Глава VI

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ И ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

## § 33. ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ ГАМИЛЬТОНА

Мы знакомы уже с одним из вариационных принципов механики — принципом Даламбера. Этот принцип исходит из произвольно выбранного мгновенного состояния системы, которое сравнивается со смежным ее состоянием, возникающим из предыдущего в результате виртуального перемещения (ср. § 7). Напротив, те вариационные принципы механики, к изучению которых мы сейчас перейдем, являются *интегральными принципами*: они позволяют рассматривать ряд последовательных состояний системы за конечный промежуток времени или, что то же самое, на конечном отрезке траектории и сравнивать их с соседними виртуальными состояниями, находящимися с ними в определенном соответствии.

Характером этого соответствия и отличаются друг от друга различные и носящие различные названия интегральные принципы. Общим для них является то, что варьируемая величина имеет размерность *действия*. Поэтому их объединяют под общим названием — *принципы наименьшего действия*[1].

В то время как *мощностью*, как известно, называют величину *энергия : время*, *действием* называют величину с размерностью *энер-*

[1] К сожалению, этот термин выбран не совсем удачно. Когда мы говорим о причине и действии, мы под действием понимаем следствие или результат. С точки же зрения принципа наименьшего действия природа достигает своей цели прямейшим путем, следовательно, с наименьшей затратой средств. Поэтому более удачен был бы термин «принцип наименьшей затраты средств при наибольшем действии». Но после того, как термин «действие» санкционирован Гельмгольцем и Планком, всякая замена его другим термином была бы бесперспективной.

*гия × время.* Примером может служить элементарный квант действия Планка, с которым мы встретимся в § 45, именно — величина

$$h = 6{,}624 \cdot 10^{-27} \textit{эрг} \cdot \textit{сек.}$$

Вначале мы остановимся на *принципе наименьшего действия Гамильтона*, а рассмотрение исторически более раннего принципа Мопертюи отложим до § 37. Принцип Гамильтона отличается от принципа Мопертюи тем, что в нем *не должно варьироваться время.* Это значит, что система проходит одновременно как через точку действительной траектории (с координатами $x_k$), так и через соответствующую ей точку траектории, получаемой в результате варьирования (пусть координаты этой точки будут $x_k + \delta x_k$). Таким образом, для принципа Гамильтона имеет место

$$\delta t = 0. \tag{33.1}$$

При этом мы должны отметить, что, говоря о «траектории системы», мы подразумеваем не траекторию отдельной точки системы в трехмерном пространстве, а многомерную характеристику движения всей системы в целом. Если рассматриваемая система имеет $f$ степеней свободы, то траектория ее движения расположена в $f$-мерном пространстве обобщенных координат $q_1, \ldots, q_f$ (ср. 70).

Кроме условия (33.1), мы при рассмотрении принципа Гамильтона накладываем на вариации еще одно добавочное ограничение: положение начальной точки $O$ и конечной точки $P$ рассматриваемого участка траектории не должно варьироваться. Таким образом, для каждой координаты $x$ должно выполняться условие

$$\delta x = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0 \quad \text{и} \quad t = t_1. \tag{33.2}$$

Рис. 51 дает символическое трехмерное представление взаимного положения истинной траектории системы (сплошная кривая) и ее виртуальной траектории (пунктирная кривая): слагающееся из совокупности всех $\delta x$ смещение $\delta q$ должно быть вполне произвольным вдоль всей траектории, за исключением начальной и конечной точек, и должно представлять собой непрерывную и дифференцируемую функцию от $t$, причем каждые две соответственные точки действительной и варьированной траектории, связанные между собой вариацией $\delta q$, относятся к одному и тому же моменту времени $t$.

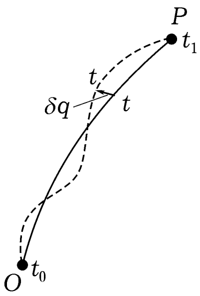


Рис. 51. Вариация траектории в принципе Гамильтона. Время не варьируется

Перейдем теперь к выводу принципа Гамильтона. Мы будем исходить при этом из принципа Даламбера в форме (10.6):

$$\sum_{k=1}^{n}\{(m_k\ddot{x}_k)\delta x_k+(m_k\ddot{y}_k-Y_k)\delta y_k+(m_k\ddot{z}_k-Z_k)\delta z_k\}=0. \tag{33.3}$$

Таким образом, мы рассматриваем систему из $n$ дискретных материальных точек, которые, однако, могут быть связаны друг с другом посредством какихлибо связей. Вариации $\delta x_k$, $\delta y_k$ и $\delta z_k$, которые также соответствуют этим связям, не независимы друг от друга. При $f$ степенях свободы только $f$ из них могут быть выбраны произвольно.

Произведем в уравнении (33.3) пока что формальное преобразование:

$$\ddot{x}_k\delta x_k=\frac{d}{dt}(\dot{x}_k\delta x_k)-\dot{x}_k\frac{d}{dt}(\delta x_k). \tag{33.4}$$

Но сейчас же зададим себе вопрос: что следует понимать здесь под $\dfrac{d}{dt}(\delta x_k)$? Чтобы ответить на этот вопрос, мы сравним между собой не только истинную траекторию (состоящую из точек $x_k$) с виртуальной траекторией (состоящей из точек $x_k+\delta x_k$), но также и скорость $\dot{x}_k$ вдоль истинной траектории со скоростью $\dot{x}_k+\delta\dot{x}_k$ вдоль виртуальной траектории *в один и тот же момент времени* $t$. Скорость $\dot{x}_k+\delta\dot{x}_k$, вдоль виртуальной траектории, по определению, равна

$$\frac{d}{dt}(x_k+\delta x_k)=\dot{x}_k+\frac{d}{dt}(\delta x_k).$$

Приравнивая друг другу оба выражения виртуальной скорости, мы получим:

$$\frac{d}{dt}(\delta x_k)=\delta\dot{x}_k. \tag{33.5}$$

Подставив это в выражение (33.4), будем иметь:

$$\ddot{x}_k\delta x_k=\frac{d}{dt}(\dot{x}_k\delta x_k)-\dot{x}_k\delta\dot{x}_k=\frac{d}{dt}(\dot{x}_k\delta x_k)-\frac{1}{2}\delta(\dot{x}_k^2). \tag{33.6}$$

Аналогичные выражения мы получим, разумеется, и для координат $y_k$ и $z_k$, следовательно, уравнение (33.3) можно переписать следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\sum m_k(\dot{x}_k\delta x_k + \dot{y}_k\delta y_k + \dot{z}_k\delta z_k) = \\ = \sum \frac{m_k}{2}\delta(\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2) + \sum(X_k\delta x_k + \\ + Y_k\delta y_k + Z_k\delta z_k). \quad (33.7)$$

Второй член правой части этого уравнения есть не что иное, как виртуальная работа $\delta A$, т. е. работа внешних сил на рассматриваемом виртуальном перемещении. Первый же член правой части является вариацией кинетической энергии $T$ системы:

$$T = \sum \frac{m_k}{2}(\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2)$$

при переходе от истинной к виртуальной траектории. Поэтому уравнение (33.7) можно упростить следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\sum m_k(\dot{x}_k\delta x_k + \dot{y}_k\delta y_k + \dot{z}_k\delta z_k) = \delta T + \delta A. \quad (33.8)$$

Прежде чем делать дальнейшие выводы, нужно сказать несколько слов по поводу соотношения (33.5). Перепишем его в следующей форме:

$$\frac{d}{dt}\delta x = \delta\frac{dx}{dt}. \quad (33.9)$$

Принимая во внимание, что $t$ не варьируется и что из $\delta t = 0$ следует также $\delta dt = 0$, мы можем соотношение (33.9) переписать в виде:

$$\frac{d\,\delta x}{dt} = \frac{\delta\, dx}{dt} \quad \text{или} \quad d\,\delta x = \delta\, dx. \quad (33.9a)$$

Главным образом, в этой последней форме «$d\delta = \delta d$» соотношение (33.9а) играло плодотворную, хотя и несколько «мистическую» роль в старом вариационном исчислении времен Эйлера. Мы видим, что соотношение (33.9а) является лишь видоизменением довольно тривиального соотношении (33.5) между производной по времени от виртуального перемещения и виртуальным изменением скорости, если *ввести дополнительное предположение о том, что время не варьируется* и что виртуальное перемещение непрерывно.

Теперь вернемся к уравнению (33.8) и проинтегрируем его по $t$ в пределах от $t_0$ до $t_1$. При этом, согласно уравнению (33.2), левая часть уравнения обратится в нуль, и мы получим

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A)\, dt = 0. \tag{33.10}$$

Применяя наш способ варьирования, можем также написать:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T\, dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta A\, dt = 0. \tag{33.11}$$

Однако было бы неправильно заменить последний интеграл выражением $\delta \int A dt$, так как вполне определенный смысл имеют лишь виртуальная работа $\delta A$ и элементарная работа $dA$, но не сама работа $A$. Работа $A$ ***не является, вообще говоря, «функцией состояния».*** Она является «функцией состояния» лишь в том случае, когда $dA$ представляет собой «полный дифференциал», т. е. когда внешние силы удовлетворяют условиям существования *потенциальной энергии* $V$ (ср. добавление к § 18). В этом случае мы можем в уравнении (33.11) заменить

$$\int \delta A dt \quad \text{через} \quad -\int \delta V dt = -\delta \int V dt.$$

Благодаря этому уравнение (33.11) принимает классически простую форму:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V)\, dt = 0. \tag{33.12}$$

Эту форму и подразумевают обычно, когда говорят о принципе Гамильтона; она справедлива (см. стр. 135) для консервативных систем. Напротив, формулу (33.11) мы называем «*принципом Гамильтона, обобщенным для случая неконсервативных систем*».

Мы утверждаем, что в формуле (33.12) или в формуле (33.11) (так же, как в принципе Даламбера) *заключена вся механика.* Этим подчеркивается особое значение энергетической величины $T - V$. В механике эта величина называется *функцией Лагранжа*, и формула (33.12) записывается также в виде

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\,dt = 0, \quad L = T - V. \tag{33.13}$$

Гельмгольц, который в своих последних работах использовал преимущественно принцип наименьшего действия в форме Гамильтона, назвал $L$ «*кинетическим потенциалом*». По аналогии с термодинамикой можно было бы назвать $L$ «*свободной энергией*», в противоположность термину «*полная энергия*» для $T + V$.

Принцип Гамильтона особенно ценен в том отношении, что он совершенно не зависит от выбора системы координат. Действительно $T$ и $V$ (как и $\delta A$) являются величинами, имеющими непосредственный физический смысл; они могут быть выражены в любых координатах. Мы воспользуемся этим в следующем параграфе.

Принцип Гамильтона, так же как и остальные принципы наименьшего действия, кажущимся образом противоречит нашему представлению о причинности, поскольку, согласно этому принципу, протекание процесса во времени определяется не состоянием системы в настоящий момент, а выводится с учетом в равной мере прошедшего и будущего системы. *Интегральные принципы являются, казалось бы, не каузальными, а телеологическими.* К этому вопросу мы вернемся в § 37, когда будем рассматривать историческое происхождение принципов наименьшего действия. Там же мы коснемся вопроса о распространении принципа Гамильтона на другие области физики.

## § 34. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

Рассмотрим произвольную механическую систему; допустим сначала, что на ее составные части наложены только голономные связи и что она имеет $f$ степеней свободы. Тогда мы можем ввести $f$ независимых координат, определяющих мгновенное положение системы. Обозначим эти координаты [как в уравнении (7.2)] через

$$q_1, q_2, \ldots, q_f. \tag{34.1}$$

Это наши «обобщенные координаты». Сопоставим им «обобщенные скорости»

$$\dot{q}_1,\, \dot{q}_2,\, \dots,\, \dot{q}_f. \tag{34.1a}$$

Совокупность всех $q_k$ и $\dot{q}_k$ полностью определяет мгновенное состояние системы.

Рассмотрим это более подробно. Допустим сначала, что положение системы описывается координатами $x_1, \dots, x_n$, которые могут и не быть обычными прямоугольными координатами. Пусть на них наложено $(n-f)$ условий связи:

$$F_k(x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n) = 0, \quad k = f+1,\, f+2,\, \dots,\, n. \tag{34.2}$$

С помощью $x_1, x_2, \dots, x_n$ определяем координаты $q_k$ как некоторые функции следующего вида:

$$F_k(x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n) = q_k, \quad k = 1,\, 2,\, \dots,\, f. \tag{34.2a}$$

Обозначая через $F_{ik}$ частные производные от $f_k$ по $x_i$ и дифференцируя по $t$ уравнения (34.2а) и (34.2), получим:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ik}(x_1,\, \dots,\, x_n)\dot{x}_i = \begin{cases} \dot{q}_k, & k = 1,\, 2,\, \dots,\, f, \\ 0, & k = f+1,\, \dots,\, n. \end{cases} \tag{34.2б}$$

Отсюда $\dot{x}_i$ определяются как линейные функции от $\dot{q}_k$ с коэффициентами, зависящими от $x_1, \dots, x_n$ или, в силу условий (34.2) и (34.2а), от $q_1, \dots, q_f$. Кинетическая энергия $T$, являющаяся однородной квадратичной функцией от $\dot{x}_i$ (как и в исходных прямоугольных координатах), будет также однородной квадратичной функцией от $\dot{q}_k$ с коэффициентами, зависящими от $q_k$. Потенциальную энергию $V$ мы будем вначале считать зависящей только от координат $q_k$. Впрочем, в целях дальнейших обобщений, в нашем рассмотрении мы не исключаем принципиально возможной зависимости функции $V$ от $\dot{q}_k$. В связи с этим дополним определение (33.13) функции Лагранжа в том смысле, что $L$ *следует рассматривать как функцию от* $q_k$ *и* $\dot{q}_k$.

Руководствуясь этим определением, образуем вариацию $L$, т. е. разность между значениями $L$ в виртуально варьированном состоянии (характеризуемом обобщенными координатами $q_k+\delta q_k$ и обобщенными скоростями $\dot q_k + \delta\dot q_k$) и в исходном состоянии (со значениями обобщенных координат и скоростей, соответственно, $q_k$ и $\dot q_k$):

$$\delta L = \sum_k \frac{\delta L}{\delta q_k}\delta q_k + \sum_k \frac{\delta L}{\delta \dot q_k}\delta \dot q_k. \tag{34.3}$$

Эту вариацию введем в выражение принципа Гамильтона:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \delta L\, dt = 0. \tag{34.3a}$$

Такая форма записи отличается от принятой в формуле (33.13) тем, что здесь варьирование производится под знаком интеграла, в то время как в выражении (33.13) оно вынесено за знак интеграла. Это, однако, допустимо ввиду условия (33.1): «$t$ и $dt$ не варьируются», и, более того, даже соответствует той формулировке (33.10), в которой мы впервые встретились с принципом Гамильтона.

Интегрирование по времени в формуле (34.3a) мы выполним прежде всего для общего члена второй суммы в выражении (34.3) и произведем *с помощью интегрирования по частям преобразование*, которое со времен Эйлера[1] является характерным для всего вариационного исчисления:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\,\delta\dot q_k\, dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\,\delta q_k\, dt = \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\,\delta q_k\Big|_{t_0}^{t_1} - \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\,\delta q_k\, dt. \tag{34.4}$$

В этом двойном равенстве первый член правой части обращается в нуль, согласно условию (33.2). Поэтому, используя выражение (34.3) для $\delta L$, мы получим:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \delta L\, dt = -\int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_k \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k}\right)\delta q_k\, dt = 0. \tag{34.4a}$$

[1]Вообще уравнением Эйлера произвольной вариационной задачи называют получаемое по образцу уравнений (34.4) и (34.5) дифференциальное уравнение типа (34.6). Таким образом, можно сказать, что уравнения Лагранжа являются эйлеровыми уравнениями вариационной проблемы, заданной функцией $L$.

Поскольку вариации $\delta q_k$ между собой независимы, мы можем все $\delta q_k$ положить равными 0, кроме одной, относительно которой мы можем допустить еще, что она также обращается в нуль вдоль всей «траектории» рис. 51, кроме окрестности одной точки, или, что то же самое, кроме интервала времени $\Delta t$, заключающего произвольный момент времени $t$. Тогда для того, чтобы имело место равенство (34.4а), мы должны потребовать выполнения следующего условия:

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k}\right)\int\limits_{\Delta t} \delta q_k\, dt = 0. \tag{34.5}$$

Но ни $\Delta t$, ни $\delta q_k$ в интервале $\Delta t$ не обращаются в нуль. Поэтому (для каждого произвольно выбранного момента времени $t$ и для каждого произвольно взятого индекса $k$) мы имеем:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0. \tag{34.6}$$

*Это и есть общие уравнения Лагранжа* или, иначе, *уравнения Лагранжа второго рода* для рассматриваемого нами случая, когда силы, действующие на систему, имеют потенциал, а связи, существующие внутри системы, голономны.

Если какое-либо из этих двух условий не выполняется, то уравнения Лагранжа принимают соответствующую обобщенную форму.

В первом случае (силы не имеют потенциала) следует исходить из формулировки (33.11) принципа наименьшего действия. При этом, выражая виртуальную работу $\delta A$ через виртуальные перемещения $\delta q$, положим:

$$\delta A = \sum Q_k \delta q_k. \tag{34.7}$$

*Введенные здесь коэффициенты $Q_k$ мы назовем обобщенными силами, соответствующими обобщенным координатам $q_k$.* Это является формальным расширением понятия силы и, конечно, допустимо как математическое определение. Целесообразность введения понятия обобщенной силы обнаруживается, например, в том, что данное в выражении (9.7) определение момента силы относительно оси теперь может быть сформулировано следующим образом: «момент силы относительно оси представляет собой обобщенную силу, соответствующую углу поворота вокруг этой оси». Совершенно ясно, что величины $Q$, определяемые формулой (34.7), уже не являются векторами и, вообще говоря, отнюдь не должны иметь размерности «*дины*». Их размерность, согласно формуле (34.7), существенно зависит от размерности соответствующей координаты $q_k$ и в случае момента силы, как мы знаем, является размерностью работы, т. е. «*эрг*», поскольку соответствующее $\delta q$ — величина безразмерная.

Подставив выражение (34.7) в формулу (33.11) и произведя вышеописанные преобразования [см. равенства (34.4) и (34.5)], мы вместо уравнений (34.6), очевидно, получим:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k. \tag{34.8}$$

Вместо этих уравнений мы можем написать еще несколько более общие уравнения:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k. \tag{34.8a}$$

Именно, когда только часть действующих сил имеет потенциал, а остальные силы его не имеют, можно написать в правой части уравнений (34.8a) только те $Q_k$, которые соответствуют силам, не имеющим потенциала; потенциальную же энергию остальной части сил можно в уравнении (34.8a) объединить с кинетической энергией $T$ в функцию Лагранжа $L$.

Эти уравнения (34.8a) являются *общими уравнениями Лагранжа, когда часть сил не имеет потенциала.*

Далее, если мы откажемся от второго из упомянутых условий, т. е. допустим, что часть из наложенных на систему связей неголономна, то мы тем самым затронем самый способ введения обобщенных координат $q_k$.

Согласно определению, неголономные связи мы не можем представить в форме условий (34.2) и, следовательно, не можем исключить их путем соответствующего выбора $q$. Напротив, нам придется ввести *избыточные* координаты $q$, число которых превышает число степеней свободы в бесконечно малой области. Последнее число равно $f - r$ ($f$ — число степеней свободы в конечной области, $r$ — число неголономных связей). Мы выразим эти неголономные связи в виде виртуальных условий, аналогичных условию (7.4):

$$\sum_{k=1}^{f} F_{k\mu}(q_1, \ldots, q_f)\delta q_k = 0, \quad \mu = 1, 2, \ldots, r. \tag{34.9}$$

Эти условия налагают ограничения на допустимые вариации $\delta q_k$. Это ограничение мы учтем путем умножения каждого из уравнений (34.9) на *множитель Лагранжа* $\lambda_\mu$ и суммирования их под знаком интеграла в формуле (33.13). Записывая, кроме того, функцию $F$ в несколько более сокращенной форме, мы получим:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta L + \sum_{\mu=1}^{r} \lambda_\mu F_{k\mu}\, \delta q_k)\, dt = 0.$$

Преобразование Эйлера производится так же, как и в формуле (34.4); при этом вместо выражения (34.4a) получается следующее:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_k \left( \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{\mu=1}^{r} \lambda_\mu F_{k\mu} \right) \delta q_k\, dt. \tag{34.10}$$

Правда, теперь вариации $\delta q_k$ уже не являются, как прежде, независимыми, а связаны между собой условиями (34.9). Однако можно рассуждать так, как это изложено на стр. 91: при соответствующем выборе множителей $\lambda_\mu$, $r$ из числа скобок, умноженных на $\delta q_k$ обращаются в нуль. Тогда в оставшуюся сумму по $k$ войдут только $f - r$ независимых друг от друга $\delta q$. Рассуждение, аналогичное примененному к формуле (34.5), убеждает нас в том, что и остальные выражения в скобках обращаются в нуль. Таким образом, мы получаем полную систему $f$ уравнений

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_{\mu=1}^{r} \lambda_\mu F_{k\mu}. \tag{34.11}$$

Эти уравнения могут быть названы *уравнениями Лагранжа смешанного типа*, так как занимают промежуточное положение между уравнениями Лагранжа первого и второго рода.

Следует также отметить, что этот смешанный тип уравнений встречается не только тогда, когда мы *не можем* исключить отдельные условия связи (случай неголономных связей), но и тогда, когда мы не хотим их исключать. А именно, нас может интересовать *принуждение*, оказываемое на систему голономными связями. Это принуждение представлено как раз множителем $\lambda_\mu$, соответствующим данному условию связи [как в уравнении (18.7) в случае сферического маятника], и может быть определено путем интегрирования уравнений (34.11).

Наконец, очевидно, можно также комбинировать друг с другом уравнения типов (34.11) и (34.8а), если отказаться одновременно от обоих предположений, при которых были выведены уравнения (34.6).

Но мы на этом останавливаться не будем, а рассмотрим здесь только вопрос, как и при каких допущениях можно вывести *закон сохранения энергии* из уравнений Лагранжа (34.6).

Выше, перед тем, как получить формулу (34.3), мы уже указывали, что $L$ является функцией от $q_k$ и $\dot{q}_k$; теперь мы специально подчеркиваем, что *функция Лагранжа L не должна явно зависеть от времени t.* Тогда соотношение (34.3) будет справедливо не только для виртуальных изменений $\delta q_k$ и $\delta\dot{q}_k$, но и для действительных изменений во времени $dq$, $d\dot{q}$; таким образом,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial q_k} + \sum_k \ddot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}. \tag{34.12}$$

С другой стороны, мы также подчеркивали, что кинетическая энергия $T$ является однородной квадратичной функцией[1] от $\dot{q}_k$. Поэтому, применяя теорему Эйлера об однородных функциях, получим:

$$2T = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}. \tag{34.13}$$

*Если T также не зависит явно от t* (см. ниже), то отсюда путем дифференцирования по $t$ можно найти:

$$2\frac{dT}{dt} = \sum_k \dot{q}_k \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \sum_k \ddot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}. \tag{34.14}$$

Вычтем почленно уравнение (34.12) из уравнения (34.14). Тогда, ввиду того, что $L = T - V$, в левой части получится

$$\frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt}.$$

[1] Если это даже не имеет места, так что $L$ является произвольной функцией $q_k$ и $\dot{q}_k$, можно доказать «обобщенный закон сохранения энергии», имеющий следующую форму:

$$H = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L = \mathrm{const}.$$

Определенную таким образом функцию $H$ мы будем в гл. VIII называть «функцией Гамильтона»; частным случаем приведенного уравнения является закон сохранения энергии, выражаемый уравнением (34.15в).

Вторые члены в правой части взаимно уничтожаются, если $V$ не зависит от $\dot{q}_k$. При том же условии, согласно уравнениям (34. 6), обратится в нуль и разность первых членов в правой части. Следовательно, мы имеем:

$$\frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} = 0, \tag{34.14a}$$

откуда заключаем, что

$$T + V = W, \tag{34.15}$$

т. е. *закон сохранения энергии является следствием уравнений Лагранжа.*

Рассмотрим исходные положения этого важного вывода.

а) Кинетическая энергия $T$ по своему смыслу определяется положением и скоростью системы, т. е. является функцией $q$ и $\dot{q}$; $T$ могла бы явно зависеть от $t$ только в результате исключения условий связи, в случае если бы последние зависели от $t$[1]. Однако, мы уже видели (см. стр. 93), что такие связи производят работу над системой и, следовательно, нарушают сохранение энергии. Таким образом, независимость $T$ от времени действительно является необходимым условием выполнимости закона сохранения энергии.

б) Условие, что $L$ не должно явно зависеть от $t$, сводится, на основании вышесказанного, к условиям независимости $V$ от $t$. Последнее также является необходимым. В противном случае правая часть уравнения (34.12) содержала бы член

$$-\frac{\partial V}{\partial t},$$

который тогда появился бы и в правой части уравнения (34.14a) с обратным знаком. Таким образом, вместо $T + V = \mathrm{const}$, мы имели бы

$$\frac{d}{dt}(T + V) = \frac{\partial V}{\partial t}, \tag{34.15a}$$

т. е. в этом случае закон сохранения энергии теряет силу.

[1]Такие зависящие от времени условия называются *реономными* (текущими) в противоположность условиям, не зависящим от времени, которые называются *склерономными* (твердыми).

в) Если $V$ зависит не только от $q_k$, но также от $\dot{q}_k$, то учитывая уравнения (34.6), мы получим разность правых частей уравнений (34.14) и (34.12) в виде

$$\sum \dot{q}_k \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} + \sum \ddot{q}_k \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt}\sum \dot{q}_k \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}. \tag{34.15б}$$

В этом случае, правда, имеет место закон сохранения, но форма его отлична от обычной:

$$T + V - \sum \dot{q}_k \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = \text{const}. \tag{34.15в}$$

Из изложенного мы выведем еще одно следствие, которое будет нам полезно в дальнейшем. Выразим $L - 2T = -(T+V)$, используя для $2T$ выражение (34.13) и снова считая $V$ функцией только $q_k$. Тогда мы найдем, что

$$-(T+V) = L - \sum \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = L - \sum \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

или

$$T + V = \sum \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L. \tag{34.16}$$

Таким образом, *полная энергия $T + V$ может быть определена из выражения «свободной энергии» $L$.*

Довольно абстрактные рассуждения, содержащиеся в этом параграфе, будут в полной мере конкретизированы на примерах, приводимых в следующем параграфе. Для того чтобы подготовить рассмотрение этих примеров, найдем выражения входящих в уравнения Лагранжа величин

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial L}{\partial q}$$

для простейшего частного случая отдельной материальной точки и для обычных прямоугольных координат $x$, $y$, $z$. Мы получим:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \text{и т. д.};$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = X \quad \text{и т. д.}$$

Поскольку, как мы видим, величина $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ равна $x$-компоненте импульса, мы будем называть вообще $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ *обобщенным импульсом, соответствующим обобщенной координате* $q_k$. Так как, с другой стороны, выражение $\dfrac{\partial L}{\partial x}$ дает $x$-компоненту силы, мы будем называть оба получающихся из $\dfrac{\partial L}{\partial q}$ члена *обобщенными силами, соответствующими обобщенным координатам* $q$:

$$\frac{\partial T}{\partial q} - \frac{\partial V}{\partial q} = \frac{\partial T}{\partial q} - Q, \tag{34.17}$$

именно, $Q$ — внешней силой, как и в формуле (34.7), а $\dfrac{\partial T}{\partial q}$ — фиктивной силой Лагранжа (последняя зависит от того, что природа координаты $q$ меняется с изменением положения в пространстве). Для не зависящей от положения в пространстве параллельной системы координат, какой является система координат $x$, $y$, $z$, эта последняя часть обобщенной силы равна нулю.

## § 35. ПРИМЕРЫ НА ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩИХ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА

Мы выберем примеры, которые мы уже рассматривали с помощью элементарных методов, чтобы на них показать превосходство формального метода Лагранжа.

### 1. Циклоидальный маятник

В качестве обобщенной координаты здесь удобно взять угол поворота $\varphi$ колеса, образующего циклоиду (см. рис. 26). Согласно формулам (17.2), прямоугольные координаты выражаются через этот угол следующим образом:

$$x = a(\varphi - \sin\varphi), \quad \dot{x} = a(1 - \cos\varphi)\dot{\varphi};$$
$$y = a(1 + \cos\varphi), \quad \dot{y} = -a\sin\varphi\dot{\varphi}.$$

Отсюда мы определяем:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = ma^2(1 - \cos\varphi)\dot{\varphi}^2,\\ V &= mgy = mga(1 + \cos\varphi),\\ L &= ma^2(1 - \cos\varphi)\dot{\varphi}^2 - mga(1 + \cos\varphi).\end{aligned}\right\} \qquad (35.1)$$

Ничего более относительно геометрии и механики рассматриваемой системы нам знать не нужно. Все остальное «выполнит за нас» формальный метод Лагранжа. Пользуясь им, мы получаем:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2ma^2(1 - \cos\varphi)\dot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = ma^2 \sin\varphi\dot{\varphi}^2 + mga\sin\varphi,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2ma^2(1 - \cos\varphi)\ddot{\varphi} + 2ma^2\sin\varphi\dot{\varphi}^2.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение движения маятника запишется в виде

$$(1 - \cos\varphi)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\sin\varphi\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{2a}\sin\varphi$$

или, после введения половинного угла и сокращения на $2\sin\frac{\varphi}{2}$,

$$\sin\frac{\varphi}{2}\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{2a}\cos\frac{\varphi}{2}. \qquad (35.2)$$

Легко убедиться, что левая часть этого уравнения тождественно равна

$$-2\frac{d^2}{dt^2}\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Следовательно, наше дифференциальное уравнение совпадает с прежним дифференциальным уравнением (17.6), с помощью которого был доказан точный изохронизм циклоидального маятника.

## 2. Сферический маятник

Координатами $q_k$ материальной точки здесь являются углы $\vartheta$ и $\varphi$, т. е. полярный угол и географическая широта на сфере радиуса $l$. Квадрат элемента длины запишется в виде

$$ds^2 = l^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2).$$

Поэтому кинетическая энергия равна

$$T = \frac{m}{2} l^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2).$$

Выражая потенциальную энергию, как в формуле (18.5а) в виде $V = mgl \cos\vartheta$, получим:

$$L = \frac{m}{2} l^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) - mgl \cos\vartheta. \qquad (35.3)$$

Теперь вступают в силу «автоматические» операции по схеме формального метода Лагранжа: после отделения постоянных множителей дифференциальные уравнения, относящиеся к $\vartheta$ и $\varphi$, принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\vartheta} - \sin\vartheta \cos\vartheta \dot{\varphi}^2 - \frac{g}{l} \sin\vartheta = 0, \\ \frac{d}{dt}(l^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (35.4)$$

Второе из этих уравнений представляет собой закон площадей, в полном согласии с уравнением (18.8). При этом мы замечаем, что здесь удалось обойтись без преобразования координат, которое предшествовало уравнению (18.8). Вводя константу площадей $C$ из уравнения (18.8), перепишем первое уравнение (35.4) в форме

$$\ddot{\vartheta} = \frac{C^2}{l^4} \frac{\cos\vartheta}{\sin^3 \vartheta} + \frac{g}{l} \sin\vartheta.$$

Второй член правой части соответствует моменту силы тяжести $M = mgl \sin\vartheta$, который представляет собой соответствующую углу $q = \vartheta$ обобщенную силу $Q$ в смысле определения (34.7). Первый член представляет фиктивную силу Лагранжа в смысле формулы (34.17); эта сила обусловлена тем, что градусы долготы, соответствующие данной координате $\vartheta$, расположены на сфере не «параллельно», а расходятся по мере удаления от полюса.

Весьма поучительно также проделать на этом примере предусмотренное в (34.11) обобщение уравнений Лагранжа, вводя в рассмотрение, наряду с $\vartheta$, $\varphi$, излишнюю координату $r$. Хотя эта координата уже определена условием $r = l$, но она интересует нас потому, что дает возможность с помощью множителя $\lambda$ определить давление материальной точки на поверхность сферы, или, что то же самое, натяжение нити маятника. Для того чтобы получить соответствующее дифференциальное уравнение, нам нужно лишь вместо формулы (35.3) написать:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2) - mgr\cos\vartheta \tag{35.5}$$

и, в дополнение к двум уравнениям (35.4), получить еще третье уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}m\dot{r} - mr\dot{\vartheta}^2 - mr\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2 + mg\cos\vartheta = \lambda r. \tag{35.6}$$

При этом величину $F_{k\mu}$, входящую в уравнения (34.11), мы положим равной $r$, переписав условие $r = l$ [для приведения в соответствие с условием (18.1)] в форме

$$F = \frac{1}{2}(r^2 - l^2) = 0.$$

Но из уравнения (35.6) при $r = l$ и $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ следует:

$$\lambda l = mg\cos\vartheta - ml(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2). \tag{35.7}$$

Эта формула совпадает с формулой (18.6), если в последней произвести преобразование от прямоугольных координат к сферическим $(\vartheta, \varphi)$. Мы видим, что и это преобразование координат становится излишним благодаря применению формального метода Лагранжа.

### 3. Двойной маятник

В качестве обобщенных координат $q_k$ здесь удобно выбрать углы $\varphi$ и $\psi$, обозначенные на рис. 38. Пользуясь обозначениями § 21, запишем:

$$\left.\begin{aligned} X &= L\sin\varphi, \quad x = L\sin\varphi + l\sin\psi;\\ Y &= L\cos\varphi, \quad y = L\cos\varphi + l\cos\psi.\end{aligned}\right\} \tag{35.8}$$

Отсюда получим:

$$\begin{aligned} T &= \frac{M}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) =\\ &= \frac{M+m}{2}L^2\dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2}l^2\dot{\psi}^2 + mLl\cos(\varphi - \psi)\dot{\varphi}\dot{\psi},\\ V &= -MgY - mgy = -(M+m)gL\cos\varphi - mgl\cos\psi.\end{aligned}$$

Последнее выражение имеет отрицательный знак, так как (ср. рис. 38) положительное направление $Y$ и $y$ совпадает с направлением силы тяжести. Функцию Лагранжа, равную $T-V$, мы обозначим здесь через $\Lambda$, так как через $L$ мы уже обозначили длину маятника. Тогда

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot\varphi} &= (M+m)L^2\dot\varphi + mLl\cos(\varphi-\psi)\dot\psi,\\
\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot\psi} &= ml^2\dot\psi + mLl\cos(\varphi-\psi)\dot\varphi,\\
\frac{\partial\Lambda}{\partial\varphi} &= -(M+m)gL\sin\varphi - mLl\sin(\varphi-\psi)\dot\varphi\dot\psi,\\
\frac{\partial\Lambda}{\partial\psi} &= -mgl\sin\psi + mLl\sin(\varphi-\psi)\dot\varphi\dot\psi.
\end{aligned}$$

При написании вытекающих отсюда уравнений Лагранжа мы сразу перейдем к малым углам $\varphi$, $\psi$. Ввиду того, что $\dot\varphi$, $\dot\psi$ являются величинами того же порядка малости, что $\varphi$ и $\psi$, квадратами их можно пренебречь. Тогда искомые уравнения Лагранжа принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
\ddot\varphi + \frac{g}{L}\varphi &= -\frac{m}{M+m}\frac{l}{L}\ddot\psi,\\
\ddot\psi + \frac{g}{l}\psi &= -\frac{L}{l}\ddot\varphi.
\end{aligned}\right\}\tag{35.9}$$

*Эти уравнения оказываются идентичными с уравнениями* (21.3), если проделать обратное преобразование от угловых координат $\varphi$, $\psi$ к координатам $X$, $x$ по формулам (35.8), упрощенным для случая малых $\varphi$, $\psi$:

$$\varphi = \frac{X}{L}, \quad \psi = \frac{x-X}{l}.$$

Это непосредственно очевидно для вторых уравнений (35.9) и (21.3); то же самое получается для первых уравнений (35.9) и (21.3), если в их правую часть подставить значение $\ddot\psi$ из второго уравнения (35.9). Поэтому все рассуждения относительно процесса колебания, относящиеся к уравнениям (21.3), полностью сохраняют силу и для наших новых уравнений (35.9) и их можно здесь не повторять.

Следует еще подчеркнуть, что в нашем чисто формальном рассмотрении *вообще не шла речь относительно натяжения нити маятника* $l$;

как уже указывалось в примечании к стр. 151, это натяжение неявно учтено в самом методе уравнений Лагранжа как внутренняя реакция системы.

### 4. Тяжелый симметричный волчок

Классическими координатами $q_k$ для этой задачи являются эйлеровы углы $\vartheta$, $\varphi$ и $\psi$ [$\vartheta$ и $\psi$ мы уже вводили в выражениях (25.4) и (26.5a)].

Мы определяем их вместе с соответствующими угловыми скоростями следующим образом (рис. 52).

1) $\vartheta$ — угол между вертикалью и осью фигуры; $\dot{\vartheta}$ — угловая скорость вращения вокруг линии узлов, перпендикулярной к обеим этим осям.

2) $\psi$ — угол, образованный линией узлов с некоторой неподвижной прямой в горизонтальной плоскости, например, с осью $x$; $\dot{\psi}$ — угловая скорость вращения вокруг вертикали.

3) $\varphi$ — угол, образованный линией узлов с некоторой неподвижной прямой в экваториальной плоскости волчка, например, с осью $X$; $\dot{\varphi}$ — угловая скорость вращения вокруг оси фигуры волчка.

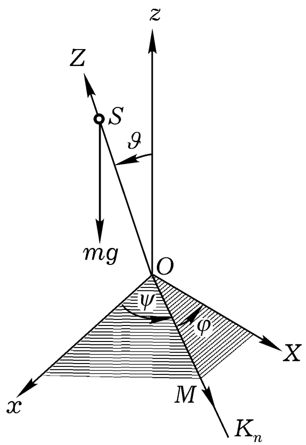


Рис. 52. Определение эйлеровых углов $\vartheta$, $\varphi$, $\psi$ и направлений их отсчета. Обозначения осей соответствуют координатным системам, введенным на стр. 185 ($z$ — вертикальная линия, $Z$ — ось фигуры, $x$ — неподвижная горизонтальная прямая, $X$ —прямая, закрепленная в экваториальной плоскости вращающегося тела)

Величины $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ являются «*голономными*», но косоугольными компонентами вектора угловой скорости вращения $\boldsymbol{\omega}$ в противоположность величинам $p$, $q$, $r$, которые были *прямоугольными*, но *неголономными* слагающими вектора $\boldsymbol{\omega}$. Нижеследующая таблица дает величины направляющих косинусов между обеими тройками компонент $p$, $q$, $r$ и $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$; одновременно она фиксирует выбор положительных направлений вращения $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ (в соответствии с правилом правого винта):

| | $\dot\vartheta$ | $\dot\varphi$ | $\dot\psi$ |
|---|---|---|---|
| $p$ | $\cos\varphi$ | $0$ | $\sin\vartheta\sin\varphi$ |
| $q$ | $-\sin\varphi$ | $0$ | $\sin\vartheta\cos\varphi$ |
| $r$ | $0$ | $1$ | $\cos\vartheta$ |

(35.10)

В силу сказанного в пп. 1 и 3, первые два столбца таблицы не требуют пояснений. Нетрудно уяснить себе и смысл третьего столбца, если сообразить, что проекция вертикального вектора длины $\dot\psi$ на экваториальную плоскость равна $\dot\psi\sin\vartheta$ и что при последующем проектировании на координатные оси в самой экваториальной плоскости она дает как раз приведенные в таблице слагающие при $p$ и $q$.

Итак, три горизонтальных строки нашей таблицы дают:

$$\left.\begin{aligned} p &= \cos\varphi\dot\vartheta + \sin\vartheta\sin\varphi\dot\psi,\\ q &= -\sin\varphi\dot\vartheta + \sin\vartheta\cos\varphi\dot\psi,\\ r &= \dot\varphi + \cos\vartheta\dot\psi. \end{aligned}\right\} \tag{35.11}$$

Отсюда

$$p^2 + q^2 = \dot\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\dot\psi^2. \tag{35.11a}$$

Из выражения (26.17), полагая $B = A$, получаем:

$$T = \frac{A}{2}(\dot\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\dot\psi^2) + \frac{C}{2}(\dot\varphi + \cos\vartheta\dot\psi)^2. \tag{35.12}$$

На основании формулы (25.6а) для потенциальной энергии $V$ в поле тяжести имеем:

$$\begin{aligned} L &= T - V = \\ &= \frac{A}{2}(\dot\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\dot\psi^2) + \frac{C}{2}(\dot\varphi + \cos\vartheta\dot\psi)^2 - P\cos\vartheta, \quad P = mgs. \end{aligned} \tag{35.13}$$

Таким образом, функция Лагранжа $L$ *не зависит* от координат $\varphi$ и $\psi$, а зависит только от соответствующих им скоростей. В таких случаях

$\varphi$ и $\psi$ называют циклическими координатами. Этот термин заимствован из задачи о вращающемся колесе, динамическое поведение которого, очевидно, совершенно не зависит от его мгновенного положения, а определяется лишь его окружной скоростью. Итак,

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0.$$

Согласно уравнениям Лагранжа, обращаются в нуль и производные по времени от величин

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}.$$

В конце предыдущего параграфа мы назвали эти величины *обобщенными импульсами, соответствующими обобщенным координатам* $\varphi$ *и* $\psi$. Впредь мы будем обозначать их буквой $p$. Итак, в общем виде мы пишем:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}. \tag{35.14}$$

Таким образом, для случая циклических координат $q_k$ мы можем высказать следующее утверждение: *циклические обобщенные импульсы суть постоянные интегрирования.* В нашем случае смысл этих постоянных нам уже известен из формул (25.6). Имеем:

$$p_\varphi = N, \quad p_\psi = n. \tag{35.15}$$

Однако раньше (стр. 188) мы не смогли выразить эти постоянные через углы Эйлера. Теперь же воспользуемся общим соотношением (35.14), из которого найдем:

$$\left.\begin{aligned} p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = C(\dot{\varphi} + \cos\vartheta\dot{\psi}), \\ p_\psi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = A\sin^2\vartheta\dot{\psi} + C\cos\vartheta(\dot{\varphi} + \cos\vartheta\dot{\psi}). \end{aligned}\right\} \tag{35.16}$$

Сравнивая выражения (35.15) и (35.16), получаем:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\varphi} + \cos\vartheta\dot{\psi} &= \frac{N}{C}, \\ A\sin^2\vartheta\dot{\psi} &= n - N\cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{35.17}$$

Этим и исчерпывается содержание двух уравнений Лагранжа. Третье уравнение Лагранжа, определяющее закон изменения величины

$$p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \dot\vartheta} = A\dot\vartheta, \tag{35.18}$$

имеет следующий вид [если с помощью соотношения (35.17) исключить $\dot\varphi$ и $\dot\psi$]:

$$A\ddot\vartheta = \frac{(n - N\cos\vartheta)(n\cos\vartheta - N)}{A\sin^3\vartheta} + P\sin\vartheta. \tag{35.19}$$

Правая часть этого уравнения, получающаяся из $\dfrac{\partial L}{\partial \vartheta}$, содержит не только уже знакомый нам член, учитывающий действие силы тяжести [ср. формулу (25.4)], но также и «фиктивную силу», обусловленную, как мы знаем (см. стр. 256), природой выбранной системы координат.

Уравнение (35.19) имеет вид обобщенного уравнения маятника. Но нам не нужно заниматься его интегрированием, так как мы располагаем интегралом энергии

$$T + V = W, \tag{35.20}$$

который должен совпадать с результатом первого интегрирования уравнения (35.19). Исключая с помощью уравнений (35.17) величины $\dot\varphi$ и $\dot\psi$, входящие в выражение (35.12), находим из формулы (35.20):

$$\frac{A}{2}\left\{\dot\vartheta^2 + \left(\frac{n - N\cos\vartheta}{A\sin\vartheta}\right)^2\right\} + \frac{N^2}{2C} + P\cos\vartheta = W. \tag{35.21}$$

Так как мы имеем здесь три постоянных интегрирования $n$, $N$ и $W$, то выражение (35.21) является ***общим интегралом первого порядка задачи о волчке.*** Наконец, заменяем $\vartheta$ и $\dot\vartheta$, как мы уже делали в § 18 для случая сферического маятника, по формулам

$$\cos\vartheta = u, \quad \sin\vartheta\dot\vartheta = -\dot u.$$

Тогда получим просто

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = U(u), \tag{35.22}$$

$$U = \left(\frac{2W}{A} - \frac{N^2}{AC} - \frac{2P}{A}u\right)(1 - u^2) - \left(\frac{n - Nu}{A}\right)^2. \tag{35.23}$$

Так как $U(u)$ является многочленом третьей степени относительно $u$, то время $t$ выражается, как и в случае сферического маятника, *эллиптическим интегралом первого рода*:

$$t = \int^{u} \frac{du}{\sqrt{U}}, \tag{35.24}$$

а азимут $\psi$, согласно второму уравнению (35.17), выражается *эллиптическим интегралом третьего рода* (ср. стр. 133):

$$\psi = \int^{u} \frac{n - Nu}{A(1-u^2)} \frac{du}{\sqrt{U}}. \tag{35.25}$$

Теперь мы можем повторить рассуждения, относящиеся к рис. 29 (стр. 132), и таким образом придем к изображению, представленному на рис. 53; след оси фигуры волчка на сфере единичного радиуса параллелями $u = u_2$ и $u = u_1$, которых он касается. Как видно из рис. 53, это касание может происходить либо без перемены направления движения следа, либо в виде петли (которая в частном случае может выродиться в острие). За время каждого такого качания или «цикла» ось фигуры волчка продвигается по азимуту на один и тот же угол $\Delta\psi$, который вычисляется по формуле (18.15).

В частности, для того, чтобы волчок совершал регулярную прецессию вокруг вертикали, необходимо,чтобы параллели $u_1$ и $u_2$ совпадали друг с другом; следовательно, в этом случае кривая $U(u)$ на рис. 29 (стр. 132) должна касаться снизу оси абсцисс. Вследствие этого регулярная прецессия является для тяжелого волчка (в противоположность свободному волчку) лишь *частным случаем его движения.*

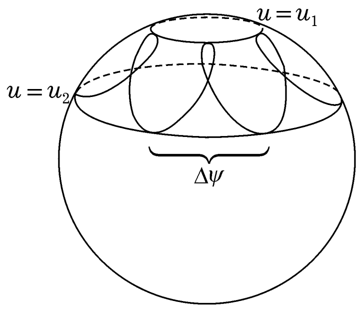


Рис. 53. След оси фигуры тяжелого симметричного волчка на сфере единичного радиуса

Если оба корня $u_1$ и $u_2$, совпадают не в точности, а лишь приближенно, то все еще имеет место *кажущееся* равномерное перемещение оси фигуры вокруг вертикали, на которое, однако, как показывает более детальное рассмотрение, накладываются *малые нутации.* В этом случае мы говорим о *псевдорегулярной прецессии.* Последняя является типичным явлением, сопровождающим обычные гироскопические опыты, в которых мы сообщаем маховичку с помощью шнура возможно более сильное вращение вокруг оси фигуры, а потом без заметного бокового толчка помещаем нижний конец его оси в подпятник (опору).

Мы объясняем это следующим образом. В рассматриваемом опыте вектор начального момента импульса $\mathbf{N}$ проходит вблизи оси фигуры; согласно построению Пуансо, то же самое относится и к начальному положению оси вращения. Таким образом, ось фигуры вначале описывает малый контур на сфере единичного радиуса (ср. рис. 43); касательные к этому контуру параллели $u = u_1$ и $u = u_2$ расположены близко друг к другу и остаются в таком положении в течение всего процесса движения (как показывает справедливое в общем случае изображение на рис. 53). Момент импульса, а значит и угловая скорость вращения, вначале весьма велики; они остаются таковыми и во время последующего движения (если не учитывать потери на трение). Таким образом, нутации происходят в очень быстром темпе и вообще почти не заметны. Волчок *кажущимся образом не поддается влиянию силы тяжести, а постоянно отклоняется в перпендикулярном к ней направлении.* Это парадоксальное поведение волчка с давних пор приковывало внимание любителей и исследователей к теории волчка.

## § 36. ДРУГОЙ ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА

Хотя принцип наименьшего действия и дает нам способ вывода общих уравнений Лагранжа, непревзойденный по своей наглядности и краткости, все же этот способ представляется нам несколько искусственным. Приведенный вывод не раскрывает истинной природы уравнений Лагранжа, заключающейся в свойствах преобразований различных механических величин. Следующий вывод должен восполнить этот пробел.

Рассмотрим систему $n/3$ материальных точек [$n$ должно делиться на 3), на которую наложены произвольные связи (для простоты будем считать их голономными). Число этих связей равно $n - f$, где $f$ означает число степеней свободы системы. Будем пользоваться обозначениями, введенными в § 34 [ср. уравнения (36.2)]. Пронумеруем координаты (которые мы теперь считаем прямоугольными) и обозначим их через $x_1, x_2, \ldots, x_n$; так же поступим и со слагающими внешних сил $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Компоненты элементарных количеств движения наших материальных точек обозначим через $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ [а не через $p_1, p_2, \ldots, p_n$, как это следовало бы сделать согласно общему условию (35.14); эти обозначения мы сохраним для лагранжевых обобщенных импульсов]. Тогда имеем:

$$\xi_i = m_i \dot{x}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{36.1}$$

причем величины $m_i$, конечно, по-трое равны между собой. Движение нашей системы описывается уравнениями Лагранжа первого рода (12.9), которые в принятых нами теперь обозначениях имеют следующий вид:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = X_i + \sum_{\mu=f+1}^{n} \lambda_\mu \frac{\partial F_\mu}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{36.2}$$

Введем теперь *обобщенные координаты* $q_1, \ldots, q_f$, которые могут и должны быть выбраны таким образом, чтобы [как в (34.2)] $n - f$ условий $F_\mu = 0$ удовлетворялись тождественно. Тогда старые и новые *обобщенные скорости* будут связаны соотношениями (34.26); разрешая последние относительно $\dot{x}$, получим:

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{f} a_{ik} \dot{q}_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{36.3}$$

Коэффициенты $a_{ik}$, как мы указывали в связи с уравнением (34.26), являются функциями от $x_1, \ldots, x_n$, а следовательно, и от $q_1, \ldots, q_f$. Таким образом, в то время как старые и новые координаты связаны друг с другом *произвольным «точечным преобразованием»*, скорости преобразуются друг в друга *линейно*, причем коэффициенты этого преобразования, в свою очередь, зависят от координат.

Как преобразуются друг в друга *обобщенные силы*? Обозначим новые обобщенные силы через $Q_k$ и определим их, как и в (34.7), условием инвариантности виртуальной работы, т. е. с помощью соотношения

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} X_i \, \delta x_i = \sum_{k=1}^{f} Q_k \, \delta q_k. \tag{36.4}$$

Переходя от виртуальных перемещений к действительным и от последних к соответствующим скоростям и принимая во внимание выражения (36.3), получим из условия (36.4):

$$\sum_{k=1}^{f} Q_k \dot{q}_k = \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{k=1}^{f} a_{ik} \dot{q}_k. \tag{36.4a}$$

В противоположность $\dot{x}_i$ величины $\dot{q}_k$ независимы друг от друга. Следовательно, коэффициенты при $\dot{q}_k$ в правой и левой частях равенства (36.4a) должны быть равны между собою; таким образом,

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} X_i, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{36.5}$$

Это преобразование является «транспонированным» по отношению к преобразованию (36.3), ибо в (36.3) суммирование производится по $k$, а в (36.5) — по $i$. Выпишем подробно:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2 + \ldots \\ Q_1 &= a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + \ldots \\ \dot{x}_2 &= a_{21}\dot{q}_1 + a_{22}\dot{q}_2 + \ldots \\ Q_2 &= a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots \end{aligned}$$

Таким образом, «транспозиция» заключается в замене $a_{ik}$ на $a_{ki}$. В этом случае принято говорить, что *обобщенные силы преобразуются контраградиентно*[1] *по отношению к обобщенным скоростям.*

Так же, как обобщенные силы, т. е. *коградиентно* с ними, преобразуются *обобщенные импульсы.* Импульсы мы можем рассматривать как толчки, сообщающие данные скорости первоначально покоящимся материальным точкам. Если новые импульсы обозначить через $p_k$, то они выразятся через старые импульсы $\xi_i$ следующим образом:

$$p_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \xi_i. \tag{36.6}$$

Этим и устанавливается определение обобщенных импульсов $p_k$. Это определение, правда, довольно сложно, но оно может быть легко преобразовано к более содержательному виду. С этой целью рассмотрим,

[1] Согласно принятым в общей теории относительности обозначениям, индексы у контраградиентных (или контравариантных) величин $Q$, $p$ пишутся сверху, в отличие от ковариантных величин $\dot{q}_k$. Однако для наших целей нам нет необходимости вводить разные обозначения для ковариантных и контравариантных величин.

подобно изложенному на стр. 248, выражения кинетической энергии как функции, с одной стороны, $\dot{q}$ и, с другой стороны, $\dot{x}$, причем в случае необходимости мы будем их различать с помощью обозначений

$$T_{\dot{q}} \quad \text{и} \quad T_{\dot{x}}.$$

В соответствии с этим преобразуем выражение

$$\frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T_{\dot{x}}}{\partial \dot{x}_i} \left[\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k}\right]. \tag{36.7}$$

Квадратные скобки здесь означают, что при дифференцировании по $\dot{q}_k$ как $q_k$, так и все остальные $\dot{q}$, кроме $\dot{q}_k$, считаются постоянными. Но при этом условии производная $\dfrac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k}$, согласно соотношению (36.3), равна просто $a_{ik}$. С другой стороны, элементарная формула

$$T_{\dot{x}} = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{x}_i^2$$

дает, очевидно,

$$\frac{\partial T_{\dot{x}}}{\partial \dot{x}_i} = \xi_i.$$

Таким образом, формула (36.7) принимает вид

$$\frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \xi_i. \tag{36.8}$$

Правая часть полученного равенства совпадает с правой частью равенства (36.6). Отсюда результат:

$$p_k = \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_k}. \tag{36.9}$$

Принимая, что внешние силы имеют потенциал $V$, не зависящий от $\dot{q}$, и вводя функцию Лагранжа $L = T - V$, можно вместо формулы (36.9) написать также

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}. \tag{36.9a}$$

Тем самым мы обосновали в общем виде определение (35.14) обобщенного импульса $p_k$.

Теперь мы можем преобразовать и уравнения движения (36.2) к нашим обобщенным координатам. Для этой цели умножим эти уравнения поочередно на $a_{ik}$ и просуммируем по $i$. Согласно формуле (36.5), в первом члене правой части получим:

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}. \tag{36.10}$$

Во втором члене правой части множителем при $\lambda_\mu$ будет

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial F_\mu}{\partial x_i} \quad \text{при} \quad \mu = f+1, \ldots, n. \tag{36.11}$$

Но, согласно формуле (36.3), имеем:

$$a_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}. \tag{36.12}$$

В этом легко убедиться, если в уравнении $dx_i = \sum a_{ik} dq_k$, тождественном с уравнением (36.3), фиксировать все $q$, кроме $q_k$. Таким образом, выражение (36.11) принимает следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \frac{\partial F_\mu}{\partial q_k}.$$

Но поскольку при нашем выборе $q_k$, функции $F_\mu$ при $\mu = f+1, \ldots, n$ тождественно обращаются в нуль [согласно (34.2)], то обращается в нуль также и частная производная $F_\mu$ по $q_k$. Таким образом, правая часть нашего уравнения сводится к выражению (36.10). В левой части вначале получим:

$$\sum_i a_{ik} \frac{d\xi_i}{dt}.$$

Преобразуем это выражение:

$$\frac{d}{dt} \sum_i a_{ik} \xi_i - \sum_i \xi_i \frac{da_{ik}}{dt} = \frac{dp_k}{dt} - \sum_i \xi_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \tag{36.13}$$

[при этом мы использовали формулы (36.6) и (36.12)]. Последнюю сумму мы переписываем в виде

$$\sum m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{1}{2} \sum m_i \dot{x}_i^2 = \frac{\partial}{\partial q_k} T_{\dot{q}}.$$

Здесь индекс $\dot{q}$ при $T$ указывает, что прежнее выражение $T$ через скорости $\dot{x}$ перед дифференцированием по $\dot{q}$ должно быть преобразовано к переменным $q$, $\dot{q}$. В соответствии с этим правая часть равенства (36.13) принимает вид

$$\frac{dp_k}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_k}. \tag{36.13a}$$

Так как это выражение должно быть равно выражению (36.10), то мы получаем:

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}. \tag{36.14}$$

Но это уравнение, принимая во внимание формулу (36.9а), вполне идентично с уравнением Лагранжа в форме (34.6), или, если не предполагать существования потенциальной энергии, с уравнением Лагранжа в форме (34.8).

Таким образом, все изложенное убеждает нас в том, что при выводе уравнений Лагранжа можно обойтись без принципа наименьшего действия, если только вместо этого достаточно глубоко исследовать свойства преобразований механических величин.

## § 37. ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ МОПЕРТЮИ

В конце § 33 мы говорили о *телеологическом* характере принципа наименьшего действия. «Телеологический» значит «целесообразный» или «целенаправленный». «Из всех возможных движений природа выбирает то, при котором цель движения достигается с наименьшей затратой действия» — такова возможная формулировка принципа наименьшего действия, хотя и весьма неопределенная, но вполне соответствующая по своему смыслу идее ученого, открывшего этот принцип.

Мопертюи опубликовал свой принцип в 1747 г. Ему указали на письмо Лейбница, относящееся к 1707 г. (оригинал этого письма не сохранился), но он ревностно защищал свой приоритет, не останавливаясь даже перед использованием своей власти в качестве президента Берлинской академии. Однако более определенную математическую форму принципу наименьшего действия придали только Эйлер и, в особенности, Лагранж.

В приведенной формулировке принципа содержится двоякая неопределенность:

1) Что следует здесь понимать под словом «действие»? Очевидно, не то же самое, что понимается под этим словом в принципе Гамильтона, поскольку речь теперь идет о формулировке, хотя и близкой к гамильтоновской, но все же отличной от нее.

2) Что значит «все возможные движения»? Совершенно необходимо точно определить совокупность всех сравниваемых движений, чтобы из них можно было выбрать истинное движение как наиболее целесообразное или наивыгоднейшее.

К пункту 1. Лейбниц рассматривал в качестве элементарного действия произведение $2T \cdot dt$. Мы также будем ниже терминами «интеграл действия» или «функция действия» обозначать величину[1]

$$S = 2\int\limits_{t_0}^{t_1} T\,dt. \tag{37.1}$$

Мопертюи, который, как и Декарт, считал основной динамической величиной количество движения $mv$, рассматривал в качестве элементарного действия произведение $mv \cdot ds$. Ясно, однако, что оба эти определения — Лейбница и Мопертюи — для случая отдельной материальной точки совпадают, ибо имеет место соотношение

$$2T \cdot dt = mv \cdot vdt = mv \cdot ds. \tag{37.2}$$

Но это совпадение обоих определений имеет место и для любых механических систем, если под действием понимать сумму элементов $m_k v_k\, ds_k$, взятую по всем материальным точкам.

[1]Множитель 2, разумеется, не существенен для вопроса о минимуме $S$, но он оказывается удобным для последующих формулировок в § 43. Впрочем, у Лейбница была еще некоторая неопределенность в вопросе о том, назвать ли *«Vis viva»* («живая сила») $mv^2$ или, как это делаем мы, $\frac{1}{2}mv^2$.

К пункту 2. При рассмотрении принципа Гамильтона мы ограничивали совокупность подлежащих сравнению движений условиями (33.1) и (33.2). Условие (37.2) мы сохраним, условие же (37.1) изменим. А именно, вместо $\delta t = 0$, мы потребуем, чтобы имело место

$$\delta W = 0. \tag{37.3}$$

Таким образом, ***мы сравниваем только траектории с такой же энергией, как энергия рассматриваемой траектории.*** Тем самым, разумеется, мы утверждаем, что рассматриваемый нами теперь принцип наименьшего действия справедлив только для движений, при которых выполняется закон сохранения энергии, т. е. для случая, когда силы имеют потенциал. Если мы обозначим этот потенциал через $V$ и, соответственно, для варьируемых траекторий — через $V + \delta V$, то, в силу условия (37.3), будем иметь:

$$\begin{gathered} \delta T + \delta V = 0, \\ \delta V = -\delta T, \\ \delta L = \delta T - \delta V = 2\delta T. \end{gathered} \tag{37.4}$$

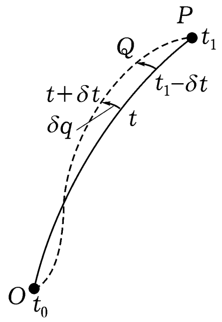


Рис. 54. Вариация «траектории» в принципе Мопертюи. Ввиду того что энергия не варьируется, точка $q$ исходной траектории и точка $q + \delta q$ варьированной траектории относятся к различным временам $t$ и $t + \delta t$. Конечной точке $P$ соответствует на варьированной траектории точка $Q$

Чтобы наглядно представить себе сущность изменений, внесенных условием (37.3), вспомним рис. 51. На этом рисунке две точки, связанные друг с другом вариацией $\delta q$, соответствуют одному и тому же моменту времени $t$. Теперь это не так: время в варьированной точке равно не $t$, а $t+\delta t$ (ср. рис. 54). Поэтому варьированная траектория достигает конечной точки $P$ не в момент $t = t_1$, а в данном случае, согласно рис. 54, в более поздний момент времени. Точке $Q$ нашей варьированной траектории, относящейся к моменту времени $t = t_1$, на исходной траектории соответствует более ранний момент времени $t_1 - \delta t_1$.

В соответствии с этим, проследим выкладки, содержащиеся в § 33. Соотношения (37.3) и (37.4) и теперь остаются в силе, но соотношение (37.5) нужно изменить, так как оно, как мы уже подчеркивали, справедливо только при $\delta t = 0$. Чтобы найти новое соотношение, заменяющее (33.5), образуем вариацию

$$\delta\dot{x} = \frac{d(x+\delta x)}{d(t+\delta t)} - \frac{dx}{dt}. \tag{37.5}$$

Перепишем первую производную правой части в виде

$$\frac{d(x+\delta x)}{dt} \Big/ \frac{d(t+\delta t)}{dt} = \left(\frac{dx}{dt} + \frac{d}{dt}\delta x\right) \Big/ \left(1 + \frac{d}{dt}\delta t\right) = \\ = \frac{dx}{dt} + \frac{d}{dt}(\delta x) - \dot{x}\frac{d}{dt}(\delta t) + \ldots, \tag{37.6}$$

причем опущенные члены являются малыми высшего порядка. Поэтому из равенства (37.5) следует:

$$\delta\dot{x} = \frac{d}{dt}(\delta x) - \dot{x}\frac{d}{dt}(\delta t), \quad \text{т. е.} \quad \frac{d}{dt}(\delta x) = \delta\dot{x} + \dot{x}\frac{d}{dt}(\delta t). \tag{37.7}$$

Подставляя последнее выражение в равенство (33.4), находим для любого индекса $k$:

$$\ddot{x}_k\,\delta x_k = \frac{d}{dt}(\dot{x}_k\,\delta x_k) - \dot{x}_k\,\delta\dot{x}_k - \dot{x}_k^2\frac{d}{dt}(\delta t). \tag{37.8}$$

Поскольку соотношение (37.8) в такой же мере, как и для $x$, справедливо для координат $y$ и $z$, из уравнений (33.3) получаем вместо (33.8):

$$\frac{d}{dt}\sum m_k(\dot{x}_k\,\delta x_k + \dot{y}_k\,\delta y_k + \dot{z}_k\,\delta z_k) = \delta T + 2T\frac{d}{dt}(\delta t) + \delta A. \tag{37.9}$$

Принимая во внимание условие (37.4), положим

$$\delta A = -\delta V = +\delta T. \tag{37.9a}$$

При этом в правой части равенства (37.9) получим:

$$2\delta T + 2T\frac{d\,\delta t}{dt}. \tag{37.10}$$

Теперь проинтегрируем равенство (37.9) от $t_0$ до $t_1$. При этом, в силу условия (33.2), левая часть обращается в нуль; ввиду (37.10) получаем:

$$2\int\limits_{t_0}^{t_1}\delta T\,dt + 2\int\limits_{t_0}^{t_1} T\,d\,\delta t = 0. \tag{37.11}$$

Но левая часть является не чем иным, как

$$2\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} T\,dt \tag{37.12}$$

или, на основании (37.1),

$$\delta S = 0. \tag{37.12a}$$

Тем самым мы подробно обосновали принцип наименьшего действия в форме Мопертюи.

По поводу перехода от формулы (37.11) к (37.12) необходимо еще заметить следующее. В случае принципа Гамильтона можно было, ввиду $\delta t = 0$, считать тождественными оба символа

$$\delta \int T\,dt \quad \text{и} \quad \int \delta T\,dt,$$

как это имело место, например, для равенств (33.10) и (33.11). Однако с нашей теперешней точки зрения они существенным образом отличаются друг от друга, в чем можно убедиться путем сравнения вышеприведенных выражений (37.11) и (37.12).

Если мы рассмотрим частный случай свободного движения, то для него из закона сохранения энергии $T = W$ и из (37.12), принимая во внимание условие (37.3), легко найти:

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} dt = \delta(t_1 - t_0) = 0. \tag{37.13}$$

Мы пришли к принципу кратчайшего времени прихода, сформулированному Ферма и примененному им к преломлению света, после того как еще в древности Герон соответствующим образом рассмотрел отражение света.

Для случая свободной материальной точки можно вместо $T = W$ взять $v = \text{const}$ и вместо (37.12) написать

$$\delta \int v\,dt = \delta \int ds = 0. \tag{37.14}$$

В этом состоит *принцип кратчайшего пути*, который определяет траекторию свободной материальной точки на кривой поверхности, а также (в общей теории относительности) на произвольно искривленном многообразии, как *геодезическую линию*. К этому мы вернемся в § 40.

В своих знаменитых «Лекциях по динамике», читанных в 1842 г. в Кенигсберге[1], Якоби обосновал необходимость полного исключения времени $t$ из выражения принципа наименьшего действия. Это возможно потому, что

$$T = W - V = \frac{1}{2}\sum m_k v_k^2 = \frac{1}{2}\frac{\sum m_k\, ds_k^2}{dt^2},$$

откуда

$$dt = \sqrt{\frac{\sum m_k\, ds_k^2}{2(W-V)}}.$$

Таким образом, вместо условия (37.12) можно потребовать:

$$\delta \int \sqrt{2(W-V)}\sqrt{\sum m_k\, ds_k^2} = 0. \qquad (37.15)$$

Здесь вариация при постоянном $W$ распространяется только на пространственные параметры траектории системы, в то время как о ее временном ходе вообще не говорится.

Возвращаясь снова к телеологической стороне этого принципа и принципа наименьшего действия Гамильтона, заметим, что «наименьшее действие» при известных обстоятельствах может оказаться и «наибольшим действием». Дело в том, что требование $\delta \ldots = 0$ соответствует собственно не *минимуму*, а, вообще говоря, лишь *экстремуму*. Проще всего это можно показать на примере геодезических линий, на поверхности шара, которые являются дугами больших кругов. Если начальная точка $O$ и конечная точка $P$ траектории находятся в одном и том же полушарии, то дуга большого круга, непосредственно соединяющая эти две точки, будет, правда, *короче* всех круговых дуг, получающихся от пересечения сферы с плоскостями, проходящими через $O$ и $P$, но не через центр шара; однако и дополнительная дуга большого круга, которая при противоположном начальном направлении движения проходит от точки $O$ через все второе полушарие к точке $P$, представляет собой геодезическую линию, причем эта линия *длиннее* всех остальных круговых дуг, проходящих от $O$ к $P$ через второе полушарие. Отсюда

[1] К. Якоби, Лекции по динамике, ОНТИ, 1936.

мы заключаем, что интегральные принципы отражают не «целенаправленность» природы, а лишь некоторое математически особенно выразительно сформулированное экстремальное свойство законов динамики.

Мопертюи считал свой принцип наиболее общим из всех законов природы. В настоящее время мы скорее склонны признать эту всеобщность за принципом наименьшего действия Гамильтона. Мы уже упоминали на стр. 246 о том, что Гельмгольц положил этот принцип в основу своих исследований по электродинамике. С тех пор интегральные принципы в форме Гамильтона нашли применение в самых различных областях физики.

Особое преимущество принципа Гамильтона обнаруживается в механике сплошных сред, поскольку этот принцип приводит не только к дифференциальным уравнениям задачи, но также и к краевым условиям, которым должны удовлетворять решения этих дифференциальных уравнений в частных производных. Во многих случаях необходимо вначале искать функцию Лагранжа $L$ (входящую в выражение вариационного принципа) в зависимости от характера задачи. Это имеет место, например, при движении электрона в магнитном поле, когда действующая сила не имеет потенциала $V$; далее — в теории относительности, когда $L$ нельзя выразить с помощью выведенного нами выражения (4.10) для кинетической энергии. Здесь роль «кинетической» части принципа наименьшего действия играет выражение

$$-m_0c^2 \int \sqrt{1-\beta^2}\, dt. \tag{37.16}$$

Эйлерова производная этого выражения приводит прямо к релятивистскому импульсу $\mathbf{G}$ в форме (2.19), а, следовательно, также и к закону зависимости массы электрона от его скорости. Вообще говоря, нахождение функции Лагранжа $L$, приводящей через посредство вариационного принципа к заданным дифференциальным законам, является (в особенности вне пределов механики) трудной задачей, для решения которой не существует общих правил. Для указанного выше случая движения электрона в магнитном поле эта задача была весьма простым способом разрешена Лармором и Шварцшильдом. В этом случае разложение $L$ на кинетическую и потенциальную части по схеме $L = T - V$, вообще говоря, уже невозможно.

Следует особо подчеркнуть, что величина, стоящая в выражении (37.16) под знаком интеграла, является не чем иным, как элементом собственного времени (2.17), который был признан Минковским простейшим инвариантом специальной теории относительности и введен Эйнштейном в качестве элемента мировой линии в общую теорию относительности. Таким образом, принцип Гамильтона в формулировке (37.16) автоматически удовлетворяет требованию инвариантности теории относительности. В этом Планк[1] видит «наиболее блестящий успех, достигнутый принципом наименьшего действия».

[1] См. поучительную статью в «Die Kultur der Gegenwart», Teil III, Abteilung III, 1 (Leipzig, 1915, B. G. Teubner, S. 701).