}| = mgs \sin \vartheta, \quad (25.4)$$

где через  $\vartheta$  обозначен угол между вертикалью и осью фигуры волчка. Сам вектор момента  $\mathbf{M}$  направлен по нормали к плоскости, проходящей через вертикальную линию и ось фигуры волчка, или, другими словами, по линии пересечения горизонтальной плоскости с экваториальной плоскостью эллипсоида инерции. Эту линию пересечения обозначают астрономическим термином «*линия узлов*». (По поводу знаков см. стр. 187–188.)

Теперь уже нельзя столь просто проинтегрировать общее уравнение (25.2), как это было в случае отсутствия внешних сил [ср. уравнение (25.3)]; напротив, момент импульса  $\mathbf{N}$  непрерывно изменяется по закону

$$d\mathbf{N} = \mathbf{M} dt. \quad (25.5)$$

Таким образом, к мгновенному вектору момента импульса  $N$  векторно прибавляется бесконечно малый вектор  $M dt$ . При этом конец вектора  $N$  движется в направлении мгновенной линии узлов, т.е. перпендикулярно к вертикали и к оси фигуры. Отсюда следует, что *проекции вектора  $N$  на вертикаль и на ось фигуры остаются постоянными*. Обозначим обе эти постоянные через

$$n = N_{\text{верт.}} \quad \text{и} \quad N = N_{\text{фиг.}} \quad (25.6)$$

Эти две величины  $n$  и  $N$ , которые могут быть заданы произвольно, являются двумя *интеграционными постоянными уравнений движения*.

Третьей интеграционной постоянной является энергия  $W$ . Поскольку потенциальная энергия волчка в поле тяжести, в соответствии с уравнением (18.18), равна

$$V = mgs \cos \vartheta, \quad (25.6a)$$

имеем:

$$T + mgs \cos \vartheta = W. \quad (25.7)$$

Однако для того, чтобы с помощью последних соотношений получить аналитическое выражение законов движения тяжелого симметричного волчка, необходимо выразить кинетическую энергию  $T$  и проекции момента импульса  $N_{\text{верт.}}$  и  $N_{\text{фиг.}}$  через подходящие параметры, характеризующие положение волчка (эйлеровы углы), что будет сделано лишь в § 35. При этом аналитическое представление движения сведется к *эллиптическим интегралам*.

В частном случае это аналитическое представление описывает регулярную прецессию волчка, которая теперь, однако, не является общей формой движения, как было в случае свободного волчка, а получается только для специально подобранных значений  $n$ ,  $N$  и  $W$ . Чаще всего наблюдаемая при обычном «возбуждении» тяжелого волчка прецессия является только по видимости регулярной; ее называют *псевдoreгулярной прецессией*. *Чистое вращение вокруг вертикально* расположенной оси фигуры также является, и притом при любой угловой скорости, возможной (устойчивой или неустойчивой) формой движения.

До сих пор мы рассматривали только уравнение момента импульса (25.2). Нам нужно, однако, коснуться также и уравнения импульса (25.1). В правой части этого уравнения стоит приложенная к неподвижной точке  $O$  сила  $\mathbf{F}$ , являющаяся реакцией подставки; назовем ее

опорной силой  $\mathbf{F}_{\text{оп.}}$ . Изменение импульса, стоящее в левой части уравнения (25.1), согласно уравнению (24.2) и с учетом  $u = 0$ , равно

$$\dot{\mathbf{G}} = m \frac{d}{dt} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{R}] = m \dot{\mathbf{V}},$$

где  $\mathbf{V}$  — скорость движения центра тяжести. Таким образом, уравнение (25.1) принимает вид

$$\mathbf{F}_{\text{оп.}} = m \dot{\mathbf{V}}.$$

Это означает, что для соблюдения закона движения центра тяжести волчок должен испытывать со стороны подставки действие опорной силы, равной произведению массы на ускорение его центра тяжести.

### 5. Тяжелый волчок с трехосным эллипсоидом инерции

Несмотря на усилия многих великих математиков, проинтегрировать в общем виде дифференциальные уравнения этой задачи не удалось. Из двух интегралов импульса, выражаемых соотношениями (25.6), первый остается в силе, так как момент силы тяжести и в этом случае действует относительно горизонтальной оси, вследствие чего конец вектора  $\mathbf{N}$  остается в горизонтальной плоскости, неподвижной в пространстве. Однако второе из соотношений (25.6) теряет силу, поскольку оно было связано с симметрией эллипсоида инерции. Интеграл энергии (25.7), разумеется, сохраняет силу и для общего случая эллипсоида инерции.

В разрешимых частных случаях предполагается либо специальное *распределение масс*, либо *специальная форма движения*.

Наиболее известным является случай С. Ковалевской. Эллипсоид инерции предполагается здесь *симметричным*, но центр тяжести лежит не на оси фигуры, а в экваториальной плоскости; кроме того, момент инерции относительно оси фигуры должен равняться половине экваториального момента инерции. В этом случае не требуется специализировать состояние движения.

Случай Штауде касается вопроса: *какие оси, будучи расположены вертикально, могут являться перманентными осями вращения?* Оказывается, что эти оси лежат в теле на конусе второго порядка, содержащем, кроме трех главных осей, также и центральную ось (проходящую через центр тяжести). Каждой оси соответствует определенная (с точ-

ностью до знака) угловая скорость вращения. При этом не требуется специализировать распределение масс и положение центра тяжести.

Наконец, в случае Гесса речь идет о движении, аналогичном простому движению маятника (сферического или, в частном случае, обыкновенного маятника). При этом центр тяжести должен лежать на определенной оси в эллипсоиде инерции, а начальное возбуждение волчка должно быть определенным образом специализировано, подобно тому, как это делается в случае симметричного волчка: центр тяжести последнего только тогда совершает маятникообразное движение в чистом виде, когда начальный момент импульса не имеет слагающей по оси фигуры.

## § 26. УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА. КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ СВОБОДНОГО ВОЛЧКА

### 1. Эйлеровы дифференциальные уравнения движения

Будем различать систему отсчета  $x, y, z$ , неподвижную в пространстве, и систему отсчета  $X, Y, Z$ , неподвижно связанную с телом. При свободном движении тела положение вектора момента импульса относительно системы  $x, y, z$  остается неизменным:  $\mathbf{N} = \text{const}$  [уравнение (25.3)]; по отношению же к телу его положение непрерывно изменяется. Найдем закон, по которому происходит это изменение.

Для этого рассмотрим неподвижную относительно тела точку  $P$  и неподвижную в пространстве точку  $Q$ , которые в данный момент совпадают друг с другом. Обозначим скорость точки  $P$  в пространстве через  $\mathbf{v}$ , а скорость точки  $Q$  относительно тела — через  $\mathbf{V}$ . Согласно кинематическому уравнению (22.4),  $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$ . Скорость точки  $Q$  по отношению к телу равна по величине скорости точки  $P$  в пространстве, но противоположна ей по направлению:

$$\mathbf{V} = -[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}] = [\mathbf{r}\boldsymbol{\omega}].$$

Сведя эти скорости в таблицу, получим:

	По отношению к пространству	По отношению к телу
$P$	$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$	$\mathbf{V} = 0$
$Q$	$\mathbf{v} = 0$	$\mathbf{V} = [\mathbf{r}\boldsymbol{\omega}]$

В качестве точки  $Q$  выберем неподвижный в пространстве конец вектора  $\mathbf{N}$  и поэтому можем написать:

$$\mathbf{r} = \mathbf{N}, \quad \mathbf{V} = \frac{d\mathbf{N}}{dt}.$$

Следовательно, под  $\frac{d\mathbf{N}}{dt}$  мы понимаем «скорость изменения вектора  $\mathbf{N}$  по отношению к телу» (скорость изменения вектора  $\mathbf{N}$  в пространстве, равную в данном случае нулю, мы обозначали через  $\dot{\mathbf{N}}$ ).

Используя вторую строку нашей таблицы, получим:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = [\mathbf{N}\boldsymbol{\omega}]. \quad (26.1)$$

Тем самым мы получили векторную форму *дифференциальных уравнений Эйлера*<sup>1</sup> для случая отсутствия внешних сил (свободного движения твердого тела).

Перепишем это векторное уравнение в проекциях на оси  $X, Y, Z$ . Будем обозначать, по Эйлеру, компоненты вектора  $\boldsymbol{\omega}$  через  $p, q, r$ , а компоненты вектора  $\mathbf{N}$  — через  $L, M, N$ . Тогда из уравнения (25.1) найдем:

$$\frac{dL}{dt} = Mr - Nq, \quad \frac{dM}{dt} = Np - Lr, \quad \frac{dN}{dt} = Lq - Mp. \quad (26.2)$$

При этом выбор осей  $X, Y, Z$  пока что совершенно произволен. Но если мы выберем в качестве осей  $X, Y, Z$  главные оси инерции тела [см. уравнение (22.15а)] и обозначим (также по Эйлеру) соответствующие главные моменты инерции через  $A, B, C$ , то, согласно общему соотношению (24.9) между компонентами векторов  $\mathbf{N}$  и  $\boldsymbol{\omega}$ , получим:

$$L = Ap, \quad M = Bq, \quad N = Cr. \quad (26.3)$$

---

<sup>1</sup>Леонард Эйлер (1707–1783) — один из крупнейших математиков XVIII в. Швейцарец по происхождению, значительную часть своей жизни провел в России. Научная деятельность Эйлера протекала главным образом в стенах Российской Академии Наук, членом которой он состоял. (Прим. ред.)

Тогда уравнения (26.2) примут следующий простой вид:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr, \\ B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp, \\ C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq. \end{aligned} \right\} \quad (26.4)$$

Эти необыкновенно изящные и симметричные формулы называются обычно «эйлеровыми дифференциальными уравнениями» вращения твердого тела.

Прежде всего мы обобщим их для случая, когда на тело действует момент внешней силы, который мы обозначим через  $\mathbf{M}$ . Тогда конец вектора  $\mathbf{N}$  не будет более неподвижным, а согласно уравнению (25.2), будет двигаться в пространстве со скоростью  $\mathbf{v} = \mathbf{M}$ .

Вышеупомянутая точка  $Q$  движется по отношению к телу со скоростью, которая складывается из скоростей  $\mathbf{v} = \mathbf{M}$  и  $\mathbf{V}[\mathbf{r}\boldsymbol{\omega}]$ . В связи с этим уравнение (26.1) видоизменяется следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = [\mathbf{N}\boldsymbol{\omega}] + \mathbf{M}, \quad (26.5)$$

и в правых частях уравнений (26.3) и (26.4) появляются новые слагаемые проекции вектора  $\mathbf{M}$  на оси  $X$ ,  $Y$ , и  $Z$ .

Разберем это более подробно только для случая тяжелого симметричного волчка, когда момент  $\mathbf{M}$  направлен по линии узлов и, согласно уравнению (25.4), абсолютная величина его равна

$$|\mathbf{M}| = mgs \sin \vartheta.$$

Во избежание возможной двойственности в понятиях: «вертикаль», «ось фигуры», «линия узлов», установим следующее правило знаков: положительное направление неподвижной в пространстве оси идет вверх и определяет «полупрямую (луч) вертикали». Положительное направление оси  $Z$  проходит через центр тяжести тела и определяет «полупрямую (луч) оси фигуры». С вертикалью положительное направление оси  $Z$  образует угол  $\vartheta$ . Линия узлов представляет собою перпендикулярную к осям  $z$  и  $Z$  полупрямую, образующую с направлением возрастания угла  $\vartheta$  праввинтовую систему. Величина  $s$  положительна. Далее,

обозначим угол, образуемый линией узлов с положительным направлением оси  $X$ , через  $\varphi$ . Тогда проекции момента  $\mathbf{M}$  на оси  $X, Y, Z$  будут равны соответственно

$$mgs \sin \vartheta \cos \varphi, \quad -mgs \sin \vartheta \sin \varphi, \quad 0, \quad (26.5a)$$

и при  $B = A$  уравнения Эйлера (26.4) примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (A - C)qr + mgs \sin \vartheta \cos \varphi, \\ A \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp - mgs \sin \vartheta \cos \varphi, \\ C \frac{dr}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (26.6)$$

Последнее уравнение показывает, что для случая тяжелого (и тем более свободного) симметричного волчка справедливо уже знакомое нам равенство

$$Cr = N = \text{const}. \quad (26.7)$$

Но в то же время мы видим, что уравнения Эйлера не пригодны для дальнейшего интегрирования в случае тяжелого волчка, так как нам неизвестна (или пока еще неизвестна) связь между слагающими  $p, q$  и углами  $\vartheta, \varphi$ .

Что касается слагающих угловой скорости  $p, q, r$ , то необходимо еще раз подчеркнуть, что они не являются скоростями в обычном смысле, т. е. производными по времени от каких-либо пространственных координат. Мы можем по аналогии с выражением, употребленным на стр. 71, назвать их «неголономными слагающими скорости».

Перепишем уравнение (26.5) в несколько иной форме, заменив  $\mathbf{M}$ , в соответствии с уравнением (25.2), на  $\mathbf{N}$ . Полученное таким образом равенство

$$\dot{\mathbf{N}} = \frac{d\mathbf{N}}{dt} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{N}] \quad (26.8)$$

справедливо для всякого (аксиального или полярного) вектора. В применении к вектору угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  это равенство дает:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}; \quad (26.8a)$$

для вектора угловой скорости  $\omega$ , и только для него, скорость изменения его в пространстве равна скорости изменения в системе отсчета, связанной с телом. На эту теорему мы уже указывали в примечании на стр. 181.

## 2. Регулярная прецессия свободного симметричного волчка и эйлера теория колебаний полюса

На случае *шарового волчка* мы останавливаться не будем. Его движение представляет собой в общем случае чистое вращение вокруг оси, неподвижно связанной с телом, что непосредственно вытекает из уравнений (26.4), если и них положить  $A = B = C$ . Эта неподвижная в теле ось, как мы знаем (ср. § 25, раздел 1), неподвижна также и в пространстве и совпадает с направлением вектора момента импульса.

Перейдем к рассмотрению *симметричного волчка*, у которого  $B = A \neq C$ . Из третьего уравнения (26.4) найдем

$$r = \text{const},$$

что видно также из уравнения (26.7). Первые два уравнения (26.4) запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (A - C)qr, \\ A \frac{dq}{dt} &= (C - A)pr. \end{aligned} \right\} \quad (26.9)$$

Удобно объединить их в одно уравнение в комплексной форме. Умножая второе уравнение на  $i$  и складывая его с первым, получим:

$$A \frac{ds}{dt} = i(C - A)rs, \quad \text{где } s = p + iq. \quad (26.10)$$

Для сокращения записи введем обозначение

$$\alpha = \frac{C - A}{A}r \quad (26.11)$$

и, интегрируя уравнение (26.10), найдем:

$$s = s_0 e^{i\alpha t}, \quad (26.12)$$

где  $s_0$  — постоянная интегрирования.



Здесь  $s$  — проекция угловой скорости  $\omega$  на экваториальную плоскость волчка, если ею пользоваться в качестве *гауссовой* плоскости для изображения  $s^1$ . Из уравнения (26.12) видно, что эта проекция описывает круг радиуса  $s_0$  постоянной угловой скоростью  $\alpha$ . Вместе с этим вектор угловой скорости  $\omega$  описывает круговой конус вокруг оси фигуры; угол раствора этого конуса  $\beta$  определяется уравнением

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{r} = \frac{|s_0|}{r}. \quad (26.12a)$$

В таком виде представляется *регулярная прецессия наблюдателю*, связанному с волчком (конечно, с точки зрения неподвижного в пространстве наблюдателя ось фигуры волчка в каждый данный момент вращается вокруг мгновенной оси вращения, которая, как мы знаем, в свою очередь описывает круговой конус вокруг неподвижного вектора момента импульса  $\mathbf{N}$ ). В применении к вращению Земли, которое мы будем рассматривать, наиболее удобна как раз точка зрения связанного с «волчком» наблюдателя — обитателя Земли.

Земля представляет собой сплюснутый волчок. Назовем *геометрическим северным полюсом* точку пересечения оси фигуры Земли с ее поверхностью; он, вообще говоря, не совпадает с *кинематическим северным полюсом* — точкой пересечения вектора угловой скорости вращения Земли с ее поверхностью. По теории Эйлера, изложенной в настоящем параграфе, кинематический северный полюс описывает окружность вокруг геометрического северного полюса — так называемый *круг Эйлера*. Поскольку последний является траекторией полюса вращения, он называется также *полодией*.

Удобной мерой сплюснутости Земли является так называемая эллиптичность:

$$\frac{C - A}{A} \sim \frac{1}{300}. \quad (26.13)$$

Угловая скорость вращения Земли определяется из продолжительности суток, а именно:

$$r \sim \omega = \frac{2\pi}{\text{сутки}}. \quad (26.14)$$

---

<sup>1</sup>Под гауссовой плоскостью автор понимает здесь плоскость комплексной переменной  $s$ . (*Прим. ред.*).

Отсюда, согласно обозначению (26.11), следует:

$$\alpha = \frac{C - A}{A} r = \frac{2\pi}{300} (\text{сутки})^{-1}. \quad (26.15)$$

Таким образом, Эйлеров период прецессии составляет

$$\frac{2\pi}{\alpha} = 300 \text{ суток} = 10 \text{ месяцев}. \quad (26.16)$$

Мы привыкли считать ось вращения Земли неподвижно расположенной в теле нашей планеты и проходящей через ее геометрические полюсы. Но, строго говоря, это не соответствует действительности. Всякое перемещение масс на Земле в направлении меридиана должно вызывать смещение ее оси вращения<sup>1</sup>, равно как всякое перемещение масс в направлении параллели должно изменять угловую скорость вращения Земли, а следовательно, продолжительность суток; оба эти явления представляют собой следствия закона сохранения момента импульса. Когда подобное перемещение прекратится и кинематический полюс Земли окажется отклоненным, он снова начнет совершать свое движение по кругу Эйлера вокруг геометрического полюса.

Сравним теперь с этими выводами из теории Эйлера результаты наблюдений колебаний полюса учеными различных стран. Для периода 1895–1900 гг. получается пологая, представленная на рис. 44.

Согласно этим наблюдениям, среднее угловое отклонение кинематического полюса (т. е. средний угловой радиус круга Эйлера) составляло в названные годы приблизительно  $\frac{1}{8}''$ , что соответствует линейному отклонению по земной поверхности, равному приблизительно 4 м. Но вместо периода полного оборота в 10 месяцев мы имеем, как показано на рис. 44, за 4 года (1893–1900 г)  $3\frac{1}{2}$  оборота, что соответствует одному обороту в 14 месяцев.

Период в 14 месяцев называется в честь открывшего его ученого *периодом Чандлера*. Величину этого периода объясняют упругими деформациями Земли вследствие вызванного смещением полюсов изменения центробежных воздействий. Модуль упругости Земли приблизительно равен модулю упругости стали.

---

<sup>1</sup>Наибольшие перемещения масс на Земле связаны с ежегодными смещениями максимума воздушного давления, происходящими между азиатским континентом и Тихим океаном.

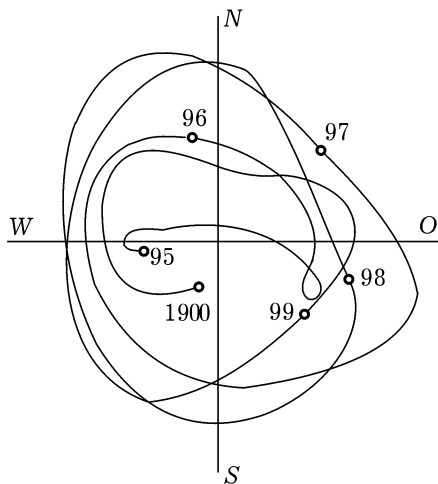


Рис. 44. Изменения положения полюса за время с 1895 по 1900 г., иллюстрирующие период Чандлера

Наблюдаемую полодию, представленную на рис. 44, можно понимать как наложение: 1) колебаний, происходящих с периодом Чандлера, 2) годовых колебаний, очевидно метеорологического происхождения, и 3) нерегулярных отклонений указывающих, по-видимому, на какие-то единовременные перемещения масс. По поводу десятимесячного периода Эйлера, который был получен как результат идеализированного представления о Земле, как о твердом теле, у нас никаких дополнительных замечаний нет.

В соответствии с принятой в теории волчка терминологией, мы назвали движение земной оси, исследованное впервые Эйлером, «свободной прецессией». Однако это противоречит терминологии, установившейся в астрономии. Как известно, термином «астрономическая прецессия» обозначают медленное вращение земной оси вокруг нормали к плоскости эклиптики, следствием которого является непрерывное смещение точек равноденствия в направлении, противоположном движению Земли по орбите, составляющее немного более  $50''$  в год. Этой величине «опережения» соответствует период полного обращения земной оси вокруг нормали к плоскости эклиптики, равный  $\frac{300^\circ}{50''} = 26\ 000$

лет. Вместо предварения (опережения) точек равноденствия можно говорить также о «предварении линии узлов» (линии пересечения плоскости эклиптики с экваториальной плоскостью Земли); как мы отмечали выше, термин «линия узлов» заимствован из астрономии.

Астрономическая прецессия не является *свободным* движением Земли-волчка; это движение *вынужденное*, возникающее как результат одновременного притяжения Земли Солнцем и Луной. Уясним себе действие этого притяжения с помощью рис. 45, причем нам придется качественно предвосхитить теорию тяжелого симметричного волчка.

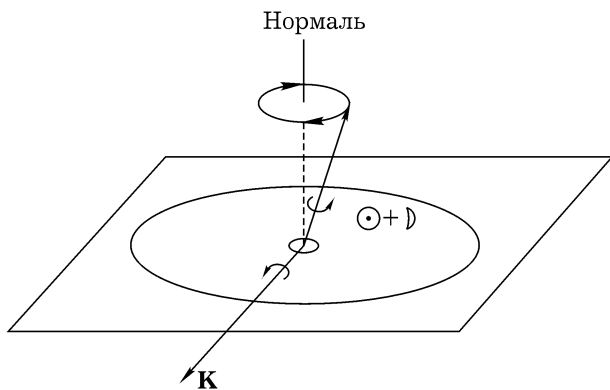


Рис. 45. Астрономическая прецессия земной оси

На фигуре представлена плоскость эклиптики и в этой плоскости — круг, по всей площади которого следует мысленно равномерно распределить массы Солнца  $\odot$  и Луны  $\text{)}\text{)}$  (собственно говоря, два круга — «круг Солнца» и «круг Луны»<sup>1</sup>, которые мы здесь слили в одно целое). Это равномерное распределение масс равносильно усреднению по времени мгновенных положений Солнца и Луны за период их относительного обращения вокруг Земли (в смысле метода теории возмущений Гаусса). Это усреднение по времени может быть оправдано тем, что времена относительного обращения Солнца и Луны вокруг Земли очень малы по сравнению с вышеупомянутым периодом прецессии, так что прецессия ни в коем случае не может зависеть от положения Солн-

<sup>1</sup> Воздействие Луны, ввиду ее меньшей удаленности от Земли, даже превосходит действие Солнца приблизительно и два раза.

ца и Луны в каждый данный момент времени. В центре круга  $\odot + \text{)}$  мы видим в разрезе Землю с ее двумя вздутьями у экватора. Только эти вздутья и играют роль для рассматриваемого воздействия, а именно: притяжение кольца  $\odot + \text{)}$  стремится установить их в плоскости эклиптики, что непосредственно очевидно. Таким образом, мы имеем дело с вращающим моментом относительно линии узлов; направление этого момента указано стрелкой. Это — вращающий момент того же рода, что и вращающий момент силы тяжести, действующий на волчок, центр тяжести которого находится ниже точки опоры. Поэтому и результат таков же, как для волчка: вместо того, чтобы поддаться «непосредственному» воздействию вращающего момента, ось фигуры Земли-волчка отклоняется в сторону и описывает конус прецессии вокруг вертикали (нормали к эклиптике).

Правда, *регулярная* прецессия представляет собой лишь частный случай движения тяжелого волчка (ср. стр. 183); наиболее же общим видом движения, которого следует ожидать в данном случае, является упомянутая там же *псевдoreгулярная* прецессия, которая представляет собой результат наложения регулярной прецессии и малых «нutationей». Эти нутации являются, однако, не чем иным, как свободными «коническими» качаниями оси фигуры, т. е. в нашем случае колебаниями полюса с периодом, равным периоду Эйлера (точнее, если учесть деформацию Земли, периоду Чандлера). Таким образом, ожидаемая псевдoreгулярная прецессия действительно получается в результате наложения этих свободных нутаций на астрономическую прецессию.

Здесь нам снова приходится столкнуться с двояким значением термина. В *астрономии* под *нutationей* понимают не свободное, а вынужденное *движением Луны* колебание земной оси. Орбита Луны не лежит в плоскости эклиптики, как это допускалось на рис. 45, а наклонена к ней под углом в  $5^\circ$ . Под действием совместного притяжения Солнца и Земли нормаль к лунной орбите описывает конус прецессии вокруг нормали к эклиптике. Эта прецессия означает *обратное движение лунных узлов* (точек пересечения орбиты Луны с плоскостью эклиптики), которое, однако, происходит гораздо скорее, чем прямое движение земных узлов, а именно в течение  $18\frac{2}{3}$  лет. Понятно, что и земная ось, со своей стороны, испытывает влияние этих возмущений: обратное движение лунных узлов вызывая *астрономическую нutationю земной оси*, происходящую с тем же периодом.

### 3. Движение трехосного волчка. Исследование устойчивости неизменных вращений его вокруг главных осей инерции

Перейдем к интегрированию уравнений Эйлера (26.4) для случая  $A \neq B \neq C$ . Умножая их соответственно на  $p$ ,  $q$ ,  $r$  и складывая, получаем:

$$Ap \frac{dp}{dt} + Bq \frac{dq}{dt} + Cr \frac{dr}{dt} = 0.$$

Интегрирование дает:

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \text{const} = W. \quad (26.17)$$

Здесь  $W$  — постоянная энергии, а левая часть уравнения выражает кинетическую энергию [в соответствии с уравнением (22.126), преобразованным к главным осям инерции]. Уравнения (26.4) можно далее умножить соответственно на  $Ap$ ,  $Bq$ ,  $Cr$ ; при последующем их сложении в правой части опять получается нуль. Интегрируя, получим:

$$(Ap)^2 + (Bq)^2 + (Cr)^2 = \text{const} = |\mathbf{N}|^2. \quad (26.18)$$

Слева стоит сумма квадратов компонент момента импульса. Она, как известно, остается постоянной в случае свободного движения волчка, в то время как сами эти компоненты при движении изменяются.

Уравнения (26.17) и (26.18) — линейные однородные уравнения относительно  $p^2$ ,  $q^2$  и  $r^2$ , из них мы можем выразить, например,  $q^2$  и  $r^2$  через  $p^2$ :

$$\left. \begin{aligned} q^2 = \beta_1 - \beta_2 p^2, \quad \beta_1 &= \frac{2WC - |\mathbf{N}|^2}{B(C - B)}, \quad \beta_2 = \frac{A(C - A)}{B(C - B)}, \\ r^2 = \gamma_1 - \gamma_2 p^2, \quad \gamma_1 &= \frac{2WB - |\mathbf{N}|^2}{C(B - C)}, \quad \gamma_2 = \frac{A(B - A)}{C(B - C)}. \end{aligned} \right\} \quad (26.19)$$

Подставляя эти значения  $q$  и  $r$  в первое из уравнений (26.4), получим

$$\frac{dp}{\sqrt{(\beta_1 - \beta_2 p^2)(\gamma_1 - \gamma_2 p^2)}} = \frac{B - C}{A} dt. \quad (26.20)$$

Таким образом,  $t$  является эллиптическим интегралом первого рода от  $p$  (ср. стр. 133); отсюда следует, что (как доказывается в теории функций)  $p$  есть эллиптическая функция времени. То же самое, разумеется, относится и к слагающим  $q$  и  $r$ .

Кроме того, из уравнений (26.17) и (26.18) следует, что конус полодии является не круговым конусом, как в случае симметричного волчка, а конусом четвертого порядка.

Теперь рассмотрим вращения несимметричного волчка вокруг каждой из его главных осей; эти вращения, как мы знаем (ср. § 25, конец раздела 3), являются неизменными вращениями. Предположим, например, что

$$A > B > C.$$

Покажем, что вращения вокруг главных осей, соответствующих наибольшему и наименьшему главным моментам инерции, являются устойчивыми, а вращение вокруг главной оси, соответствующей среднему из главных моментов инерции, — неустойчивым. Мы будем исходить из преобразованных уравнений (26.17) и (26.18), введя в них компоненты момента импульса  $L$ ,  $M$ ,  $N$ , что весьма удобно для последующего графического представления:

$$\frac{L^2}{A} + \frac{M^2}{B} + \frac{N^2}{C} = \text{const}, \quad (26.21a)$$

$$L^2 + M^2 + N^2 = \text{const} = |\mathbf{N}|^2. \quad (26.21b)$$

Уравнение (26.21a) представляет сферу радиуса  $|\mathbf{N}|$ , а уравнение (26.21b) — трехосный эллипсоид.

С л у ч а й А. Вращение вокруг наибольшей оси эллипсоида, выражаемого уравнением (26.21a). В случае чистого вращения сфера касается эллипсоида снаружи в точке  $A$  рис. 46а. Легкий толчок, вообще говоря, немного изменяет как сферу, так и эллипсоид. Вместо точки касания  $A$  сферы с эллипсоидом получается небольшая кривая пересечения, проходящая в непосредственной близости от точки  $A$ , образуется узкий конус полодии. Первоначальное вращение оказывается устойчивым.

Вполне идентичен и случай В, когда вращение происходит вокруг наименьшей оси эллипсоида (26.21a). В этом случае сфера касается эллипсоида изнутри. При легком толчке точка касания  $A$  сферы с эллипсоидом переходит в небольшую кривую, проходящую опять-таки

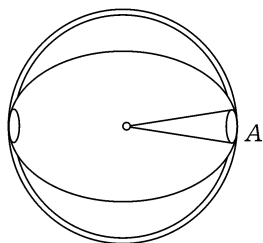


Рис. 46а. Устойчивое вращение трехосного волчка вокруг наибольшей оси эллипсоида инерции

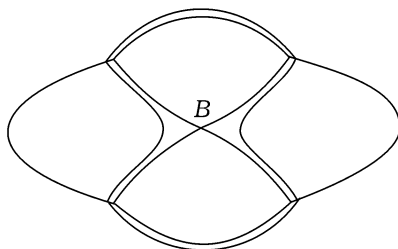


Рис. 46б. Неустойчивое вращение трехосного волчка вокруг средней оси эллипсоида инерции

вблизи точки  $A$ . И в этом случае первоначальное вращение является *устойчивым*.

Случай  $B$ . Вращение вокруг средней оси эллипсоида. В этом случае сфера пересекает эллипсоид по кривой четвертого порядка; двойная точка последней  $B$  (передняя точка на рис. 46б) изображает первоначальное вращение. При легком толчке кривая пересечения распадается на две ветви. По одной из этих ветвей движется ось вращения, все больше отдаляясь от своего начального положения в теле<sup>1</sup>. Вращение является неустойчивым.

Поучительно доказать то же самое аналитическим путем, исходя из дифференциальных уравнений (26.4). Можно показать (см. задачу IV.2), что боковые слагающие угловой скорости вращения (появление которых вызвано небольшим возмущением) удовлетворяют системе двух линейных дифференциальных уравнений, имеющих в случаях  $A$  и  $B$  решения *тригонометрического* вида, а в случае  $B$  — решение *экспоненциального* вида (метод малых колебаний в качестве критерия устойчивости).

Продедаем следующий опыт с полной спичечной коробкой. Возьмем коробку большим и указательным пальцами за *короткие ребра* и, придав ей вращение вокруг оси, параллельной этим ребрам, отбросим ее от себя. Двигаясь по воздуху, коробка будет все время повернута эти-

<sup>1</sup>Утверждение автора неточно. На самом деле по одной из упомянутых ветвей движется относительно тела не сама ось вращения, а вектор момента количества движения. (Прим. ред.)



кеткой в одну и ту же сторону. Подобное же явление, хотя и менее отчетливо, будет наблюдаться при вращении отброшенной коробки вокруг *длинного ребра* (с той разницей, что сохранять положение будет наименьшая грань). Если же отбросить коробку, придав ей вращение вокруг *среднего ребра*, то наблюдается чередование различных граней, что и говорит о неустойчивости вращения.

## § 27. ДЕМОНСТРАЦИОННЫЕ ОПЫТЫ ПО ТЕОРИИ ВОЛЧКА И ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ЭТОЙ ТЕОРИИ

Опишем прежде всего хорошо известное устройство карданова подвеса, при помощи которого можно произвести особенно наглядные опыты для иллюстрации теории волчка.

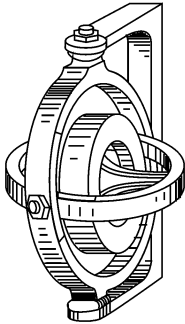


Рис. 47. Волчок в кардановом подвесе. Ось вращения внешнего кольца вертикальна, ось вращения внутреннего кольца горизонтальна и направлена спереди назад, ось вращения маховичка горизонтальна и направлена слева направо

Подвес состоит из двух колец — внешнего и внутреннего. Внешнее кольцо может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, укрепленной в стойке, а внутреннее кольцо — вокруг горизонтальной оси, укрепленной во внешнем кольце. Во внутреннем кольце вращается маховичок на цапфах, ось которых перпендикулярна к оси вращения внутреннего кольца. На рис. 47 ось маховичка направлена перпендикулярно к плоскости внешнего кольца, вследствие чего плоскость внутреннего кольца расположена горизонтально. Назовем эту начальную установку прибора его нормальным положением.

На оси маховичка находится приспособление, позволяющее сообщить маховичку в его нормальном положении, при покоящихся внешнем и внутреннем кольцах, столь значительный момент вращения, что все явления, в основном, определяются именно этим моментом, в то время как массами внешнего и внутреннего колец можно пренебречь.

Во всех описываемых ниже опытах предполагается наличие значительного момента вращения маховичка и нормальное положение его в начале опыта.

1. Нажмем слегка на *внутреннее кольцо* в направления сверху вниз. Это кольцо не будет опускаться, но *внешнее кольцо* начинает вращаться так, что ось фигуры маховичка отклоняется вперед или назад (в горизонтальной плоскости), в зависимости от положения точки, в которой мы произвели давление. Вместо того, чтобы оказывать давление на внутреннее кольцо, можно односторонне нагрузить его небольшим грузом. Тогда волчок будет совершать *регулярную прецессию* до тех пор, пока его момент импульса будет достаточно велик, причем ось фигуры во время прецессии волчка будет оставаться горизонтальной.

2. Нажмем теперь на *внешнее кольцо*. Это кольцо остается неподвижным, *внутреннее же кольцо* начинает вращаться и отклоняется от своего горизонтального положения вверх или вниз, в зависимости от того, в каком направлении было произведено давление на внешнее кольцо. Даже сильный удар, сообщенный внешнему кольцу, не оказывает на него заметного действия. Мы увидим в этом случае лишь быстрое «коническое» маятникообразное движение оси фигуры вокруг оси, проходящей вблизи нормального положения. Прибор сделан настолько хорошо, что он может выдержать даже сильные удары кулаком.

3. Если давление на внешнее кольцо сохраняется и ось фигуры волчка при дальнейшем вращении внутреннего кольца приближается к вертикали, то «сопротивляемость» внешнего кольца непрерывно уменьшается. Теперь внешнее кольцо без труда может быть приведено в быстрое вращение, *но только в направлении, соответствующем направлению первоначально произведенного давления*. При попытке вызвать вращение внешнего кольца в *противоположном направлении* маховичок «переворачивается»: его ось фигуры стремится внезапно принять противоположное направление, причем внутреннее кольцо, очевидно, поворачивается на  $180^\circ$ . Хотя теперь мы можем беспрепятственно вызвать вращение внешнего кольца в новом (противоположном начальному) направлении, но попытка вынудить вращение этого кольца в первоначальном направлении снова вызовет «переворачивание» оси волчка.

4. В этих опытах проявляется обнаруженная Фуко *тенденция к гомологичному, или одинаково направленному, параллелизму осей вращения*. Вертикальное положение оси фигуры волчка *устойчиво* до тех пор, пока направление его вращения совпадает с направлением вращения

внешнего кольца. В случае противоположного направления этих двух вращений вертикальное положение оси фигуры волчка *в высшей степени неустойчиво*, и эта ось стабилизируется лишь тогда, когда она примет противоположное направление, при котором имеет место гомологичный параллелизм обеих осей вращения. С помощью соответствующего ритмичного чередования давлений на внешнее кольцо можно вызвать непрерывное «перекидывание» маховичка вокруг оси внутреннего кольца.

5. Если жестко скрепить внутреннее кольцо с внешним, т. е. лишить его подвижности, то «сопротивляемость» волчка исчезнет. Волчок будет без сопротивления поддаваться всякому давлению, произведенному на внешнее кольцо, как будто он вовсе не обладает моментом вращения. Типичные гироскопические эффекты наблюдаются только у волчка с *тремя степенями свободы* и отсутствуют у волчка с *двумя степенями свободы*. Можно, однако, возместить недостающую степень свободы, укрепив волчок на вращающемся диске, описанном на стр. 101, таким образом, чтобы ось внешнего кольца (прежде вертикальная) образовала с вертикальной осью вращающегося диска не слишком малый угол. В этом случае ось волчка с двумя степенями свободы устремится в направлении оси вращения диска (подобно тому, как стрелка компаса поворачивается в направлении Северного полюса), и притом так, чтобы угловые скорости вращения диска и волчка были параллельны и одинаково направлены<sup>1</sup>; направления движения обоих концов оси фигуры волчка при этом переходе в устойчивое положение определяются, очевидно, направлением вращения диска.

Все описанные явления — следствия основного закона (25.5):

$$d\mathbf{N} = \mathbf{M} dt. \quad (27.1)$$

1. При давлении на *внутреннее кольцо* момент  $\mathbf{M}$  направлен горизонтально параллельно оси вращения внутреннего кольца. Момент импульса  $\mathbf{N}$  на рис. 47 направлен вправо или влево, так что момент  $\mathbf{M}$  отклоняет его в *боковом направлении*. Таким образом, если мы вправо

<sup>1</sup>Точнее, ось волчка установится в плоскости, проходящей через ось вращения диска и ось вращения внешнего кольца. Она установилась бы параллельно оси вращения диска, если бы, не скрепляя между собой внешнее и внутреннее кольца, закрепить внешнее кольцо на диске так, чтобы ось вращения внутреннего кольца была горизонтальна. (*Прим. ред.*)

допустить, что ось фигуры, первоначально совпадавшая с направлением момента импульса, непрерывно следует за ним, то боковое отклонение этой оси, а следовательно, и вращение *внешнего кольца*, получает весьма простое объяснение. Справедливость этого допущения при достаточно быстром вращении волчка будет нами обоснована, впрочем, только в § 35 (см. приведенное там изложение теории псевдорегулярной прецессии).

2. При давлении на *внешнее* кольцо момент  $M$  направлен вертикально. Момент импульса, первоначально направленный горизонтально (вправо или влево), отклоняется, таким образом, вверх или вниз. Тем самым объяснено (при том же допущении, что и в п. 1) вращение *внутреннего* кольца. При очень сильном ударе по внешнему кольцу наше допущение относительно того, что ось фигуры волчка следует за направлением вектора момента импульса, оказывается лишь приближенно правильным; в этом случае и возникает упомянутое выше «коническое» маятниковобразное движение, которое характеризуется небольшим расхождением между осью фигуры и вектором момента импульса волчка.

3 и 4. Если момент импульса направлен почти вертикально, то вращение внешнего кольца в направлении, *совпадающем* с вращением маховичка, приводит к еще большему приближению оси вращения последнего к вертикали. В этом случае оба кольца и маховичок вращаются, как одно целое, вокруг вертикали. «Спротивляемость» внешнего кольца исчезает. Напротив, при вращении внешнего кольца в противоположном направлении достаточно лишь незначительного отклонения оси вращения маховичка от вертикали, чтобы вызвать дальнейшее резкое удаление от нее; почти вертикальное положение оси маховичка оказывается *неустойчивым* по отношению к этому (негомологичному) вращению внешнего кольца.

5. При жестком скреплении внутреннего кольца с внешним ось вращения маховичка лишена возможности перемещаться в вертикальной плоскости под действием направленного по вертикали момента  $M$ , вызванного вращением внешнего кольца. Поэтому вращение внешнего кольца передается всей системе. Это возможно потому, что усилия, возникающие при соответствующем горизонтальном перемещении оси вращения маховичка, благодаря жесткому соединению обоих колец, воспринимаются подшипниками внешнего кольца. Иначе обстоит дело при наличии вращающегося диска; здесь ось вращения маховичка мо-

жет, по крайней мере отчасти, «следовать» за внешним моментом  $M$ , вследствие чего она устанавливается параллельно оси вращения диска.

Теперь остановимся на некоторых технических применениях теория гироскопа (волчка)<sup>1</sup>.

### 1. Прибор для стабилизации торпеды

По внешнему виду торпеда напоминает большую рыбу. В головной части торпеды помещается разрывной заряд, а за ним расположена камера со сжатым воздухом (пневматическая камера), служащая источником энергии для двигателей гироскопа и приборов бокового и глубинного управления. Затем следует машинное отделение для моторов, обеспечивающих с помощью винтов поступательное движение торпеды. В хвостовой части торпеды, непосредственно перед винтами, помещается представляющий для нас наибольший интерес прибор для стабилизации торпеды, изображенный на рис. 47. Он изобретен австрийским инженером Обри и служит для бокового (горизонтального) *управления торпедой*.

Прежде всего скажем несколько слов о сравнительно простом *управлении по глубине*. Торпеда должна двигаться в воде на определенной заранее установленной глубине. Для этого служит поршень, находящийся под действием давления воды. Если установленная глубина превышена, то давление воды переместит поршень назад, если же эта, глубина не достигнута, то поршень передвинется вперед. В обоих случаях поршень при помощи сжатого воздуха приводит в действие рули глубины, отклоняющие торпеду вверх или, соответственно, вниз. Ввиду этого, траектория торпеды в вертикальной плоскости представляет собой волнообразную линию, «вьющуюся» около горизонтали, проведенной на желаемой глубине.

Более трудным делом является боковое управление: несмотря на наличие водяных течений, торпеда должна сохранять начальное направление, полученное при выстреле. Для этого необходим прибор, способный независимо ориентироваться в пространстве. Этой способностью обладает гироскоп. В момент выстрела маховичок прибора Обри приводится в быстрое вращение. Благодаря этому внешнее кольцо оказывается фиксированным в пространстве, как это имело место в опы-

---

<sup>1</sup> Прекрасное элементарное изложение технических применений гироскопа можно найти в книге Е. Л. Николаи. Гироскоп, Гостехиздат, 1947. (*Прим. ред.*)

те 2; оно сохраняет свою ориентацию также и при боковом отклонении торпеды. В последнем случае корпус торпеды поворачивается относительно неподвижной плоскости внешнего кольца. Штифт, укрепленный на внешнем кольце (виден на рис. 47 слева вверху), приходит в соприкосновение с клапаном, укрепленным на корпусе торпеды; штифт открывает клапан и таким образом дает возможность сжатому воздуху привести в действие боковой руль, который и выправляет торпеду в боковом направлении. Таким образом, и в горизонтальной плоскости траектория торпеды имеет вид волнообразной линии, вьющейся около линии выстрела.

Заметим, что гироскоп действует здесь по отношению к боковому рулю в качестве *прибора управления*, а не в качестве непосредственного *двигателя*. Для последней цели, учитывая массивность торпеды, его мощность оказалась бы недостаточной.

## 2. Успокоитель качки корабля и аналогичные приборы

Бессемер (имя которого широко известно металлургам) около 1870 г. построил особую салон-каюту для судоходства на Ламанше. Эта каюта подвешивалась так, что могла свободно качаться вокруг продольной оси судна, и должна была стабилизироваться вращением маховика против боковой качки. Однако ось маховика жестко закреплялась в каюте, вследствие чего ему не хватало необходимой третьей степени свободы (ср. выше, опыт 5). Поэтому конструкция оказалась неудачной, и вскоре от нее пришлось отказаться.

Эта проблема, как и проблема уравнивания масс (стр. 103), была успешно разрешена О. Шликом. Маховик (имеющий окружную скорость  $150 \text{ м/сек}$ , вес  $5100 \text{ кг}$  и диаметр  $1,6 \text{ м}$ ) укрепляется в раме, которая, подобно маятнику, может качаться вокруг оси, расположенной поперек судна; при этом ось фигуры маховика колеблется в вертикальной плоскости продольного сечения судна. Эта рама соответствует внутреннему кольцу, а сам корпус судна — внешнему кольцу нашего демонстрационного волчка. Роль прежней (см. рис. 47) вертикали теперь играет продольная ось судна; прежним поворотам вокруг вертикали теперь соответствует боковая качка судна. Таким образом, необходимые три степени свободы представлены здесь боковой качкой, колебаниями рамы и собственным вращением маховика. При боковой качке ось фигуры маховика (расположенная в нормальном положении

вертикально) отклоняется вместе с рамой попеременно то вперед, то назад, причем энергия боковой качки судна превращается в кинетическую и потенциальную энергию рамы. Боковая качка судна и колебания рамы связаны друг с другом. В частном случае, когда оба соответствующих собственных колебания находятся в резонансе, имеют место соотношения, аналогичные соотношениям для симпатических маятников. Впрочем, этого еще недостаточно для «гашения» колебаний судна. Однако оказывается возможным поглотить энергию качаний рамы и, тем самым, энергию боковой качки корабля с помощью тормозов, действующих в опорных цапфах рамы подобно тому, как с помощью колесных тормозов уменьшают скорость вагона. При этом торможение рамы не должно быть настолько сильным, чтобы вообще ликвидировать отклонение оси гироскопа, ибо в этом случае мы снова имели бы дело с неэффективным волчком с двумя степенями свободы. Заснятые диаграммы боковой качки показывают, что действительно существует оптимальное среднее торможение: при включении гироскопа амплитуды колебания судна почти мгновенно уменьшались до  $\frac{1}{10} - \frac{1}{20}$  первоначальной амплитуды, причем отклонения рамы составляли 30–40°.

Причина, почему этот успокоитель качки все же не нашел широкого применения, заключается отчасти в небезопасности конструкции (быстро вращающийся массивный маховик является опасным «пассажиром»), отчасти же в том, что нашелся еще более сильный «конкурент», именно успокоительная цистерна Фрама, действие которой основано на совершенно ином принципе.

С изложенной выше проблемой связана проблема стабилизации с помощью гироскопических эффектов установленной на корабле вращающейся платформы, например, для корабельных орудий. Мы не знаем, в какой мере разрешена эта проблема практически; работы в этой области проводятся, разумеется, уже давно и во всех странах.

### 3. Гирокомпас

Гирокомпас является весьма тонко и прекрасно разработанной конструкцией гироскопа. Идея гирокомпаса принадлежит Фуко. Доказав своими опытами с маятником вращение Земли (гл. V, § 31), он решил добиться того же самого с помощью опытов с волчком. Из различных методов, примененных им для этой цели, упомянем замену магнитного компаса волчком с двумя степенями свободы, укрепленным в горизон-

тальной плоскости; вместо того, чтобы указывать на *магнитный* Северный полюс, этот волчок прямо указывает на полюс вращения Земли — собственно *кинематический* Северный полюс. Это устройство мы по существу описали в п. 5 наших демонстрационных опытов, рассматривая помещенный на вращающемся диске волчок с закрепленным внутренним кольцом. Теперь вращающемуся диску соответствует вращающаяся Земля. Различие заключается только в том, что вращающемуся диску мы могли сообщить угловую скорость любой величины и поэтому получали резко выраженный эффект «установки» (ориентации) оси волчка, тогда как угловая скорость вращения Земли весьма мала, и поэтому установка «гироскопа Фуко» происходит крайне медленно. При описании опытов с волчком на вращающемся диске мы отмечали, что ось вращения внешнего кольца должна образовать с осью вращения диска не слишком малый угол. При рассмотрении вращения Земли этому углу соответствует дополнительный угол географической широты места наблюдения. На Северном и Южном полюсах Земли, где этот угол равен нулю, прекращается и «ориентирующее» действие волчка. Вообще, «ориентирующее» действие волчка пропорционально угловой скорости вращения Земли, моменту импульса волчка и синусу названного угла.

Опыты Фуко лишь указали на существование описанного эффекта. Полное же доказательство этого эффекта дал Герман Аншютц-Кемпф, пользовавшийся все более и более совершенными конструкциями гироскопа. Его первоначальной целью было достижение Северного полюса на подводной лодке под дрейфующим льдом. Ввиду того, что показания магнитного компаса вблизи Северного полюса становятся очень неточными, а внутри подводной лодки этот компас вовсе не пригоден, Аншютц решил воспользоваться волчком в качестве указателя направления. Правда, ему не удалось достичь Северного полюса, но в результате проводившихся им в продолжение многих лет опытов был создан весьма совершенный прибор, необходимый в судоходстве как в военное, так и в мирное время.

В отличие от гироскопа Фуко, волчок Аншютца не укреплен в горизонтальной плоскости, а приводится в эту плоскость действием собственного веса (подобно маятнику). В первоначальной конструкции прибора волчок плавал в сосуде с ртутью. Более поздние конструкции состояли из двух или трех волчков, действия которых взаимно усиливались и корригировались. Постоянство момента импульса волчка



обеспечивается с помощью электрического привода. В последней конструкции Аншютца вся система заключена в шар, «плавающий» в другом шаре с малым зазором и почти без трения. Так как к прибору нельзя прикасаться в течение нескольких месяцев плавания, то необходимо было обеспечить наиболее целесообразную автоматическую смазку его осевых подшипников.

Особое значение имеют меры для устранения вредных влияний собственного движения судна. Когда судно идет по кривой или изменяет свою скорость, его гирокомпас, «связанный» (наподобие маятника) с горизонтальной плоскостью, подвергается действию возникающих сил инерции. Силы инерции оказывают давление на ось фигуры волчка и отклоняют ее в сторону, что должно вызвать ложные показания прибора. Можно показать, что собственное движение судна становится в этом отношении «безвредным», если период свободных колебаний стрелки компаса около меридиана совпадает с периодом качаний математического маятника с длиной, равной радиусу Земли

$$R = \frac{2}{\pi} \cdot 10^7 \text{ м,}$$

а именно:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = \sqrt{8\pi} \cdot 10^3 \text{ сек.} = 84,4 \text{ мин.}$$

(закон Шулера, обобщенный Глитчером)<sup>1</sup>. Интересным применением компаса Аншютца в мирных условиях является автоматическое гирокопическое управление океанских пароходов. Для того, чтобы судно могло следовать по своему курсу при наличии волн и морских течений, необходимо непрерывное внимание штурмана и соответствующее противодействие рулевой машины. Однако противодействие, оказываемое рулевой машиной морскому течению, всегда несколько запаздывает, вследствие чего судно вынуждено проходить излишние участки пути. Напротив, гирокомпас (ср. описание прибора для стабилизации торпеды) является весьма чувствительным прибором управления, воспринимающим внешние влияния значительно точнее и быстрее, чем человек, и притом прибором, срабатывающим мгновенно. Благодаря этим контрамерам, путь судна становится почти прямолинейным (строго говоря,

<sup>1</sup>См. «Wissensch. Vrröffentl. aus den Siemenswerken», Bd.19,57 (1940).

проходящим по локсодромии), что означает значительную экономию энергии. Поэтому каждый более или менее крупный пассажирский парход оборудуется теперь этим автоматическим рулевым устройством.

Дирижабли также оборудованы гироскопасами, а самолеты — «волчками-горизонтами».

#### 4. Гироскопические эффекты у колес железнодорожных вагонов и велосипедов

Катящийся колесный стан железнодорожного вагона представляет собой гироскоп, момент импульса которого при быстром движении поезда может стать весьма значительным. Для того, чтобы при *прохождении* поезда по *криволинейному* пути отклонять упомянутый момент в положение, отвечающее нормали к кривой, необходим, согласно уравнению (27.1), вращающий момент  $M$ , направленный в сторону движения поезда. Так как такого момента  $M$  нет, то в качестве «гироскопического эффекта» возникает противоположный момент, прижимающий колесный стан к наружному рельсу и отрывающий его от внутреннего рельса. Этот момент складывается с моментом центробежной силы относительно направления движения поезда (для уменьшения влияния центробежного момента придают наружному рельсу при укладке пути некоторое превышение над внутренним). Оба момента пропорциональны  $mv\omega$ , где  $v$  — скорость движения поезда,  $\omega$  — угловая скорость на кривой; величина  $m$  в нашем случае является массой колесного стана, приведенной к окружностям колес, а в выражении центробежной силы — общей массой вагона, приходящейся на колесный стан. Таким образом, рассматриваемый гироскопический момент очень мал по сравнению с моментом центробежной силы; его можно было бы учесть незначительным дополнительным превышением наружного рельса над внутренним.

Большую опасность представляют различные *неравномерности* в *вертикальной укладке* пути — «выбоины пути» (сюда относится также возрастающее и убывающее превышение наружного рельса в начале и в конце криволинейного участка пути).

Подобные неравномерности вызывают отклонение момента импульса в вертикальном направлении и, следовательно, противоположный момент относительно вертикали, стремящийся оторвать колесный

стан от рельсов и в пределах зазора между ними прижимающий реборды колес попеременно то к одному, то к другому рельсу. Это явление действительно наблюдалось при пробных рейсах скоростных электропоездов. Для непрерывного контроля точности укладки рельсового пути пользуются испытательными вагонами, снабженными гироскопическими устройствами.

*Велосипед* представляет собой дважды неголономную систему, поскольку при пяти степенях свободы<sup>1</sup> в конечной области он имеет только три степени свободы в бесконечно малой области (если не учитывать степеней свободы велосипедиста). Этими тремя степенями свободы являются: вращение заднего колеса в его мгновенной плоскости (с которым вращение переднего колеса связано условием его качения), вращение вокруг руля и совместное вращение обоих колес вокруг прямой, соединяющей их точки опоры. Как известно, устойчивость этой системы при достаточно большой скорости езды основана на том, что поворотом руля или произвольными движениями тела велосипедист вызывает соответствующие *центробежные воздействия*. Сама конструкция колес показывает, что их гироскопическое действие очень мало по сравнению с центробежным; для усиления *гироскопического действия* колеса нужно было бы снабдить его массивным ободом (а не делать его, как обычно, возможно более легким). Тем не менее, можно показать<sup>2</sup>, что даже эти слабые гироскопические эффекты колес способствуют повышению устойчивости велосипеда. Дело в том, что гироскопические силы, как и при автоматическом гироскопическом управлении судна, быстрее реагируют на понижение центра тяжести системы, чем центробежные силы: при малых колебаниях, которые нужно рассматривать при оценке устойчивости, гироскопические воздействия сдвинуты по фазе лишь на четверть периода, в то время как центробежные воздействия сдвинуты на половину периода по сравнению с колебаниями центра тяжести.

---

<sup>1</sup>Как колесо в задаче II.1.

<sup>2</sup>F. Klein и A. Sommerfeld, *Theorie des Kreisels*, Н. IV, S.880 и ff.

Конечно, для рассмотрения устойчивости велосипеда необходимо исключить оказываемое на него воздействие велосипедиста. Велосипедист должен ехать, не двигая ни руками, ни телом; его влияние на велосипед должно сказаться только весом его тела. В этом труде можно найти подробный материал также и о других применениях и о математическом обосновании теории волчка.

## 5. Деривация (отклонение вправо) снарядов

Из всех гироскопических проблем, возникающих в технике, баллистическая проблема ранее других подверглась математическому и экспериментальному исследованию (Даламбер, Эйлер, Пуассон, Магнус); однако и поныне ее решение остается, пожалуй, наименее полным. Дело в том, что она представляет собой не чисто динамическую, а динамически-гидродинамическую проблему. Действительно, решающую для баллистики величину силы *сопротивления воздуха* можно определить, строго говоря, только в связи и одновременно с движением снаряда, пользуясь основными уравнениями гидродинамики.

Существенным для траектории снаряда является получаемый им при выстреле момент вращения. Этот момент вращения является причиной того, что ось снаряда *все время приблизительно следует за касательной к его траектории*. Если бы момент вращения был слишком велик, то снаряд летел бы параллельно самому себе, т. е. направление его оси оставалось бы неизменным; если бы момент вращения был слишком мал, то снаряд повернулся бы своей осью перпендикулярно к траектории. В обоих случаях снаряд, если бы он даже и попал в цель, ударился бы не головной частью, а дном и потому не разорвался бы.

Перемещение вектора момента импульса снаряда вдоль касательной к траектории может происходить, согласно уравнению (27.1), только под действием момента  $\mathbf{M}$ , направленного преимущественно *вертикально*. Этот момент  $\mathbf{M}$  может быть только моментом *горизонтальной компоненты силы сопротивления воздуха, перпендикулярной к плоскости траектории*<sup>1</sup>; эту компоненту мы обозначим через  $W$ . При этом, если пока не принимать во внимание знака, получим:

$$M = Wl, \quad (27.2)$$

где  $l$  — расстояние центра тяжести снаряда от точки приложения компоненты  $W$ . У снарядов обычной формы эта точка приложения силы  $W$  расположена перед центром тяжести, т. е. между центром тяжести и головным заострением снаряда. Отсюда следует, что при правом вращении снаряда (когда вектор момента импульса направлен от донной

<sup>1</sup>Конечно, сила сопротивления воздуха по главной оси лежит в плоскости траектории и в основном имеет направление, противоположное направлению скорости полета. Таким образом, здесь речь идет о добавочном эффекте, вызванном не поступательным, а вращательным движением снаряда.

к головной части снаряда) сила  $W$ , если смотреть со стороны орудия, должна действовать *слева направо*; очевидно, что при таком направлении сила  $W$  даст момент, вектор которого направлен сверху вниз, что и обеспечит понижение касательной к траектории, а значит, и следующего за ней вектора момента импульса снаряда. (При *левом вращении* снаряда как вектор момента импульса, так и векторы момента  $\mathbf{M}$  и силы  $W$  изменяют направления на противоположные.)

Однако действие этой компоненты  $W$  сопротивления воздуха не исчерпывается тем, что она дает момент  $\mathbf{M}$ , влияющий на момент импульса снаряда (согласно закону момента импульса или закону площадей); эта сила оказывает и непосредственное влияние на форму траектории снаряда (в соответствии с законом импульса или законом движения центра тяжести). Отсюда (принимая во внимание направление силы  $W$ ) мы делаем следующее заключение: *правое вращение снаряда приводит к отклонению его траектории вправо* (так называемая дери́вация), а *левое вращение — к отклонению траектории влево*. Назовем «вертикальной проекцией» проекцию траектории на вертикальную плоскость, проходящую через начальное направление полета снаряда, а «горизонтальной проекцией» траектории — проекцию на горизонтальную плоскость.

Запишем выражения закона площадей и закона движения центра тяжести для нашего случая (в приближенной форме); первое из этих уравнений относится к вертикальной проекции траектории, а второе — к ее горизонтальной проекции.

$$N \frac{d\varepsilon}{dt} = Wl \quad (\text{закон площадей}), \quad (27.3)$$

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = W \quad (\text{закон движения центра тяжести}). \quad (27.4)$$

В уравнении (27.3)  $d\varepsilon$  означает мгновенное изменение направления касательной к траектории в вертикальной проекции;  $N d\varepsilon$  — приближенная величина мгновенного приращения момента импульса [которое, собственно говоря, и должно входить в закон момента импульса; ср. уравнение (27.1)]. Таким образом, при написании уравнения (27.3) мы сделаем допущение, что момент импульса снаряда сохраняет свое значение  $|\mathbf{N}| \sim N$  неизменным вдоль траектории, меняя только свое направление. В уравнении (27.4)  $m$  — масса снаряда и  $s$  — боковое отклонение его центра тяжести в горизонтальной проекции. Далее примем

уравнения (27.7) дает весьма значительные величины бокового отклонения траектории — до нескольких сот метров, что вполне согласуется с опытными данными.

### ДОБАВЛЕНИЕ: МЕХАНИКА ИГРЫ НА БИЛЬЯРДЕ

Игра на бильярде представляет широкое поле для применения законов динамики твердого тела. Исследование этой игры связано с именем Кориолиса, одного из крупнейших ученых в области механики<sup>1</sup>.

Последующее изложение имеет своей главной целью пояснение некоторых задач, приводимых в конце книги. Эти задачи связаны не только с динамикой катящегося и скользящего шара, но также и с теорией трения на бильярдном сукне.

#### 1. Высокие и низкие удары

Опытный игрок в бильярд почти всегда сообщает шару боковой удар — «эффе» (effet). Однако вначале мы рассмотрим удары без эффе, при которых кий ударяет по шару в его меридиональной плоскости и притом в горизонтальном направлении. Различают высокие и низкие удары.

*Высокий удар* имеет место, когда точка удара кия по шару находится от плоскости бильярдного сукна на расстоянии большем, чем  $\frac{7}{5}a$  ( $a$  — радиус бильярдного шара); о *низком же ударе* говорят тогда, когда удар по шару приходится на расстоянии меньшем, чем  $\frac{7}{5}a$  (ср. задачу IV. 3). Только в том случае, когда удар приходится в точности на высоте  $\frac{7}{5}a$  от сукна, с самого начала имеет место *частое качение* шара. Дело в том, что при таком ударе (в соответствии с приведенной на стр. 88 величиной момента инерции шара) сообщаемое шару вращение как раз таково, что соответствующая ему окружная скорость в точке опоры шара в точности равна и противоположна по направлению скорости поступательного движения его центра тяжести, что и означает [ср. уравнение (11.10)] выполнение условия чистого качения.

При *высоких ударах* окружная скорость точки соприкосновения шара с сукном, обусловленная его вращением, направлена противоположно

<sup>1</sup>G. Coriolis, Théorie mathématique des effets du jeu de billard. Paris, 1835.

скорости центра тяжести шара и превышает последнюю по величине. Сила трения шара о сукно направлена, разумеется, в сторону, противоположную этому избытку скорости (окружная скорость минус скорость поступательного движения), а следовательно, увеличивает первоначальную скорость центра тяжести. *При высоких ударах трение действует в направлении удара.* Конечная скорость чистого качения, которая установится, когда излишек скорости будет поглощен трением, будет больше начальной скорости. Шары, которым сообщены высокие удары, катятся долго; высокие удары обычно свидетельствуют об опытности игрока.

При *низких ударах* окружная скорость в точке соприкосновения шара с сукном направлена либо назад (но тогда она меньше скорости поступательного движения), либо (при еще более низких ударах) вперед. В обоих случаях *направление силы трения противоположно первоначальному направлению удара.* Конечная скорость чистого качения меньше начальной скорости.

Что касается «силы удара»  $S$  (измеряемой в динах-сек), то ее, конечно, следует понимать как интеграл по времени от весьма большой силы, действующей в направлении кия в продолжение очень короткого промежутка времени  $\tau$ :

$$S = \int_0^{\tau} F dt.$$

В соответствии с этим момент силы удара относительно центра шара выражается формулой:

$$Sl = \int_0^{\tau} Fl dt,$$

где  $l$  — расстояние от центра шара до оси кия; вектор этого момента перпендикулярен плоскости, проведенной через отрезок  $l$  и ось кия. В случае рассматривавшихся до сих пор ударов без эффе этот вектор направлен горизонтально перпендикулярно к меридиональной плоскости шара.

## 2. Удар с накатом и удар с оттяжкой

Если шар, которому сообщен *высокий удар* ударяется центрально о другой шар, то, вследствие равенства масс, он передает этому вто-

рому шару всю скорость своего поступательного движения [ср. формулы (3.27а)]; при этом, однако, он сохраняет свое вращательное движение (если пренебречь трением обоих шаров за короткое время их соприкосновения). Таким образом, непосредственно после удара центр ударяющего шара мгновенно находится в состоянии покоя, в то время как его наинишшая точка скользит по бильярдному сукну. Возникающая при этом (постоянная во времени) сила трения действует в направлении первоначального поступательного движения; в то же время момент этой силы трения относительно центра шара замедляет сохранившееся у него вращение. Таким образом, шар выводится из состояния покоя, постепенно ускоряясь в своем поступательном движении, в то время как его вращение постепенно замедляется. Ускорение прекратится, когда окружная скорость точки касания шара с сукном сравняется со скоростью поступательного движения; после этого наступает чистое качение. Шар продолжает катиться с постоянной конечной скоростью (мы не принимаем во внимание весьма медленно действующего трения качения). Мы изложили *теорию удара с накатом*.

Равным образом, и шар, которому сообщен *низкий удар*, передает всю свою скорость движения (скорость центра тяжести) ударяемому шару и на мгновение остается в состоянии покоя. Примем, что удар по шару был очень низким и пришелся во всяком случае ниже его центра, так что окружная скорость в точке касания с сукном, остающаяся у шара после соударения, направлена вперед. В этом случае сила трения направлена назад. Шар начинает двигаться назад с постоянным ускорением, одновременно его вращение замедляется до тех пор, пока не наступит чистое качение. В этом состоит *теория удара с оттяжкой*.

Так как сила трения скольжения не зависит от скорости, то как скорость движения центра тяжести шара  $v$ , так и его окружная скорость  $u = a\omega$  будут линейно изменяться во времени. Поэтому задачи, рассмотренные нами до сих пор, удобнее анализировать не с помощью формул, а графическим путем — с помощью диаграммы, на которой по оси абсцисс отложено время  $t$ , а по оси ординат — величины скоростей  $v$  и  $u$  в соответствующие моменты времени (см. задачу IV.3).

### 3. Удар с эффе в горизонтальном направлении (режущий удар)

Если шару сообщен удар не в средней вертикальной плоскости, а сбоку (*справа или слева*), то при *горизонтальном направлении этого*



удара траектория шара будет по-прежнему прямой линией, совпадающей с направлением начального удара.

При ударе сбоку — справа или слева — плоскость момента силы удара наклонена вправо или влево по отношению к продольной меридиональной плоскости (назовем ее  $F$ ), однако так, что нормаль к ней лежит в поперечной меридиональной плоскости, перпендикулярной к плоскости  $F$ . По этой нормали и направлен вектор момента удара. Этот вектор момента можно разложить на две слагающие: вертикальную и поперечную, горизонтальную. Первая из них вызывает вращение шара относительно вертикального диаметра и обуславливает слабое «сверлящее» трение о сукно; однако это трение не оказывает влияния на траекторию шара. С другой стороны, поперечная слагающая момента удара оказывает на шар такое же действие, как при ударах, рассмотренных в пп. 1 и 2 настоящего добавления, так что соответствующие результаты можно целиком распространить и на рассматриваемые здесь удары сбоку. В частности, траектория и теперь остается *прямолинейной*.

Однако вращение шара относительно вертикального диаметра проявляется при соударении шара с бортом бильярда или с другим шаром. В первом случае возникает трение о борт бильярда, отклоняющее шар вправо (если смотреть со стороны игрока) при боковом ударе справа, и влево — при ударе слева. Вследствие этого угол отражения (который в случае прямого удара *равен* углу падения) *изменяется* и притом так, что траектория отраженного шара оказывается *повернутой относительно «нормальной» траектории* (в направлении бокового вращения шара). Это явление знакомо всякому игроку в бильярд. Одновременно с силой трения возникает момент трения относительно вертикали, замедляющий вращение шара вокруг вертикального диаметра. Таким образом, по мере увеличения числа соударений шара его первоначальное боковое вращение все более и более замедляется, что также знакомо всякому игроку.

При соударении двух шаров боковое вращение оказывает такое же действие (и в том же направлении), как при ударе шара о борт бильярда.

#### 4. Параболическая траектория при ударах с вертикальной слагающей

При наличии у силы удара вертикальной слагающей плоскость момента силы удара наклонена (относительно продольной меридиональной плоскости) не только вбок, как и п. 3, но и вперед (если смотреть

со стороны игрока). Поэтому соответствующий вектор момента силы удара имеет, кроме поперечной и вертикальной слагающих, еще и слагающую в направлении удара, которой отвечает добавочная скорость скольжения точки опоры, перпендикулярная к направлению первоначального движения. Поэтому сила трения, направление которой противоположно результирующей скорости скольжения точки опоры шара, образует некоторый угол с направлением начального движения. Выяснив (ср. задачу IV.4), что этот угол при движении шара остается постоянным, и принимая во внимание, что величина силы трения также постоянна, мы приходим к заключению: траектория шара должна быть лежащей в горизонтальной плоскости параболой, поскольку движение его происходит под действием одной единственной силы, постоянной по величине и направлению (теорема И. А. Эйлера, сына великого Леонарда Эйлера).

Траектории подобного рода вызывают крайнее недоумение у игрока, не имеющего полного представления о законах трения и векторном разложении момента импульса на составляющие. Такими ударами пользуются в особенности тогда, когда оба шара, которые должны столкнуться, находятся на разных концах короткой стороны бильярда. При этом вертикальная слагающая силы удара должна быть весьма значительной, т. е. кий должен быть расположен под малым углом к вертикали.