

ГЛАВА V

ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Предмет настоящей главы — относительное движение — представляет большой интерес главным образом потому, что все наши наблюдения мы производим на вращающейся Земле; последняя же как с точки зрения классической механики, так и с точки зрения специальной теории относительности не является правомерной системой отсчета. С другой стороны, с точки зрения общей теории относительности всякая система отсчета является правомерной (см. стр. 28), так что здесь отпадает необходимость в особой теории относительного движения.

В этой главе мы будем принимать, что механика Ньютона строго справедлива для любой правомерной идеальной системы отсчета; мы будем определять отклонения от ньютоновской механики, возникающие вследствие движения «навязанной» нам системы отсчета — Земли.

§ 28. ВЫВОД СИЛЫ КОРИОЛИСА ДЛЯ ОДНОГО ИЗ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ

Пусть материальная точка движется по меридиану земного шара (радиус которого равен a) с постоянной угловой скоростью μ (относительно центра Земли), причем Земля одновременно вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω . Если, как обычно, обозначить через ϑ и φ соответственно дополнительный угол географической широты и географическую долготу, то движение нашей материальной точки, с точностью до произвольных начальных значений, описывается уравнениями

$$\vartheta = \mu t, \quad \varphi = \omega t. \quad (28.1)$$

Переходя от сферических координат к прямоугольным

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y &= a \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z &= a \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (28.2)$$

и дифференцируя дважды по t , получаем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= a\mu \cos \vartheta \cos \varphi - a\omega \sin \vartheta \sin \varphi, \\ \dot{y} &= a\mu \cos \vartheta \sin \varphi + a\omega \sin \vartheta \cos \varphi, \\ \dot{z} &= -a\mu \sin \vartheta; \end{aligned} \right\} \quad (28.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -a\mu^2 \sin \vartheta \cos \varphi - a\omega^2 \sin \vartheta \cos \varphi - 2a\mu\omega \cos \vartheta \sin \varphi, \\ \ddot{y} &= -a\mu^2 \sin \vartheta \sin \varphi - a^2\omega^2 \sin \vartheta \sin \varphi + 2a\mu\omega \cos \vartheta \cos \varphi, \\ \ddot{z} &= -a\mu^2 \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (28.4)$$

В последних трех уравнениях первые члены справа представляют собой обычное центростремительное ускорение, соответствующее движению по меридиану (который при этом считается покоящимся); вторые члены представляют собой обычное центростремительное ускорение, соответствующее движению точки по параллели; однако третьи члены представляют собой нечто новое, а именно *кинематическое взаимодействие обоих движений*. Умножив уравнения (28.4) на $-m$, получим силу инерции \mathbf{F}^* , действующую на нашу материальную точку при ее сложном вращательном движении; выразим ее в векторной форме:

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{C}. \quad (28.5)$$

Как и в формуле (10.3), через \mathbf{Z}_1 и \mathbf{Z}_2 обозначены «обыкновенные центробежные силы». Сила \mathbf{Z}_1 направлена от центра Земли по радиусу, а по величине равна

$$|\mathbf{Z}_1| = ma\mu^2 = m\frac{v_1^2}{a}, \quad v_1 = a\mu.$$

Сила \mathbf{Z}_2 направлена по перпендикуляру к земной оси наружу, а по величине равна

$$|\mathbf{Z}_2| = ma\omega^2 \sin \vartheta = m\frac{v_2^2}{a \sin \vartheta}, \quad v_2 = a\omega \sin \vartheta.$$

Третье слагаемое \mathbf{C} в выражении силы инерции мы называем «*составной центробежной силой*» или «*кориолисовой силой*». Ее полное векторное представление [см. формулу (29.4а)] имеет вид:

$$\mathbf{C} = 2m[\mathbf{v}_{\text{отн.}} \boldsymbol{\omega}]. \quad (28.6)$$

Мы обозначили здесь вектор скорости не через \mathbf{v}_1 , а через $\mathbf{v}_{\text{отн.}}$ для того, чтобы указать, что, вообще говоря, речь идет об относительной скорости (по отношению к вращающейся системе координат).

Согласно формуле (28.6), абсолютная величина \mathbf{C} равна

$$|\mathbf{C}| = 2mv_{\text{отн.}}\omega \sin(\mathbf{v}_{\text{отн.}}, \boldsymbol{\omega}), \quad (28.6a)$$

т. е. в нашем случае

$$|\mathbf{C}| = 2mv_{\text{отн.}}\omega \cos \vartheta. \quad (28.6b)$$

Здесь можно, очевидно, заменить $\cos \vartheta$ «синусом географической широты» (как обычно и поступают). Кориолисова сила \mathbf{C} перпендикулярна как к $\mathbf{v}_{\text{отн.}}$, так и к $\boldsymbol{\omega}$ (а также, как легко убедиться, и к силам \mathbf{Z}_1 , и \mathbf{Z}_2) и направлена так, что образует с векторами $\mathbf{v}_{\text{отн.}}$ и $\boldsymbol{\omega}$ правовинтовую систему. Это представлено на рис. 48 для случая движения материальной точки с юга на север (как в северном, так и в южном полушариях). В соответствии с правилом правого винта, легко убедиться, что кориолисова сила действует в северном полушарии с запада на восток, а в южном — с востока на запад.

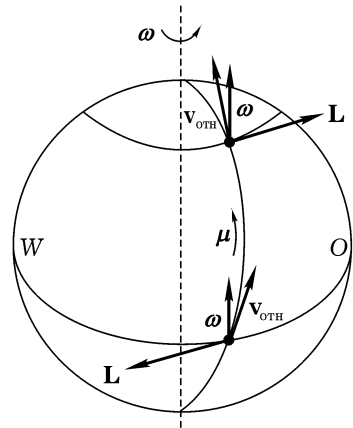


Рис. 48. Вывод силы Кориолиса для частного случая: по меридиану вращающегося земного шара движется материальная точка с постоянной скоростью $v_{\text{отн.}}$; эта точка обладает по отношению к центру постоянной угловой скоростью μ

Вместо отдельной материальной точки мы можем рассматривать и непрерывную совокупность (континуум) материальных точек, т.е. поток их вдоль земного меридиана (например, реку). Тогда из рис. 48 видно, что кориолисова сила инерции текущей воды давит (при течении с юга на север) *в северном полушарии на правый берег, а в южном — на левый берег реки*; очевидно, эта «перемена знака» силы давления связана с синусом географической широты, входящим в формулу (28.6b). Однако это правило справедливо не только для направления относительно скорости $\mathbf{v}_{\text{отн.}}$ с юга на север, но, как это будет доказано в следующем параграфе, и для любого направления течения,

в частности, и для течения с севера на юг. В рассматриваемом случае это непосредственно очевидно: скорость (переносная) движения воды с запада на восток, обусловленная вращением земного шара, зависит от расстояния до оси вращения, а следовательно, от географической широты. При течении с юга на север в северном полушарии вода приносит с собой из южных широт избыток количества движения, направленного с запада на восток; этот избыток и проявляется в виде давления воды в восточном направлении, т. е. на *правый* берег. Однако то же самое имеет место и для потока, направленного с севера на юг. В этом случае вода приходит из северных широт с недостатком количества движения в направлении с запада на восток. Вращающаяся Земля при этом должна ускорять воду в ее движении с запада на восток; очевидно, что в силу инерции воды это приведет к давлению потока на западный, т. е. опять-таки на *правый* берег. С помощью совершенно аналогичного рассуждения легко убедиться в том, что в южном полушарии текущая вода оказывает давление на *левый* берег как при течении с юга на север, так и с севера на юг.

Давление воды на правый берег проявляется (как это доказано географами на ряде примеров в северном полушарии) в более сильном размывании правых берегов рек (закон Бера); кроме того, уровень воды у правого берега рек (в северном полушарии) всегда несколько выше, чем у левого, причем эта разница достигает вполне измеримых величин.

Гораздо более значительными являются действия силы Кориолиса при морских течениях (отклонение вправо Гольфстрима, а также отклонение течений, связанных с приливами и отливами в северном полушарии).

Однако сильнее всего действие силы Кориолиса проявляется в атмосфере. Согласно известному закону Байс – Балло, ветер дует не в направлении падения давления, а значительно отклоняется от этого направления в северном полушарии вправо, в южном полушарии — влево; только на экваторе направление ветра в точности совпадает с направлением градиента давления.

Все эти явления представляют собой прямое следствие закона инерции и, в конечном счете, вызваны тем, что вращающаяся Земля не является, с точки зрения механики, правомерной системой отсчета.

В то время как в настоящем параграфе мы пользовались сферическими координатами, в задаче V.1 мы воспользуемся для вывода силы Кориолиса цилиндрическими координатами.

§ 29. ОБЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Заменяем Землю произвольным твердым телом K , вращающимся с мгновенной угловой скоростью ω вокруг неподвижной точки O . Пусть P — материальная точка, движущаяся с произвольно меняющейся относительной скоростью по отношению к телу K . Скорость точки P относительно неподвижной системы координат складывается из этой относительной скорости и скорости той точки тела K , которая в данный момент совпадает с точкой P ; последняя скорость, согласно формуле (22.4), равна $[\omega \mathbf{r}]$. Обозначим скорость точки P относительно неподвижной системы координат, как в формуле (22.4), через \mathbf{w} , а ее скорость относительно тела K — через \mathbf{v} (вместо $\mathbf{v}_{\text{отн.}}$). Таким образом,

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} + [\omega \mathbf{r}]. \quad (29.1)$$

В дальнейшем мы будем обозначать производные по времени в неподвижной системе координат точкой над соответствующими величинами, а в системе координат, связанной с телом K , — через $\frac{d}{dt}$. В соответствии с этим имеем:

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{r}}, \quad (29.2a)$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (29.2б)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} + [\omega \mathbf{r}]. \quad (29.2в)$$

Дифференцируя по времени уравнение (29.1), получим ускорение нашей точки P в неподвижной системе координат:

$$\dot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{v}} + [\omega \dot{\mathbf{r}}] + [\dot{\omega} \mathbf{r}]. \quad (29.3)$$

Заменяя в среднем члене правой части $\dot{\mathbf{r}}$, согласно уравнениям (29.2a) и (29.1), получим:

$$[\omega \dot{\mathbf{r}}] = [\omega \mathbf{v}] + [\omega [\omega \mathbf{r}]]. \quad (29.3a)$$

В формуле (29.2в) под \mathbf{r} можно понимать произвольный вектор; заменяя в ней \mathbf{r} на \mathbf{v} , представим $\dot{\mathbf{v}}$ в виде

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} + [\omega \mathbf{v}]. \quad (29.3б)$$

Подставляя выражения (29.3а) и (29.3б) в (29.3), получаем:

$$\dot{\omega} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} + 2[\omega\mathbf{v}] + [\omega[\omega\mathbf{r}]] + [\dot{\omega}\mathbf{r}]. \quad (29.4)$$

Относительно последнего члена этого уравнения следует еще заметить, что, согласно формуле (26.8а), безразлично, напишем ли мы в нем $\dot{\omega}$ или $\frac{d\omega}{dt}$.

Из последнего уравнения можно получить силу инерции, действуящую на нашу материальную точку, умножая его почленно на $(-m)$. При этом в левой части получим силу инерции \mathbf{F}^* в неподвижной системе координат, а первый член справа будет выражать силу инерции в «неправомерной» системе отсчета K ; назовем последнюю силу $\mathbf{F}_{\text{отн.}}^*$. Из второго члена правой части получается уже известное нам выражение (28.6) для силы Кориолиса, а именно

$$-2m[\omega\mathbf{v}] = +2m[\mathbf{v}\omega] = \mathbf{C}. \quad (29.4а)$$

Таким образом, настоящее рассмотрение содержит (в качестве дополнения к частному выводу, изложенному в предыдущем параграфе) *общий вывод кориолисовой силы*. Предпоследний член уравнения (29.4) представляет собой (после умножения на m и перемены знака) обычную центробежную силу \mathbf{Z} , действующую на нашу материальную точку благодаря вращению системы отсчета K [в формуле (28.5) эта сила обозначена через \mathbf{Z}_2]. Итак, вместо уравнения (29.4) окончательно получим:

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F}_{\text{отн.}}^* + \mathbf{C} + \mathbf{Z} + m[\mathbf{r}\dot{\omega}]. \quad (29.5)$$

Подставим вместо $\mathbf{F}_{\text{отн.}}^*$, согласно определению, величину

$$\mathbf{F}_{\text{отн.}}^* = -m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

и примем во внимание, что в силу равновесия внешних сил и сил инерции в неподвижной системе координат,

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}^* = 0.$$

Мы получим *общее дифференциальное уравнение относительного движения*:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{Z} + \mathbf{C} + m[\mathbf{r}\dot{\omega}]. \quad (29.6)$$

Из этого уравнения видно, что в системе отсчета K , наряду с «истинной» внешней силой \mathbf{F} , появляются «фиктивные силы» \mathbf{Z} и \mathbf{C} . С точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с системой K , эти силы действуют так же, как и внешняя сила \mathbf{F} ; но они возникают только вследствие инерции материальной точки m при ее движении относительно системы отсчета K . Такого же «инерционного» происхождения и сила, выражаемая последним членом уравнения (29.6): она обусловлена возможным ускорением вращения или перемещением оси вращения; в применении к Земле этот член соответствует колебаниям полюса; им, несомненно, можно пренебречь, как исчезающе малой величиной. Мы будем пользоваться дифференциальным уравнением (29.6) в трех следующих параграфах, а также при решении задач V.1 и V.2.

§ 30. СВОБОДНОЕ ПАДЕНИЕ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЗЕМЛЕ. ОСОБЕННОСТЬ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ЧЛЕНОВ

При всех измерениях силы тяжести мы наблюдаем не само притяжение Земли, а равнодействующую притяжения Земли \mathbf{F} и центробежной силы \mathbf{Z} . Равным образом, и степень сплюснутости геоида, т. е.

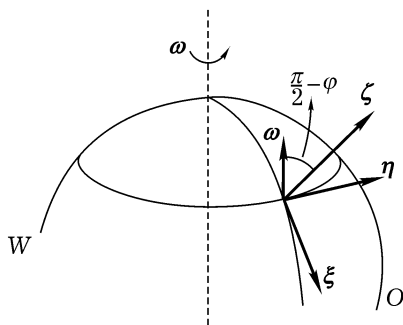


Рис. 49. Свободное падение в условиях вращающегося земного шара. Ось координат: ось ξ направлена по меридиану, ось η — по параллели, ось ζ — по нормали к геоиду

средней формы земной поверхности, определяется этой равнодействующей, именно — тем, что поверхность геоида всюду ей перпендикулярна.

Положим

$$\mathbf{F} + \mathbf{Z} = -mg. \quad (30.1)$$

Здесь ускорение свободного падения \mathbf{g} является вектором, равным по величине g , но *направленным* не по земному радиусу, а по *нормали к поверхности геоида*.

Принимая во внимание соотношения (30.1) и (28.6) и пренебрегая членом, содержащим $\dot{\omega}$ (ср. выше), получим из уравнения (29.6):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{g} + 2[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}]. \quad (30.2)$$

Решим это векторное уравнение в координатной форме, вводя прямоугольную систему координат ξ, η, ζ , неподвижно связанную с Землей (рис. 49):

$$\left. \begin{aligned} \text{ось } \xi &\text{ направлена с севера на юг (вдоль земного меридиана),} \\ \text{ось } \eta &\text{ направлена с запада на восток (вдоль параллели),} \\ \text{ось } \zeta &\text{ направлена от точки наблюдения к зениту} \\ &\text{(по нормали к поверхности геоида).} \end{aligned} \right\} \quad (30.3)$$

Тогда компоненты наших векторов примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{вектора } \mathbf{v} &: \quad \frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{d\zeta}{dt}, \\ \text{вектора } \mathbf{g} &: \quad 0, \quad 0, \quad g, \\ \text{вектора } \boldsymbol{\omega} &: \quad -\omega \cos \varphi, \quad 0, \quad \omega \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (30.4)$$

где φ — географическая широта (ср. рис. 49). Перепишем теперь уравнение (30.2) в координатной форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= 2\omega \sin \varphi \frac{d\eta}{dt}, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= -2\omega \sin \varphi \frac{d\xi}{dt} - 2\omega \cos \varphi \frac{d\zeta}{dt}, \\ \frac{d^2\xi}{dt^2} + g &= 2\omega \cos \varphi \frac{d\eta}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (30.5)$$

Перед тем как перейти к интегрированию, рассмотрим общий характер этих уравнений. Они отличаются тем, что коэффициенты их

правых частей образуют *антисимметричную* матрицу (схему). Если обозначить

$$\alpha = 2\omega \sin \varphi, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -2\omega \cos \varphi, \quad (30.6)$$

то эта схема примет следующий *антисимметричный* по отношению к главной диагонали вид:

	$\frac{d\xi}{dt}$	$\frac{d\eta}{dt}$	$\frac{d\zeta}{dt}$
$\frac{d^2\xi}{dt^2}$	0	α	β
$\frac{d^2\eta}{dt^2}$	$-\alpha$	0	γ
$g + \frac{d^2\zeta}{dt^2}$	$-\beta$	$-\gamma$	0

(30.7)

Этот антисимметричный вид означает, что имеет место *сохранение энергии*; напротив, если бы матрица (схема) коэффициентов содержала отличные от нуля диагональные члены или — в более общем случае — *симметричную часть*, то имело бы место *рассеяние энергии*.

В самом деле, умножим уравнения (30.5) соответственно на $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ и сложим их; тогда в правой части все члены с α , β и γ взаимно уничтожаются, и мы получим:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2 \right] + g \frac{d\zeta}{dt} = 0.$$

Следовательно,

$$T + V = \text{const.} \quad (30.8)$$

Здесь T и V означают кинетическую и потенциальную энергию относительного движения (в предположении, что масса равна 1). Впрочем, этот *консервативный характер* нашей схемы коэффициентов вытекает без всяких вычислений уже из того, что кориолисова сила \mathbf{C} , поскольку она пропорциональна $[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}]$, перпендикулярна к направлению движения, а, следовательно, *ее работа равна нулю* (подобно тому, как это имеет место для магнитных сил в электродинамике).

Напротив, в случае наличия симметричной части в матрице коэффициентов мы имели бы

$$\frac{d}{dt}(T + V) < 0, \quad (30.9)$$

если только знаки коэффициентов удовлетворяют физически необходимому требованию затухания процессов движения. Очевидно, что неравенство (30.9) соответствует не *сохранению энергии*, а как мы уже утверждали, *рассеянию энергии*. Примером (впрочем, лишь для одномерного случая) подобного диссипативного характера симметричной матрицы коэффициентов являются рассмотренные в гл. III затухающие колебания [см. уравнения (19.8) и (19.9)].

Следуя лорду Кельвину, будем называть элементы антисимметричной матрицы коэффициентов *гироскопическими членами*. Эти члены характеризуют внутренние гироскопические свойства механической системы (в нашем случае вращение земного шара); последние при рассмотрении проблемы не учитываются явно (игнорируются), а принимаются во внимание при выборе системы координат (в нашем случае ξ , η , ζ). Такого рода гироскопические члены играют важную роль в общих теоремах об устойчивости движений и состояний равновесия.

Перейдем теперь к интегрированию уравнений (30.5). При этом в качестве начальных условий мы возьмем условия, соответствующие свободному падению с высоты h без начального импульса; таким образом, мы требуем при $t = 0$, чтобы имело место:

$$\left. \begin{aligned} \xi = \eta = 0, \quad \zeta = h, \\ \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (30.10)$$

Из первого и третьего уравнений (30.5) получаем:

$$\frac{d\xi}{dt} = 2\omega\eta \sin \varphi, \quad \frac{d\zeta}{dt} + gt = 2\omega\eta \cos \varphi. \quad (30.11)$$

Подстановка во второе уравнение (30.5) дает:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + 4\omega^2\eta = Ct, \quad C = 2\omega g \cos \varphi. \quad (30.12)$$

Интегрирование последнего уравнения выполняется по общему правилу [ср. уравнение (19.4)]: «общее решение неоднородного уравнения равно сумме его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения». Следуя этому правилу, для нашего случая получим:

$$\eta = \frac{C}{4\omega^2}t + A \sin 2\omega t + B \cos 2\omega t.$$

Из начальных условий (30.10) находим:

$$B = 0, \quad 2\omega A = -\frac{C}{4\omega^2}, \quad (30.13)$$

откуда

$$\eta = \frac{C}{4\omega^2} \left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right) = \frac{g \cos \varphi}{2\omega} \left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right).$$

Это означает по смыслу координаты η [ср. определение (30.3)] отклонение падающего тела к *востоку*.

Величина ξ означает *отклонение к югу*. На основании (30.11) и (30.13) это отклонение можно вычислить из уравнения

$$\frac{d\xi}{dt} = g \sin \varphi \cos \varphi \left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right),$$

интеграция которого, принимая во внимание начальные условия (30.10), дает:

$$\xi = g \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1 - \cos 2\omega t}{4\omega^2} \right). \quad (30.14)$$

Наконец, для движения по вертикали из второго уравнения (30.11), принимая во внимание соотношения (30.13) и (30.10), получим:

$$\zeta = h - \frac{gt^2}{2} + g \cos^2 \varphi \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1 - \cos 2\omega t}{4\omega^2} \right). \quad (30.15)$$

Величина ωt очень мала (порядка отношения времени падения к продолжительности суток). Поэтому мы можем разложить выраже-

ния (30.13), (30.14) и (30.15) в ряды по степеням ωt , после чего найдем:

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{gt^2}{3} \cos \varphi \cdot \omega t, \\ \xi &= \frac{gt^2}{6} \sin \varphi \cos \varphi \cdot (\omega t)^2, \\ \zeta &= h - \frac{gt^2}{2} \left[1 - \frac{\cos^2 \varphi}{3} (\omega t)^2 \right].\end{aligned}$$

Величина (ωt) , характеризующая влияние вращения Земли на свободное падение тел, входит в выражение отклонения к востоку η в первой степени, а в выражения отклонения к югу ξ и отклонения по вертикали ζ — лишь в квадрате. Отклонение падающих тел к востоку многократно наблюдалось на опыте, и величина его оказалась в хорошем согласии с теорией — при благоприятных условиях (падение в глубокой шахте) оно составляло несколько сантиметров.

Очевидно, что эти отклонения (как наблюдаемые, так и не поддающиеся наблюдению) объясняются тем, что лежащие в основе эксперимента и теории начальные условия (30.10) предполагают *состояние покоя относительно Земли* и что именно по этой причине они означают наличие у первоначально покоящегося тела определенной скорости в пространстве. Эта скорость равна произведению угловой скорости вращения Земли на расстояние от тела до оси вращения Земли и потому несколько отличается от окружной скорости земной поверхности под падающим телом. Естественным следствием этого и является некоторое отличие траектории падающего тела от вертикали, проходящей через его начальное положение.

§ 31. МАЯТНИК ФУКО

В рассматриваемом случае по-прежнему справедливы уравнения (30.5), но с тем дополнительным условием, что материальная точка должна находиться на постоянном расстоянии l от точки подвеса маятника. Запишем это условие совершенно так же, как и в случае сферического маятника [уравнение (18.1)]:

$$F = \frac{m}{2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - l^2) = 0. \quad (31.1)$$

Вводя соответствующий параметр Лагранжа λ получим вместо прежних уравнений (30.5):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= 2\omega \sin\varphi \frac{d\eta}{dt} + \lambda\xi, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= -2\omega \sin\varphi \frac{d\xi}{dt} - 2\omega \cos\varphi \frac{d\zeta}{dt} + \lambda\eta, \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} + g &= 2\omega \cos\varphi \frac{d\eta}{dt} + \lambda\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (31.2)$$

Мы ограничимся, разумеется, *малыми* колебаниями маятника. Таким образом, мы будем считать $\frac{\xi}{l}$ и $\frac{\eta}{l}$ величинами первого порядка малости; тогда из условия (31.1) следует, что $\frac{\zeta^2}{l^2}$ равно единице с точностью до величин *второго порядка* малости. Именно, вблизи положения равновесия имеет место

$$\zeta = -l(1 + \text{величина второго порядка малости}),$$

так как за положительное направление оси ζ принято направление вверх. В соответствии с этим третье уравнение (31.2) показывает, что с точностью до величин первого порядка малости справедливо равенство:

$$g = -\lambda l, \text{ откуда } \lambda = -\frac{g}{l}. \quad (31.3)$$

Перепишем теперь первые два уравнения (31.2), пренебрегая членом $\frac{d\zeta}{dt}$ (так как он является величиной второго порядка малости) и вводя обозначение

$$u = \omega \sin\varphi. \quad (31.4)$$

Тогда эти уравнения примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2u \frac{d\eta}{dt} + \frac{g}{l}\xi &= 0, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2u \frac{d\xi}{dt} + \frac{g}{l}\eta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (31.5)$$

Удобно объединить оба эти уравнения (умножив второе из них на i и сложив с первым), вводя, как и в уравнении (26.10) на стр. 189, комплексную переменную

$$s = \xi + i\eta. \quad (31.6)$$

В соответствии с этим, получим уравнение

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2iu \frac{ds}{dt} + \frac{g}{l} s = 0, \quad (31.7)$$

являющееся *однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами*. Заметим, что объединение двух уравнений (31.5) в комплексной форме оказалось возможным благодаря «гироскопическому» характеру средних членов этих уравнений. Ищем решение уравнения (31.7) в виде

$$s = Ae^{i\alpha t}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (31.7), получим квадратное уравнение для определения α :

$$\alpha^2 + 2u\alpha - \frac{g}{l} = 0.$$

Его корни суть

$$\alpha_1 = -u + \sqrt{u^2 + \frac{g}{l}} \quad \text{и} \quad \alpha_2 = -u - \sqrt{u^2 + \frac{g}{l}}. \quad (31.8)$$

Общее решение уравнения (31.7) имеет вид;

$$s = A_1 e^{i\alpha_1 t} + A_2 e^{i\alpha_2 t}. \quad (31.9)$$

Постоянные A_1 и A_2 определяются из начальных условий. В соответствии с постановкой опыта, в качестве таковых выберем следующие:

$$\xi = a, \quad \eta = 0, \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (31.10)$$

Иными словами, мы предполагаем, что маятник в начальный момент отклонен от вертикального положения на отрезок a в положительном направлении оси ξ , т.е. вдоль меридиана к югу (рис. 50), и отпущен

без толчка. Из условий (31.10) получим начальные значения для нашей комплексной переменной s :

$$s = a, \quad \frac{ds}{dt} = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (31.10a)$$

Тогда из равенства (31.9) найдем:

$$A_1 + A_2 = a, \quad (31.11)$$

$$A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 = 0, \quad (31.11a)$$

$$A_1 = \frac{a}{2} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 + \frac{g}{l}}} \right), \quad A_2 = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{u}{\sqrt{u^2 + \frac{g}{l}}} \right). \quad (31.11b)$$

В соответствии с этим, получим выражение для $\frac{ds}{dt}$ (являющееся несколько более интересным, чем выражение для s). Принимая во внимание условие (31.11a), можем написать:

$$\frac{ds}{dt} = i\alpha_1 A_1 e^{-iut} \left(e^{i\sqrt{u^2 + \frac{g}{l}}t} - e^{-i\sqrt{u^2 + \frac{g}{l}}t} \right),$$

откуда следует [после подстановки выражений (31.8) и (31.11b)]:

$$\frac{ds}{dt} = -a \frac{\frac{g}{l}}{\sqrt{u^2 + \frac{g}{l}}} e^{-iut} \sin \sqrt{u^2 + \frac{g}{l}} t. \quad (31.12)$$

Отсюда мы заключаем, что в те моменты времени, когда синус обращается в нуль, всегда имеет место

$$\frac{ds}{dt} = 0 \quad \text{и, следовательно, также} \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = 0.$$

Это означает появление острия (точки возврата) на траектории маятника. Согласно нашим начальным условиям (31.10), такую точку возврата мы впервые имеем при $t = 0$. Полагая

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{u^2 + \frac{g}{l}}}, \quad (31.13)$$

мы видим, что следующие точки возврата соответствуют моментам времени:

$$t = \frac{\tau}{2}, \quad t = \tau, \quad t = \frac{3\tau}{2}, \dots$$

Промежуток времени $t = \tau$ является периодом полного колебания маятника (туда и обратно). Как и следовало ожидать, он совпадает с периодом колебаний математического маятника при отсутствии вращения Земли, если положить в формуле (31.13)

$$u = 0, \quad \text{т. е.} \quad \omega = 0.$$

Воспользуемся формулами (31.9), (31.11) и (31.13) для определения положения нашего маятника спустя время $t = \tau$ от начала опыта (учитывая вращение Земли). Эти формулы дают:

$$\begin{aligned} s_{t=\tau} &= A_1 e^{-iu\tau+2\pi i} + A_2 e^{-iu\tau-2\pi i} = \\ &= (A_1 + A_2) e^{-iu\tau} = \alpha e^{-iu\tau}. \end{aligned}$$

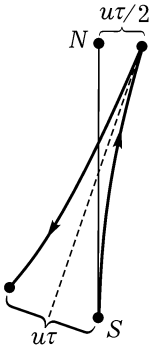


Рис. 50. Маятник Фуко. Вид траектории сверху. Начальное положение — к югу от точки равновесия; отклонение к западу за время полного колебания взад и вперед

Таким образом, маятник в момент $t = \tau$ находится на том же расстоянии a от своего положения равновесия, что и при $t = 0$, но азимут его качания лежит уже не в меридиональной плоскости, как в начале опыта, а отклонен от нее к западу на угол

$$u\tau = 2\pi \frac{u}{\sqrt{u^2 + \frac{g}{l}}} \sim 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \omega \sin \varphi$$

(рис. 50). Мы можем сказать, что траектория качания маятника, которая в случае отсутствия вращения Земли неизменно лежала бы в одной и той же меридиональной плоскости испытывает отклонение под действием кориолисовой силы (вследствие «давления на правый берег»), а именно: при качании с юга на север — отклонение к востоку на угол $\frac{u\tau}{2}$ и при обратном движении — отклонение к западу на тот же угол; таким образом, общий угол отклонения равен $u\tau$.

Опыты, произведенные Фуко в 1851 г., а также опыты его многочисленных последователей, дали только качественные результаты; *количественное же исследование* всех источников погрешностей дал в своей диссертации в 1879 г. Камерлинг–Оннес (имя которого впоследствии приобрело широкую известность благодаря работам в области низких температур и открытию явления сверхпроводимости).

§ 32. ПРОБЛЕМА ТРЕХ ТЕЛ (ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ЛАГРАНЖА)

Мы не можем противостоять «искушению» дополнить наше рассмотрение относительного движения доказательством знаменитой теоремы Лагранжа (Парижская академия, 1772 г.): *Проблема трех тел допускает строгое решение в элементарных функциях, если принять, что треугольник, образованный тремя небесными телами, постоянно остается подобным самому себе.* При этом массы трех тел произвольны.

В ходе доказательства этой теоремы выяснится, что:

- 1) плоскость, проходящая через три рассматриваемые материальные точки, неподвижна в пространстве;
- 2) равнодействующая ньютоновских сил тяготения, приложенных к каждой из этих трех материальных точек, проходит через их общий центр тяжести;
- 3) образованный тремя телами треугольник является равносторонним;
- 4) траектории трех тел (материальных точек) представляют собой подобные друг другу конические сечения, для каждого из которых общий центр тяжести трех тел является одним из фокусов.

Доказательство, данное Лагранжем, довольно сложно. Его можно упростить, приняв с самого начала, как это делает Лаплас, что условие 1) выполнено. Каратеодори показал¹, однако, что и без этого допущения возможно элементарное доказательство теоремы Лагранжа. Его отправной точкой является наше векторное уравнение (29.4), переписанное в прямоугольных компонентах. Мы воспроизводим здесь с некоторыми изменениями доказательство Каратеодори.

Рассмотрим плоскость \mathcal{E} , проходящую через три материальные точки P_1, P_2, P_3 (массы их равны соответственно m_1, m_2, m_3), а сле-

¹Bayrische Akademie, 1933, S. 257.

довательно, и через их общий центр тяжести O . Последний мы можем без ограничения общности считать неподвижным. Таким образом, плоскость \mathcal{E} вращается вокруг неподвижной точки O ; кроме того, мы предполагаем, что плоскость \mathcal{E} вращается вокруг своей нормали, проведенной через точку O ; результирующую угловую скорость вращения обозначим через $\boldsymbol{\omega}$. Будем рассматривать движение материальных точек в системе отсчета, связанной с плоскостью \mathcal{E} , подобно тому, как мы рассматривали движение маятника Фуко в системе отсчета, связанной с Землей. Проведем радиусы-векторы \mathbf{r}_i из точки O в точку P_i ; $v_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$ будут скоростями и ускорениями наших материальных точек в системе отсчета \mathcal{E} . Тогда из уравнения (29.4), с помощью векторной формулы (24.7), получим следующие дифференциальные уравнения движения:

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} + 2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}_i] + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_i\boldsymbol{\omega}) - \mathbf{r}_i\boldsymbol{\omega}^2 + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_i] = \frac{\mathbf{F}_i}{m_i}. \quad (32.1)$$

Здесь \mathbf{F}_i означает векторную сумму ньютоновских сил притяжения, действующих на материальную точку m_i . Так, например,

$$\frac{\mathbf{F}_1}{m_1} = \frac{Gm_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} + \frac{Gm_3}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|}. \quad (32.2)$$

Выберем в плоскости \mathcal{E} прямоугольную систему координат x, y с началом в точке O ; в остальном эта система координат произвольна.

Через точку O перпендикулярно к плоскости \mathcal{E} проведем ось z . Разложим угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ на слагающие по этим трем осям (как это делается в уравнениях Эйлера):

$$\boldsymbol{\omega} = (p, q, r). \quad (32.3)$$

Слагающую r (вращение плоскости \mathcal{E} вокруг собственной нормали) мы определим так, чтобы один из радиусов-векторов OP_i имел неизменное направление в плоскости \mathcal{E} . Поскольку мы предположили, что треугольник $P_1P_2P_3$ при движении остается подобным самому себе, то и остальные два радиуса-вектора OP_i также должны сохранять неизменное направление в плоскости \mathcal{E} . Таким образом, мы можем написать:

$$\mathbf{r}_i = \lambda(t)(a_i, b_i, 0). \quad (32.4)$$

Функция $\lambda(t)$ определяет общее изменение длины векторов OP_i , а следовательно, и изменение размеров треугольника $P_1P_2P_3$. Обозначая через $\dot{\lambda}$ и $\ddot{\lambda}$ производные от λ по времени, получим из уравнения (32.4):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_i &= \dot{\lambda}(t)(a_i, b_i, 0), \\ \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} &= \ddot{\lambda}(t)(a_i, b_i, 0). \end{aligned} \right\} \quad (32.4a)$$

В соответствии с этим, z -компонента равнодействующей силы \mathbf{F}_i , выражаемой формулой (32.2), равна нулю; компоненты же этой силы по осям x и y обратно пропорциональны λ^2 . Запишем это сокращенно в следующем виде:

$$\frac{\mathbf{F}_i}{m_i} = \frac{1}{\lambda^2(t)}(L_i, M_i, 0). \quad (32.5)$$

В соответствии с этим, проектируя обе части дифференциального уравнения (32.1) на перпендикуляр к плоскости \mathcal{E} (т.е. на ось z), получим:

$$2\dot{\lambda}(pb_i - qa_i) + \lambda r(a_i p + b_i q) + \lambda(\dot{p}b_i - \dot{q}a_i) = 0,$$

или, группируя коэффициенты при a_i, b_i ,

$$\{-2\dot{\lambda}q + \lambda(rp - \dot{q})\}a_i + \{2\dot{\lambda}p + \lambda(rq + \dot{p})\}b_i = 0. \quad (32.6)$$

Оба выражения в фигурных скобках являются не зависящими от i функциями времени. Обозначим эти функции через $f(t)$ и $g(t)$, тогда должно выполняться равенство

$$\frac{f(t)}{g(t)} = -\frac{b_i}{a_i}. \quad (32.6a)$$

Так как, по условию, точки P_i образуют треугольник, т.е. не лежат на одной прямой, то три отношения $\frac{b_i}{a_i}$ не равны друг другу. Но отсюда следует, что условие (32.6) может быть выполнено только в том случае, если мы положим $f = g = 0$. Последнее означает, что

$$\left. \begin{aligned} 2\dot{\lambda}p &= -\lambda(rq + \dot{p}), \\ 2\dot{\lambda}q &= \lambda(rq - \dot{q}). \end{aligned} \right\} \quad (32.7)$$

Умножая эти уравнения соответственно на p и q и складывая их, найдем:

$$\frac{2\dot{\lambda}}{\lambda} = -\frac{p\dot{p} + q\dot{q}}{p^2 + q^2}.$$

Интегрируя, будем иметь:

$$p^2 + q^2 = \frac{C}{\lambda^4}, \quad (32.8)$$

где C — постоянная интегрирования. Далее, для x - и y -компонент дифференциальное уравнение (32.1) дает:

$$\ddot{\lambda}a_i - 2r\dot{\lambda}b_i + p\lambda(a_i\dot{p} + b_i\dot{q}) - \lambda a_i(p^2 + q^2 + r^2) - \dot{r}\lambda b_i = \frac{L_i}{\lambda^2},$$

$$\ddot{\lambda}b_i + 2r\dot{\lambda}a_i + q\lambda(a_i\dot{p} + b_i\dot{q}) - \lambda b_i(p^2 + q^2 + r^2) + \dot{r}\lambda a_i = \frac{M_i}{\lambda^2};$$

или, если сгруппировать коэффициенты при a_i и b_i :

$$\left. \begin{aligned} \{\ddot{\lambda} - \lambda(q^2 + r^2)\}a_i - \{2r\dot{\lambda} + \lambda(-pq + \dot{r})\}b_i &= \frac{L_i}{\lambda^2}, \\ \{2r\dot{\lambda} + \lambda(pq + \dot{r})\}a_i + \{\ddot{\lambda} - \lambda(p^2 + r^2)\}b_i &= \frac{M_i}{\lambda^2}. \end{aligned} \right\} \quad (32.9)$$

Таким образом, выражения в фигурных скобках каждого из этих уравнений, умноженные на λ^2 , должны удовлетворять трем линейным уравнениям с постоянными (не зависящими от t) коэффициентами. Это возможно только в том случае, если сами эти выражения являются постоянными. Поэтому разность выражений, заключенных в первой и четвертой скобках, равна некоторой постоянной, деленной на λ^2 , равно как и разность выражений, заключенных в третьей и второй скобках. Следовательно, имеет место:

$$p^2 - q^2 = \frac{A}{\lambda^3}, \quad 2pq = \frac{B}{\lambda^3}. \quad (32.10)$$

Объединим эти вещественные равенства в одно комплексное (j — мнимая единица):

$$(p \pm jq)^2 = \frac{A \pm jB}{\lambda^3}.$$

Переходя к абсолютным величинам, получим:

$$p^2 + q^2 = \frac{D}{\lambda^3}, \quad D = \sqrt{A^2 + B^2}. \quad (32.11)$$

Сравнение условий (32.11) и (32.8) привело бы нас к соотношению

$$\lambda = \frac{C}{D} = \text{const}, \quad (32.11a)$$

за исключением того случая, когда C и D оба обращаются в нуль. Однако при $\lambda = \text{const}$, согласно условию (32.10), были бы постоянными также p и q и, в силу условий (32.7), r обращалось бы в нуль. С помощью соответственного выбора координатных осей x , y можно было бы даже сделать $q = 0$ и получить из первого уравнения (32.9) $L_i = 0$. Но тогда наши три точки P_i должны были бы лежать на одной прямой, что, по условию, не должно иметь места.

Следовательно, мы должны положить $C = D = 0$, тогда из уравнений (32.8) или (32.11) получим:

$$p = q = 0. \quad (32.12)$$

Тем самым доказана 1-я часть теоремы Лагранжа: плоскость \mathcal{E} вращается вокруг своей нормали с угловой скоростью \mathbf{r} ; указанная нормаль неподвижна в пространстве.

Применяя закон площадей к нашей системе, мы видим, что движение точек m_i в плоскости \mathcal{E} не может увеличить «постоянную площадей». Таким образом, эта постоянная непосредственно определяется угловой скоростью вращения r плоскости \mathcal{E} , а именно:

$$\text{const} = r \sum m_i |r_i|^2 = r \lambda^2 \sum m_i (a_i^2 + b_i^2).$$

Обозначим

$$\lambda^2 r = \gamma, \quad (32.12a)$$

откуда

$$2\dot{\lambda}r + \lambda\dot{r} = 0. \quad (32.12b)$$

В силу условий (32.12) и (32.12 а, б), уравнения (32.9) упрощаются и принимают вид

$$\lambda^2 \ddot{\lambda} - \frac{\gamma^2}{\lambda} = \frac{L_i}{a_i} = \frac{M_i}{b_i}. \quad (32.13)$$

Из содержащегося в этих уравнениях требования $\frac{L_1}{a_1} = \frac{M_1}{b_1}$ вытекает, что момент силы \mathbf{F}_1 относительно точки O обращается в нуль:

$$[\mathbf{r}_1 \mathbf{F}_1] = \frac{1}{\lambda^2} (a_1 M_1 - b_1 L_1) = 0 \quad (32.14)$$

и что, таким образом, сила \mathbf{F}_1 проходит через центр тяжести O . То же самое относится и к силам \mathbf{F}_2 и \mathbf{F}_3 . Этим доказана 2-я часть теоремы Лагранжа: *равнодействующая сил, приложенных к точке P_i , проходит через центр тяжести масс m_i .*

Преобразуем равенство (32.14) с помощью выражения (32.2). Вначале мы получим

$$\frac{|\mathbf{r}_1 \mathbf{F}_1|}{m_1 G} = \frac{m_2 [\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2]}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} + \frac{m_3 [\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3]}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} = 0. \quad (32.15)$$

Однако по определению центра тяжести имеем:

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 = 0, \quad (32.16)$$

а, следовательно, также

$$m_2 [\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2] + m_3 [\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3] = 0.$$

Подставив это в уравнение (32.15), найдем:

$$m_2 [\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2] \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} - \frac{1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} \right) = 0,$$

откуда

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = |\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|. \quad (32.17)$$

Таким же образом находим:

$$|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \text{ и т. д.} \quad (32.17a)$$

Это означает, что наш треугольник равносторонний, т. е. 3-я часть теоремы Лагранжа также доказана.

Мы можем определить и каждое из входящих в уравнение (32.13) отношений $\frac{L_i}{a_i}$, $\frac{M_i}{b_i}$ в отдельности. Обозначим сторону треугольника через λs , причем

$$s^2 = (a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 = (a_3 - a_2)^2 + (b_3 - b_2)^2 = \dots$$

Согласно формулам (32.2) и (32.5), получим:

$$\frac{L_1}{a_1} = \frac{G}{s^3 a_1} \{m_2(a_2 - a_1) + m_3(a_3 - a_1)\};$$

принимая во внимание (32.16),

$$\frac{L_1}{a_1} = \frac{G}{s^3} \{-m_1 - m_2 - m_3\}. \quad (32.18)$$

Так как массы m_i и координаты a_i , b_i входят в правую часть формулы совершенно симметрично, то эта правая часть выражает в то же время величины $\frac{L_i}{a_i}$ и $\frac{M_i}{b_i}$. Подставляя это значение в формулу (32.13), получим:

$$\lambda^2 \ddot{\lambda} - \frac{\gamma^2}{\lambda} = -\frac{G}{s^3} (m_1 + m_2 + m_3). \quad (32.19)$$

Это дифференциальное уравнение для λ описывает временной ход движения, «растяжения» и «сжатия» нашего равностороннего треугольника, претерпеваемые им с течением времени.

Однако временной ход таких «пульсаций» треугольника, равно как и геометрическую форму траекторий трех тел, можно проследить еще проще, если в качестве системы отсчета выбрать не плоскость \mathcal{E} , а совпадающую с ней, но неподвижную в пространстве, плоскость \mathcal{E}' . В этой системе отсчета на материальную точку m_i действует только равнодействующая сила \mathbf{F}_i , направленная к неподвижному центру тяжести, в то время как все прочие входящие в уравнение (32.1) фиктивные силы (кориолисова сила, центробежная сила и т. д.) отпадают. Согласно формулам (32.5) и (32.18), величина этой силы \mathbf{F}_i равна

$$|\mathbf{F}_i| = \frac{m_i}{\lambda^2} \sqrt{L_i^2 + M_i^2} = -\frac{m_i G}{\lambda^2 s^2} (m_1 + m_2 + m_3) \frac{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}{s}. \quad (32.20)$$

Единственной функцией времени в правой части этой формулы является λ^2 . С помощью равенства (32.4) выразим λ^2 через $|\mathbf{r}_i|$:

$$\lambda^2 = \frac{|\mathbf{r}_i|^2}{a_i^2 + b_i^2}.$$

Подставляя это выражение в формулу (32.20) и вводя массу

$$m_i' = m_i \frac{(a_i^2 + b_i^2)^{2/3}}{s^3}, \quad (32.20a)$$

а также полную массу $M = m_1 + m_2 + m_3$, получаем

$$|\mathbf{F}_i| = -\frac{m_i' MG}{|\mathbf{r}_i|^2}.$$

Таким образом, каждая из наших трех материальных точек движется в пространстве независимо от остальных двух и притом так, как если бы она имела массу m_i' и притягивалась находящейся в точке O неподвижной массой M по закону Ньютона. Поэтому при своем движении она описывает коническое сечение, в одном из фокусов которого находится точка O .

Для того чтобы узнать что-либо относительно размеров и взаимного положения этих трех конических сечений, мы должны учесть заданные начальные условия нашего движения. Рассмотрим, например, момент, в который все три материальные точки m_i находятся на экстремальных расстояниях от центра O , равных

$$\lambda_{\text{экстр.}} \sqrt{a_i^2 + b_i^2}. \quad (32.21)$$

Тогда, согласно формуле (32.4), радиальная скорость в системе отсчета \mathcal{E} равна нулю; скорость же в системе отсчета \mathcal{E}' (т. е. в пространстве) равна произведению компоненты r угловой скорости на расстояние (32.21). Входящий в выражение (32.21) множитель $\sqrt{a_i^2 + b_i^2}$ будет при этом коэффициентом подобия не только для начальных скоростей и начальных расстояний от центра тяжести, но также и для величин получающихся конических сечений. Тем самым доказана и 4-я часть теоремы Лагранжа. Три конических сечения взаимно смещены на углы, равные соответственно углам между тремя центральными осями.

В частном случае $m_1 = m_2 = m_3$, когда центр тяжести O является одновременно центром равностороннего треугольника, конические сечения конгруэнтны и смещены друг относительно друга на 120° .

Кроме этого движения по коническим сечениям, существует, по Лагранжу, класс движений, которые могут быть представлены в элементарных функциях и при которых три тела находятся на вращающейся прямой. Но на этом мы останавливаться не будем.

Укажем еще на то, что от лагранжева случая проблемы трех тел можно перейти к соответствующему частному случаю проблемы n тел. В случае, когда массы всех n тел одинаковы и скорости их подобраны соответствующим образом траектории представляют собой n равновеликих кеплеровых эллипсов, повернутых друг относительно друга на углы $\frac{2\pi}{n}$; движение по этим эллипсам происходит в одинаковом ритме. Этот род движения вскользь упоминается в теории рентгеновских L -спектров, где он обозначается термином «Ellipsenverein» [Physikal. Zeitschr., Bd **19**, S. 297 (1918)].