Глава VIII
ТЕОРИЯ ГАМИЛЬТОНА

§ 41. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА

В то время как в уравнениях Лагранжа независимыми переменными являлись обобщенные координаты q_k и обобщенные скорости $\dot{q}_k$ в *уравнениях Гамильтона*, которые мы теперь выведем двумя различными способами, ***независимыми переменными*** являются обобщенные координаты q_k и обобщенные импульсы p_k, причем последние определяются выражением (36.9a). Далее, в то время как в уравнениях Лагранжа характеристической функцией была «свободная энергия» $T - V$, рассматриваемая как функция q_k и $\dot{q}_k$, в *уравнениях Гамильтона роль такой характеристической функции играет «полная энергия» $T + V$, рассматриваемая как функция q_k и p_k*. Назовем ее *функцией Гамильтона* и обозначим через $H(q, p)$, подобно тому, как мы называли свободную энергию функцией Лагранжа и обозначали ее через $L(q, \dot{q})$. Функции H и L связаны соотношением (34.16), которое, учитывая определение p_k, можно переписать в виде

$$H = \sum p_k \dot{q}_k - L. \tag{41.1}$$

Однако мы тотчас же расширим основу теории (ср. конец § 37), а именно, откажемся от предположения, что L может быть разложено на кинетическую и потенциальную составные части, и допустим также явную зависимость L от t. Согласно изложенному на стр. 254, такая зависимость может возникнуть в том случае, если условия связи, наложенные на механическую систему, или уравнения, служащие для определения ее координат, содержат время. Таким образом, мы напишем функцию Лагранжа в более общей форме:

$$L = L(t, q, \dot{q}). \tag{41.1a}$$

Уравнение (41.1) мы будем рассматривать как определение соответствующей функции Гамильтона, не обращая внимания на ее первоначальный физический смысл как полной энергии системы:

$$H = H(t, q, p). \tag{41.1б}$$

Здесь, как и прежде, импульсы p определяются соотношением

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}. \tag{41.1в}$$

Положив в основу принцип Гамильтона

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} L\, dt = 0, \tag{41.1г}$$

получим [считая функцию L определенной выражением (41.1а)] точно так же, как в § 37, уравнения Лагранжа; для последующего рассмотрения эти уравнения мы запишем в форме:

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}. \tag{41.1д}$$

а) *Вывод уравнений Гамильтона из уравнений Лагранжа.*

Напишем полные дифференциалы функций H и L:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t} dt + \sum \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \sum \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k, \tag{41.2}$$

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t} dt + \sum \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k, \tag{41.2а}$$

Пользуясь уравнениями Лагранжа (41.1д) и определением (41.1в) импульсов p_k, преобразуем dL к виду

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t}\, dt + \sum \dot{p}_k\, dq_k + \sum p_k\, d\dot{q}_k. \tag{41.2б}$$

С другой стороны, пользуясь уравнением (41.2б), образуем дифференциал от выражения (41.1):

$$dH = \sum \dot{q}_k\, dp_k + \sum p_k\, d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t}\, dt - \sum \dot{p}_k\, dq_k - \sum p_k\, d\dot{q}_k. \tag{41.3}$$

Так как второй и последний члены взаимно уничтожаются, то

$$dH = -\frac{\partial L}{\partial t}\,dt - \sum \dot p_k\,dq_k + \sum \dot q_k\,dp_k. \tag{41.3а}$$

Это выражение dH должно быть тождественно с выражением (41.2). Приравнивая множители при dt, получаем:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{41.3б}$$

С другой стороны, сравнение множителей при dq_k и dp_k дает:

$$\dot p_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \dot q_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}. \tag{41.4}$$

Эти замечательно симметричные соотношения и называются обыкновенными дифференциальными уравнениями Гамильтона.

Нужно, впрочем, заметить, что уравнения типа (41.4) встречались уже значительно ранее у Лагранжа в его «Аналитической механике»[1], но там они выведены и применены лишь для частного случая малых возмущений.

б) *Вывод уравнений Гамильтона из принципа Гамильтона*

Если с помощью соотношения (41.1) написать принцип Гамильтона в виде

$$\delta\int L\,dt = \delta\int \left[H(t,\,q,\,p) - \sum p_k\dot q_k\right] dt =$$
$$= \sum_k \int \left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k}\delta p_k - \dot q_k\,\delta p_k - p_k\,\delta\dot q_k\right) dt = 0, \tag{41.5}$$

то последний член в скобках может быть преобразован интегрированием по частям:

$$-\int_{t_0}^{t_1} p_k\,\delta\dot q_k\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \dot p_k\,\delta q_k\,dt - p_k\,\delta q_k\Big|_{t_2}^{t_1}, \tag{41.6}$$

[1] Л а г р а н ж, Аналитическая механика, том первый, стр. 246, пункт 14, М.-Л., 1937.

причем член, не содержащий интеграла, обращается в нуль (в силу условий варьирования в принципе Гамильтона). Подставляя выражение (41.6) в уравнение (41.5) и группируя слагаемые с δq и δp, получим:

$$\sum_k \int \left(\left\{ \frac{\partial H}{\partial q_k} + \dot{p}_k \right\} \delta q_k + \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_k} - \dot{q}_k \right\} \delta p_k \right) dt = 0. \tag{41.7}$$

Если бы мы были вправе рассматривать величины δq_k и δp_k как независимые вариации, то непосредственно получили бы уравнения Гамильтона (41.4), приравняв нулю порознь множители при δq_k и δp_k. Это, однако, недопустимо: хотя q_k и p_k и входят в H как независимые переменные, но при вычислении интеграла действия они связаны между собой временной зависимостью, точно так же, как q_k и $\dot{q}_k$ в равенстве (41.6), вследствие чего мы и должны были проделать интегрирование по частям. Однако если мы возьмем частную производную по p от выражения (41.1) (при фиксированных q), то убедимся, что выражение во вторых фигурных скобках формулы (41.7) тождественно обращается в нуль[1]; отсюда мы вполне строго заключаем, что и выражение в первых фигурных скобках формулы (41.7) должно быть равно нулю.

Мы привели здесь второй вывод уравнений Гамильтона для того, чтобы сделать в связи с ним одно важное замечание.

Мы знаем, что уравнения Лагранжа инвариантны относительно любых «*точечных преобразований*», т. е. они сохраняют свою форму, если мы вместо q_k вводим любые другие координаты Q_k, связанные с q_k соотношениями:

$$Q_k = f_k(q_1, q_2, \ldots, q_f). \tag{41.8}$$

---

[1]Рассматривая L как функцию q_k, $\dot{q}_k$ и t, из формулы (41.1) находим:

$$dH = \sum p_k\, d\dot{q}_k + \sum \dot{q}_k\, dp_k - \sum \frac{\partial L}{\partial q_k}\, dq_k - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\, d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t}\, dt$$

или, на основании определения (41.1в),

$$dH = \sum \dot{q}_k\, dp_k - \sum \frac{\partial L}{\partial q_k}\, dq_k - \frac{\partial L}{\partial t}\, dt.$$

Отсюда

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k,$$

причем частная производная берется в предположении постоянства q и t. (*Прим. ред.*)

Тогда соответствующие P_k выражаются в виде

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_k} = \sum_i p_i a_{ik}, \tag{41.8a}$$

т. е. они являются линейными функциями от p_i; коэффициенты a_{ik}, как и в формуле (3.3), являются функциями координат q_k.

В противоположность этому, мы покажем, что уравнения Гамильтона инвариантны относительно *гораздо более общих преобразований*

$$\begin{aligned} Q_k &= f_k(q,\, p), \\ P_k &= g_k(q,\, p), \end{aligned} \tag{41.9}$$

при которых, следовательно, f_k и g_k являются произвольными функциями обоих рядов переменных q_k и p_k (с некоторым ограничением, которое будет тотчас же указано); в частности, q_k может и не быть линейной функцией относительно p_k.

Для этой цели выразим q, p через Q, P с помощью соотношений (41.9) [разумеется, соотношения (41.9) должны допускать такую возможность] и подставим результат в выражение $H(q,\, p)$. Преобразованную таким образом функцию Гамильтона обозначим через $\overline{H}$, таким образом,

$$H(q,\, p) = \overline{H}(Q,\, P). \tag{41.10}$$

Сравним, далее, величину $\sum p_k \dot{q}_k$, входящую в равенство (41.5), с $\sum P_k \dot{Q}_k$. При преобразовании (41.8), (41.8a) обе эти величины, как легко убедиться, были бы равны друг другу[1]. Потребуем теперь, чтобы равенство этих величина сохранялось и при общем преобразовании (41.9) с точностью до слагаемого, являющегося полной производной по времени некоторой функции F от q и p или, иначе, функцией от q

[1]Дифференцируя выражение (41.8) по времени, получаем:

$$\dot{Q}_k = \sum_i \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \dot{q}_i.$$

Отсюда после дифференцирования по $\dot{q}_i$ находим:

$$\frac{\partial \dot{Q}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial Q_k}{\partial q_i}.$$

и Q^1. Таким образом, полагаем:

$$\sum p_k \dot{q}_k = \sum P_k \dot{Q}_k + \frac{d}{dt} F(q,\, Q), \tag{41.11}$$

где функция F может быть выбрана произвольно. В этом и заключается упомянутое выше ограничение, накладываемое на преобразование (41.9).

Если мы теперь подставим выражения (41.10) и (41.11) в уравнение (41.5), то при интегрировании и последующем варьировании слагаемое с $\frac{dF}{dt}$ выпадает, так как на пределах интеграла вариации δq и δQ обращаются в нуль. Таким образом, уравнение (41.5) сохраняет свою прежнюю форму и может быть переписано следующим образом:

$$\delta \int (\overline{H}(Q,P) - \sum P_k \dot{Q}_k) dt = 0.$$

Так как ничто не изменяется и в прежних преобразованиях (41.6) и (41.7), то мы здесь приходим к заключению о справедливости уравнений Гамильтона. В соответствии с уравнениями (41.4), они имеют вид:

$$\dot{P}_k = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial Q_k}, \quad \dot{Q}_k = \frac{\partial \overline{H}}{\partial P_k}.[2] \tag{41.12}$$

Далее, принимая во внимание (41.8a), имеем:

$$\sum_k P_k \dot{Q}_k = \sum_i \sum_j \sum_k \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} p_j \dot{q}_j,$$

$$\sum_k \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} = \sum_k \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} = \frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij},$$

где $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$.
Следовательно,

$$\sum P_k \dot{Q}_k = \sum_i \sum_j \delta_{ij} p_i \dot{q}_j = \sum_i p_i \dot{q}_i,$$

что и требовалось доказать. (*Прим. ред.*)

[1]В самом деле, если F первоначально задана как функция q и p, то p можно выразить из первого уравнения (41.9) и подставить в F, благодаря чему получается новая функция F от q и Q. (*Прим. ред.*)

[2]Против приведенного доказательства можно выставить два возражения.

Во-первых, в принципе Гамильтона накладывается требование, чтобы вариации δq

Преобразования (41.9) в том частном случае, когда они ограничены условием (41.11), носят название касательных преобразований.

Так как при столь общих преобразованиях, как (41.9), величины P_k утрачивают свое первоначальное значение обобщенных импульсов, то величины P_k, Q_k лучше назвать «*каноническими переменными*»; в этом случае говорят, что P_k и Q_k являются «*канонически сопряженными*». Уравнения Гамильтона, вследствие их инвариантности относительно этих преобразований, называются также «*каноническими дифференциальными уравнениями*».

Именно в силу этой инвариантности относительно канонических преобразований, уравнения Гамильтона имеют особое значение в астрономической теории возмущений. Равным образом, уравнения Гамильтона играют важную роль и в общей статистике Гиббса.

Мы закончим наше рассмотрение уравнений Гамильтона замечанием, относящимся к закону сохранения энергии.

В соответствии с равенством (41.2), в общем случае имеет место:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial H}{\partial p_k}\dot{p}_k \right).$$

обращались в нуль на пределах интеграла. Однако вариации δp в общем случае на пределах интеграла отличны от нуля. Следовательно, и δQ на этих пределах, вообще говоря, также отличны от нуля. Можно было бы не делая никаких предположений относительно обращения в нуль вариации δQ на пределах интеграла, показать, что имеет место соотношение:

$$\sum_k \int \left(\left\{ \frac{\partial \overline{H}}{\partial Q_k} + \dot{P}_k \right\} \delta Q_k + \left\{ \frac{\partial \overline{H}}{\partial P_k} - \dot{Q}_k \right\} \delta P_k \right) dt = 0. \tag{41.7a}$$

(См., например, *де-Бройль*, Введение в волновую механику. Харьков — Киев, 1934.) Это соотношение отличается от (41.7) только тем, что в нем вместо q и p стоят Q и P.

Во-вторых, в силу уравнений (41.9), временная зависимость между δq и δp переносится также на δQ и δP. Поэтому пока нет оснований приравнивать нулю выражения в фигурных скобках, входящие в уравнение (41.7а). Метод, с помощью которого были выведены уравнения Гамильтона из уравнения (41.7) к уравнению (41.7а) непосредственно неприменим, поскольку теперь мы не можем рассматривать P_k как частную производную по $\dot{Q}_k$ от «функции Лагранжа», определяемой выражением $\sum P_k\dot{Q}_k - \overline{H}$.

Можно, однако, оправдать приведенное доказательство следующим образом. Будем рассматривать p и q как независимые переменные функции H. Будем при этом считать, что соотношение $p_k = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ имеет место лишь для истинного движения, но не обязательно должно выполняться для варьированного движения. Образуем

Здесь, согласно уравнению (41.4), выражение в скобках обращается в нуль для каждого k. Таким образом, в общем случае справедливо равенство:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{41.13}$$

В частности, если H не зависит явно от t, то отсюда получается *закон сохранения*:

$$\frac{dH}{dt} = 0, \quad H = \text{const}. \tag{41.14}$$

Этот закон является более общим, чем закон сохранении энергии, так как он, согласно соотношениям (41.1) и (41.1в), в случае любой, но *не зависящей от времени* функции Лагранжа L гласит:

$$\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L = \text{const}. \tag{41.14a}$$

Мы уже упоминали об этом законе сохранения в примечании на стр. 253. Он переходит в *закон сохранения энергии* в том частном случае, когда функцию Лагранжа L можно разложить на кинетическую

вариацию интеграла

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\sum p_k \dot{q}_k - H\right) dt$$

в предположении, что пределы интеграции t_0 и t_1 постоянны и что на этих пределах вариации δq_k и δp_k обращаются в нуль. Вариация этого интеграла, как легко видеть, равна

$$\sum \int \left\{ \left(\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k}\right) \delta p_k - \left(\dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k}\right) \delta q_k \right\} dt.$$

Для истинного движения, в силу уравнений Гамильтона (40.4) она обращается в нуль, т. е.

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\sum p_k \dot{q}_k - H\right) dt = 0. \tag{41.5a}$$

Это уравнение только по форме совпадает с вариационным принципом Гамильтона. Содержание его иное, поскольку в нем предполагается другой способ варьирования. В частности вариации δq и δp теперь могут рассматриваться как независимые. Поэтому из уравнения (41.5a) без привлечения каких-либо добавочных соотношений непосредственно вытекают уравнения Гамильтона (41.4). Теперь ясно, что приведенное выше доказательство формул (41.12) может быть сохранено, если исходить из уравнения (41.5a), ибо из требования $\delta q = \delta p = 0$ следует, что $\delta Q = \delta P = 0$. (*Прим. ред.*)

часть, являющуюся однородной квадратичной функцией скоростей $\dot{q}_k$, и потенциальную часть, не зависящую от $\dot{q}_k$.

§ 42. УРАВНЕНИЯ РАУСА И ЦИКЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Подобно тому, как в § 35 [ср. формулы (35.10) и (35.11)] мы рассматривали смешанный тип уравнений (по отношению к уравнениям Лагранжа первого и второго рода), мы теперь познакомимся еще с одним, смешанным типом «уравнений», занимающих *промежуточное положение между уравнениями Лагранжа и уравнениями Гамильтона.* Этот тип уравнений носит имя Рауса[1], в продолжение нескольких десятков лет преподававшего механику в Кембриджском университете. Несколько позднее Гельмгольц[2] положил этот же тип уравнений в основу своей теории моно- и полициклических систем, связанной с основными проблемами термодинамики.

Разобьем все степени свободы системы на две группы: одну группу, состоящую из $f-r$ степеней свободы, мы будем описывать лагранжевыми обобщенными координатами и обобщенными скоростями

$$q_1,\, q_2,\, \ldots,\, q_{f-r}; \quad \dot{q}_1,\, \dot{q}_2,\, \ldots,\, \dot{q}_{f-r};$$

вторую же группу степеней свободы мы будем характеризовать гамильтоновыми обобщенными координатами и обобщенными импульсами

$$q_{f-r+1},\, q_{f-r+2},\, \ldots,\, q_f; \quad p_{f-r+1},\, p_{f-r+2},\, \ldots,\, p_f.$$

Вместо функции Лагранжа L или функции Гамильтона H мы теперь введем функцию Рауса R, являющуюся функцией вышеприведенных $2f$-координат, а также (для общности) и времени t:

$$R(t,\, q_1,\, q_2,\, \ldots,\, q_f; \quad \dot{q}_1,\, \dot{q}_2,\, \ldots,\, \dot{q}_{f-r},\, p_{f-r+1}, \ldots,\, p_f) \tag{42.1}$$

[1] Мы считаем нужным указать его книгу: «Treatise on the dynamics of a system of rigid bodies, by Routh, I elementary part, II advanced part» — сборник задач, являющийся единственным в своем роде по богатству содержания. Свою форму уравнений динамики Раус развил впервые в конкурсном сочинении «A treatise of stability of a given state of motion».

[2] Berliner Akademie, 1884 и Crelles J., Bd. 97.

и определяемую выражением:

$$R = \sum_{k=f-r+1}^{f} p_k \dot{q}_k - L(t,\, q_1,\, q_2,\, \ldots,\, q_f; \quad \dot{q}_1,\, \ldots,\, \dot{q}_f). \tag{42.2}$$

Как мы видим, при $r = f$ функция Рауса переходит в *функцию Гамильтона* (41.1); с другой стороны, при $r = 0$ [когда сумма в первой части формулы (42.2) исчезает] она, с точностью до знака, переходит в *функцию Лагранжа.* Заметим при этом, что вместо определения (40.2) мы могли бы, очевидно, написать:

$$R = H(t,\, q_1,\, q_2,\, \ldots,\, q_f; \quad p_1,\, \ldots,\, p_f) - \sum_{k=1}^{f-r} p_k \dot{q}_k. \tag{42.2a}$$

Теперь мы поступаем, как в § 41 [см. (41.2) и (41.4)] и выражаем полный дифференциал R, с одной стороны, из (42.1):

$$dR = \frac{\partial R}{\partial t}\, dt + \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial R}{\partial q_k}\, dq_k + \sum_{k=1}^{f-r} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k}\, d\dot{q}_k + \sum_{k=f-r+1}^{f} \frac{\partial R}{\partial p_k}\, dp_k, \tag{42.3}$$

с другой стороны, из определения (42.2):

$$dR = \sum_{k=f-r+1}^{f} \dot{q}_k\, dp_k + \sum_{k=f-r+1}^{f} p_k\, d\dot{q}_k - dL. \tag{42.3a}$$

Здесь для dL мы можем непосредственно воспользоваться выражением (41.2б), которое мы для большей ясности перепишем в виде:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t}\, dt + \sum_{k=1}^{f} \dot{p}_k\, dq_k + \sum_{k=1}^{f-r} p_k\, d\dot{q}_k + \sum_{k=f-r+1}^{f} p_k\, d\dot{q}_k. \tag{42.3б}$$

При подстановке в равенство (42.3a) последний член выражения (42.3б) и средний член (42.3a) взаимно уничтожаются, после чего остается:

$$dR = -\frac{\partial L}{\partial t}\, dt - \sum_{k=1}^{f} \dot{p}_k\, dq_k - \sum_{k=1}^{f-r} p_k\, d\dot{q}_k + \sum_{k=f-r+1}^{f} \dot{q}_k\, dp_k. \tag{42.4}$$

Сравнивая теперь почленно равенства (42.4) и (42.3), получим, кроме соотношения

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

следующую схему уравнений:

для $k = 1, 2, \ldots, f-r$	для $k = f-r+1,$ $f-r+2, \ldots, f$
$\dot{p}_k = -\dfrac{\partial R}{\partial q_k}$	$\dot{p}_k = -\dfrac{\partial R}{\partial q_k}$
$p_k = -\dfrac{\partial R}{\partial \dot{q}_k}$	$\dot{q}_k = +\dfrac{\partial R}{\partial p_k}.$

(42.5)

Здесь $f-r$ *уравнений, стоящих слева, относятся к типу уравнений Лагранжа* (при $L = -R$), *а* r *уравнений, стоящих справа, относятся к типу уравнений Гамильтона* (при $H = R$).

Приложение этих уравнений к циклическим системам, которое и имел в виду Раус при их выводе, заключается в следующем. Мы принимаем, что координаты второй группы степеней свободы являются циклическими и, следовательно (согласно стр. 262), не входят в функцию Лагранжа; в таком случае они не входят также и в функцию Рауса. Вследствие этого, соответствующие p_k оказываются постоянными (согласно верхнему уравнению из правой группы уравнений Рауса или так же, как мы уже замечали на стр. 263, согласно уравнениям Лагранжа). Подставляя эти постоянные значении p_k и соответствующие им (вообще говоря, не постоянные) значения q_k в выражение (42.2), получим функцию Рауса, зависящую только от $f-r$ координат первой группы q_k и от $\dot{q}_k$. Для этих координат справедлива левая группа приведенных уравнений (42.5), благодаря чему задача сводится к $f-r$ уравнениям типа Лагранжа.

Для того чтобы пояснить этот метод на не слишком сложном примере (Раус применяет этот метод преимущественно к трудным вопросам устойчивости состояний движения), рассмотрим еще раз задачу о движении тяжелого симметричного волчка. Циклическими координатами этого «бицикла» являются эйлеровы углы φ и ψ; согласно формулам (35.15)–(35.17) имеем:

$$p_\varphi\dot\varphi + p_\psi\dot\psi = \;= N\left(\frac{N}{C} - \cos\vartheta\frac{n - N\cos\vartheta}{A\sin^2\vartheta}\right) + n\frac{n - N\cos\vartheta}{A\sin^2\vartheta} =$$

$$= \frac{N^2}{C} + \frac{(n - N\cos\vartheta)^2}{A\sin^2\vartheta}.$$

Следовательно, принимая во внимание формулу (35.13), получим:

$$R = \frac{N^2}{C} + \frac{(n - N\cos\vartheta)^2}{A\sin^2\vartheta} - \frac{A}{2}\dot\vartheta^2 - \frac{(n - N\cos\vartheta)^2}{2A\sin^2\vartheta} - \frac{N^2}{2C} + P\cos\vartheta =$$

$$= -\frac{A}{2}\dot\vartheta^2 + \Theta(\vartheta), \quad \Theta = \frac{N^2}{2C} + \frac{(n - N\cos\vartheta)^2}{2A\sin^2\vartheta} + P\cos\vartheta.$$

Поэтому из нижнего уравнения левой группы уравнений (42.5) следует (при $q_k = \vartheta$):

$$p_k = A\dot\vartheta$$

и из верхнего уравнения этой же группы:

$$A\ddot\vartheta = -\frac{\partial\Theta}{\partial\vartheta}, \tag{42.6}$$

что, разумеется, совпадает с «обобщенным уравнением маятника» (35.19). Таким же образом можно было бы показать применимость метода Рауса к проблемам более сложным, чем только что рассмотренная.

В начале своих лекций по теории Максвелла, прочитанных в 1891 г. в Мюнхенском университете, Больцман подробно рассматривает бициклическую систему, наглядно представляющую индукционные взаимодействия двух контуров тока.

В заключение рассмотрим в общем виде формальный математический метод, с помощью которого мы перешли от уравнений Лагранжа к уравнениям Гамильтона и, соответственно, Рауса. Допустим, что мы имеем дело с функцией Z двух переменных (или рядов переменных) x и y; пусть

$$dZ(x, y) = X\,dx + Y\,dy. \tag{42.7}$$

Если вместо x, y мы хотим ввести в качестве независимых переменных X, Y, то нужно вместо Z рассматривать, «преобразованную функцию»:

$$U(X, Y) = xX + yY - Z(x, y). \tag{42.8}$$

Дифференцируя уравнение (42.8) и принимая во внимание условие (42.7), непосредственно получим:

$$dU(X, Y) = x\,dX + y\,dY. \tag{42.9}$$

Уравнения (42.7) и (42.9) идентичны следующим «взаимным с ними соотношениям»:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial Z}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = Y, \\ &\frac{\partial U}{\partial X} = x, \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = y. \end{aligned} \tag{42.10}$$

Если, с другой стороны, мы хотим заменить только одну из первоначальных переменных, например, y на «канонически сопряженную» переменную Y, то мы должны видоизменить (42.8) следующим образом:

$$V(x, Y) = yY - Z, \tag{42.11}$$

откуда получаем:

$$dV(x, Y) = -X\,dx + y\,dY; \tag{42.12}$$

следовательно,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -X, \quad \frac{\partial V}{\partial Y} = y. \tag{42.13}$$

Переход от Z к U можно сравнить с переходом от уравнений Лагранжа к уравнениям Гамильтона, а переход от Z к V — с переходом от уравнений Лагранжа к уравнениям Рауса.

В математическом анализе подобная замена независимых переменных и связанное с ней преобразование характеристической функции, называемое преобразованием Лежандра, играет выдающуюся роль. Эта замена широко используется в термодинамике.

§ 43. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В начале прошлого столетия наиболее актуальным вопросом теоретической физики была «дилемма» правильности *волновой* или *корпускулярной* теории света. Основы *волновой* теории были заложены Гюйгенсом. В рассматриваемый период она получила подтверждение благодаря открытию Томасом Юнгом явления интерференции; *корпускулярная* же теория опиралась на авторитет Ньютона.

Гамильтон — астроном и математик — изучал ход лучей в оптических приборах. Публикация его работ, относящихся к этому вопросу[1], началась в 1827 г., т. е. после смерти двух величайших создателей волновой оптики — Фраунгофера и Френеля[2]. Работы Гамильтона в области общей динамики, результаты которых мы здесь вкратце изложим, относятся к более позднему времени, но тесно связаны с его работами по лучевой оптике[3].

Необходимо заметить, что развитие современной физики после открытия Планком элементарного кванта действия h в корне изменило самую постановку вопроса; она не гласит более: «Волновая *или* корпускулярная теория?», но: «*и волновая, и корпускулярная теория!*». Как увязать друг с другом, не впадая в противоречия, эти два, казалось бы, противоположных (а в действительности — *взаимно дополняющих друг друга*) толкования оптики (а в дальнейшем — и динамики)? Ответ на этот вопрос заключается, как показал Шредингер, в дальнейшем последовательном развитии хода мыслей Гамильтона, которое приводит к волновой или *квантовой механике.*

Лучевая оптика является механикой световых частиц; их траектории (в оптически неоднородных средах они ни в коем случае не будут прямолинейными) определяются обыкновенными дифференциальными уравнениями Гамильтона или эквивалентным им принципом наименьшего действия. Напротив, с точки зрения волновой теории световые лучи получаются как ортогональные[4] траектории системы волновых поверхностей. Последние, согласно принципу Гюйгенса, являются *параллельными поверхностями.* Гамильтон описывал семейство волновых поверхностей с помощью дифференциального уравнения (по необходимости — *в частных производных*) и распространил этот метод на мно-

---

[1]Trans. Irish Academy, 1827, 1830, 1832. Работы по динамике вышли в издании «Trans. Roy. Soc.» London 1834 and 1835.

[2]Огюстен Жан Френель родился 10 мая 1788 г., умер 14 июля 1827 г.; Иосиф Фраунгофер родился 6 марта 1787 г., умер 7 июня 1826 г.

[3]В изложении Якоби эта связь утрачивается. Лишь в 1891 г. она была вновь выявлена Ф. Клейном (Naturforscher-Gesellschaft in Halle; Ges. Abhandl., S. 601 and 603).

[4]Это справедливо для оптически изотропных сред. В анизотропных средах (кристаллах) ортогональность луча и волновой поверхности является не обычной евклидовой, а «тензорно» обобщенной неевклидовой ортогональностью.

гомерное пространство координат q_k произвольной механической системы. Тогда, как мы увидим, семейство волновых поверхностей определяется условием $S = \text{const}$, где S есть функция действия в форме (37.1), а ортогональные к этому семейству траектории определяются уравнением:

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}. \tag{43.1}$$

а) *Консервативная система.* Вначале мы рассмотрим механическую систему, для которой справедлив закон сохранения энергии, причем энергию можно разложить на кинетическую T и потенциальную V, В этом случае T, V и H не зависят явно от t.

Будем исходить из соотношения (37.9) и заменим в нем справа δA через

$$-\delta V = \delta(T - W) = \delta T - \delta W.$$

Тогда правая часть соотношения (37.9) принимает вид:

$$2\delta T + 2T\frac{d}{dt}\delta t = \delta W. \tag{43.2}$$

Левую часть того же соотношения переписываем в обобщенных координатах q, p:

$$\frac{d}{dt}\sum p_k\,\delta q_k \tag{43.3}$$

и, приравняв ее выражению (43.2), получим:

$$2\delta T + 2T\frac{d}{dt}\delta t - \delta W = \frac{d}{dt}\sum p_k\,\delta q_k. \tag{43.4}$$

Отсюда путем интегрирования по t в пределах от 0 до t [аналогично формулам (37.11)–(37.12a)] получим:

$$\delta S - t\delta W = \sum p\,\delta q - \sum p_0\,\delta q_0. \tag{43.5}$$

Здесь p_0 и δq_0 относятся к нижнему пределу интегрирования $t = 0$, а p и δq — к верхнему пределу t.

Уравнение (43.5) показывает, что мы будем рассматривать интеграл действия S как функцию начального положения q_0, конечного положения q и энергии W, а следовательно, вместо времени t будем пользоваться в качестве переменной произвольно задаваемой энергией W:

$$S = S(q, q_0, W). \tag{43.6}$$

Тогда из (43.5) при фиксированных q_0 и q получим следующее уравнение, определяющее временной ход движения:

$$t = \frac{\partial S}{\partial W}. \tag{43.7}$$

В то же время, фиксируя в уравнении (43.5) энергию W и варьируя лишь одну из координат q или q_0, получим:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad p_0 = -\frac{\partial S}{\partial q_0}. \tag{43.8}$$

Первое из этих соотношений совпадает с нашим утверждением (43.1), второе же соотношение мы вскоре приведем к более удобному виду.

Казалось бы, полученные соотношения дают мало нового для описания движения, пока не известно действие S в форме (43.6). Вспомним, однако, закон сохранения энергии:

$$H(q, p) = W.$$

Заменяя здесь p, согласно уравнению (43.8), получим:

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = W. \tag{43.9}$$

Это уравнение мы рассматриваем как уравнение для определения S. Поскольку T является квадратичной функцией импульсов p (V можно считать не зависящей от p), то ***дифференциальное уравнение Гамильтона в частных производных*** (43.9) ***является уравнением второй степени и первого порядка.***

Допустим, что мы нашли полный интеграл этого уравнения, т. е. интеграл, содержащий столько произвольных постоянных, сколько степеней свободы имеет рассматриваемая система. Обозначим эти произвольные постоянные через

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_f.$$

Так как само S не входит в уравнение (43.9), то S может быть определено из него только с точностью до аддитивной постоянной. Следовательно, одна из перечисленных постоянных интегрирования, скажем, α_1, является излишней и заменяется аддитивной постоянной, остающейся неопределенной. Вводя вместо α_1 параметр энергии W, запишем наш полный интеграл в следующей форме:

$$S = S(q,\, W,\, \alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots\, ,\, \alpha_f) + \mathrm{const}. \tag{43.10}$$

Классическим (хотя и не всегда применимым) методом получения подобного полного интеграла является метод разделения переменных, на котором мы остановимся в § 45. В § 44 мы покажем, как можно определить движение системы, если найден полный интеграл (43.10).

б) *Неконсервативная система.* Рассмотрим теперь общий случай, когда функция Лагранжа L, а следовательно, и функция Гамильтона H, зависит от t. В этом случае разложение L и H на T и V, вообще говоря, невозможно; в частности, если бы существовала потенциальная энергия V, то она зависела бы от времени. Этот случай важен для теории возмущений в астрономии и квантовой механике. Здесь не имеет места сохранение энергии, т. е. отсутствует и постоянная энергия W. Вследствие этого, мы не можем применить принцип наименьшего действия в форме Мопертюи, а должны обратиться к его гамильтоновой форме. Определим функцию действия S^* с помощью интеграла входящего в принцип Гамильтона:

$$S^* = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt. \tag{43.11}$$

Будем рассматривать S^* как функцию начального и конечного положений и *времени движения* t:

$$S^* = S^*(q,\, q_0,\, t), \tag{43.12}$$

в противоположность формуле (43.6), в которой место t занимала не существующая теперь константа энергии W.

Образуем теперь, согласно (43.11),

$$\frac{dS^*}{dt} = L; \tag{43.13}$$

с другой стороны, согласно (43.12):

$$\frac{dS^*}{dt} = \sum \frac{\partial S^*}{\partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial S^*}{\partial t} = \sum p_k \dot q_k + \frac{\partial S^*}{\partial t}. \tag{43.14}$$

В справедливости использованного здесь, аналогичного (43.8) соотношения

$$p_k = \frac{\partial S^*}{\partial q_k} \tag{43.15}$$

можно убедиться с помощью формулы (43.11), если продифференцировать ее по q_k и использовать соотношение (41.1д).

Сравнивая выражения (43.13) и (43.14), в силу общего определения (41.1) функции H, получаем:

$$\frac{\partial S^*}{\partial t} + H = 0. \tag{43.16}$$

Таким образом, используя зависимость (43.15), имеем:

$$\frac{\partial S^*}{\partial t} + H\left(q,\, \frac{\partial S^*}{\partial q},\, t\right) = 0. \tag{43.17}$$

Это и есть *общий вид дифференциального уравнения Гамильтона.* Оно заключает в себе прежнее уравнение (43.9) как частный случай. А именно, если принять, как в случае а), что H не зависит от t, то из уравнения (43.17) следует, что S^* линейно относительно t. Поэтому полагаем

$$S^* = at + b$$

и заключаем из (43.16), что $-a = H$, т. е. равно существующей теперь константе энергии W. Величина b оказывается тождественной нашей прежней функции действия S. Следовательно, общее уравнение (43.17) действительно переходит в более специальное уравнение (43.9).

Все сказанное нами в п. а) относительно интегрирования уравнения (43.9) относится и к более общему уравнению (43.17). Полный интеграл уравнения (43.17) теперь содержит $f+1$ постоянную, из которых одна по-прежнему является аддитивной. Теперь мы будем вместо (43.10) писать:

$$S = S(q,\, t,\, \alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots\, ,\, \alpha_f) + \text{const}. \tag{43.18}$$

§ 44. ТЕОРЕМА ЯКОБИ ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Мы уже указывали, что второе из уравнений (43.8) неудобно для интегрирования. Это объясняется тем, что мы получаем интеграл нашего дифференциального уравнения в частных производных не в форме (43.6), а в форме (43.10) или, соответственно (43.18). С другой стороны, мы получили уравнение (43.7):

$$t = \frac{\partial S}{\partial W}. \tag{44.1}$$

Это уравнение весьма наглядно описывает *временной ход движения.* Покажем теперь, что если мы будем дифференцировать S^* не по W, а по постоянным интегрирования $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_f$, то полученные уравнения

$$\beta_k = \frac{\partial S}{\partial \alpha_k}, \quad k = 2, 3, \ldots, f \tag{44.2}$$

будут описывать *геометрическую форму траектории системы, поскольку мы будем рассматривать величины β_k как новые постоянные интегрирования.* Это и есть теорема Якоби в случае а). В случае б) она принимает еще более наглядную форму:

$$\beta_k = \frac{\partial S^*}{\partial \alpha_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, f. \tag{44.3}$$

В этом случае мы имеем f уравнений одинакового вида, которые описывают движение системы как в пространстве, так и во времени.

Чтобы получить такую же наглядность и в случае а), следует вместо равенства (44.1) формально написать:

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1}, \tag{44.3a}$$

т. е. положить $t = \beta_1$ и $W = \alpha_1$.

При доказательстве мы положим в основу случай а) и вспомним определение (41.9) касательного преобразования (41.11), которое мы для последующего запишем в виде:

$$dF(q, Q) = \sum p_k\, dq_k - \sum P_k\, dQ_k. \tag{44.4}$$

Сравним это выражение с дифференциалом функции действия (43.10):

$$dS(q,\, W,\, \alpha) = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial S}{\partial q_k}\, dq_k + \frac{\partial S}{\partial W}\, dW + \sum_{k=2}^{f} \frac{\partial S}{\partial \alpha_k}\, d\alpha_k,$$

или, принимая во внимание формулы (43.8), а также (44.2) и (44.3а), получим:

$$dS(q,\, \alpha) = \sum_{k=1}^{f} p_k dq_k + \sum_{k=1}^{f} \beta_k d\alpha_k. \tag{44.5}$$

Это равенство совпадает с равенством (44.4), если положить:

$$F = S, \quad Q_k = \alpha_k, \quad P_k = -\beta_k. \tag{44.6}$$

Мы знаем далее, что из обыкновенных дифференциальных уравнений Гамильтона (41.4)

$$\dot p_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \dot q_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

путем преобразования q_k, $p_k \to Q_k$, P_k при условии (44.4) получаются уравнения (41.12).

$$\dot P_k = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial Q_k}, \quad \dot Q_k = \frac{\partial \overline{H}}{\partial P_k}.$$

В нашем случае, в силу (44.6), эти уравнения принимают вид:

$$-\dot\beta_k = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial \alpha_k}, \quad \dot\alpha_k = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial \beta_k}. \tag{44.7}$$

Но, согласно (41.10), имеем:

$$\overline{H}(Q,\, P) = H(q,\, p)$$

или с учетом (44.6):

$$\overline{H}(\alpha,\, -\beta) = W = \alpha_1. \tag{44.8}$$

Отсюда следует:

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial \alpha_k} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 1, \\ 0 & \text{при } k > 1, \end{cases} \qquad \frac{\partial \overline{H}}{\partial \beta_k} = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 1, \\ 0 & \text{при } k > 1. \end{cases} \tag{44.9}$$

Таким образом, уравнения (44.7) переходят в

$$\dot{\beta}_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 1, \\ 0 & \text{при } k > 1, \end{cases} \qquad \dot{\alpha}_k = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 1, \\ 0 & \text{при } k > 1. \end{cases} \tag{44.10}$$

Для величин α_k эти уравнения не дают ничего нового; они лишь подтверждают, что α_k суть постоянные интегрирования. Также и уравнение для β_1 не содержит ничего нового; именно — из $\dot{\beta}_1 = 1$ следует $\beta_1 = t$ (с точностью до несущественной аддитивной постоянной), как мы уже отмечали в связи с равенством (41.3а). Напротив, уравнения (41.10) для β_k при $k > 1$ содержат доказательство теоремы Якоби; именно — ***из этих уравнений видно, что величины β_k так же, как и α_k, являются постоянными интегрирования.***

Приведенное доказательство можно без существенных изменений распространить и на случай б), если несколько обобщить определение касательного преобразования. Однако для дальнейшего это обобщение нам не понадобится.

§ 45. ЗАДАЧА КЕПЛЕРА В КЛАССИЧЕСКОМ И КВАНТОВОМ РАССМОТРЕНИИ

В этом параграфе мы покажем, как метод интегрирования Гамильтона–Якоби непосредственно и, так сказать, «автоматически» приводит к решению *астрономической задачи о движении планет.* С другой стороны, мы установим, что этот же метод удовлетворяет требованиям *атомной физики* и дает естественное введение в (старую) квантовую теорию.

Мы исходим из функции Лагранжа для задачи двух тел (при неподвижном Солнце M) в полярных координатах:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + G\frac{mM}{r}. \tag{45.1}$$

Выразим отсюда обобщенные импульсы:

$$p_r = m\dot{r}, \quad r_\varphi = mr^2\dot{\varphi}. \tag{45.1а}$$

Вводя их в формулу (45.1) и изменив знак перед потенциальной энергией, получим функцию Гамильтона:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\varphi^2\right) - G\frac{mM}{r}. \tag{45.1б}$$

Согласно (43.9), дифференциальное уравнение Гамильтона имеет следующий вид:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 = 2m\left(W + G\frac{mM}{r}\right). \qquad (45.2)$$

На этом примере мы покажем, что следует понимать под «методом разделения переменных», упомянутым на стр. 303.

Будем искать решение дифференциального уравнения (45.2) в виде:

$$S = R + \varPhi, \qquad (45.3)$$

где R должно зависеть только от r, а $\varPhi$ — только от φ. Если бы мы заменили правую часть уравнения (46.2) для общности через $f(r, \varphi)$, то должно было иметь место

$$\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{d\varPhi}{d\varphi}\right)^2 = f(r, \varphi). \qquad (45.3\text{a})$$

Подобное соотношение, вообще говоря, не выполняется. Если, однако, как в нашем случае, f не зависит от φ, то достаточно положить $\frac{d\varPhi}{d\varphi}$ равным постоянной, скажем C. Тогда для определения R получим уравнение

$$\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 = f(r) - \frac{C^2}{r^2}, \qquad (45.4)$$

которое может быть разрешено в квадратурах. Допущение о независимости f от φ, очевидно, равносильно тому, что в нашем случае φ является «циклической» координатой, т. е. не входит явно в дифференциальное уравнение. На этом примере мы видим, что метод разделения переменных связан с особыми свойствами симметрии данного дифференциального уравнения, которые проявляются во многих случаях, но далеко не всегда.

Согласно общей схеме § 44, положим $C = \alpha_2$. Тогда уравнение (45.2) распадается на два уравнения:

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = \alpha_2, \qquad (45.5)$$

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \sqrt{2m\left(W + G\frac{mM}{r}\right) - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}. \qquad (45.6)$$

Уравнение (45.5) представляет собой закон площадей, т. е. второй закон Кеплера: постоянная интегрирования α_2 означает постоянный момент импульса и в сущности идентична с использованной ранее постоянной площадей (§ 6). Уравнение (45.6) есть уравнение изменения радиального импульса.

Согласно (45.5) и (45.6), если еще заменить W на α_1, функция действия S выразится в виде:

$$S = \int\limits_{r_0}^{r} \sqrt{2m\left(\alpha_1 + G\frac{mM}{r}\right) - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}\, dr + \alpha_2\varphi + \text{const.} \tag{45.7}$$

Нижний предел интегрирования может быть выбран произвольно, так как он влияет только на величину аддитивной постоянной.

Прежде всего нас интересует уравнение траектории, т. е. первый закон Кеплера. Для этого мы образуем, согласно (44.2),

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = -\alpha_2 \int\limits_{r_0}^{r} \left\{2m\left(\alpha_1 + G\frac{mM}{r}\right) - \frac{\alpha_2^2}{r^2}\right\}^{-1/2} \frac{dr}{r^2} + \varphi. \tag{45.8}$$

Здесь, очевидно, удобно ввести вместо r в качестве новой переменной интегрирования $s = \frac{1}{r}$ и переписать равенство (45.8) в следующем виде:

$$\beta_2 - \varphi = \alpha_2 \int\limits_{s_0}^{s} \left\{2m(\alpha_1 + GmMs) - \alpha_2^2 s^2\right\}^{-1/2} ds =$$

$$= \int\limits_{s_0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{(s - s_{\min})(s_{\max} - s)}}. \tag{45.9}$$

Здесь $s_{\min}$ и $s_{\max}$ означают обратные величины расстояний от афелия и перигелия; как показывает сравнение обоих интегральных выражений в равенстве (45.9), имеет место:

$$\left.\begin{aligned} s_{\min}s_{\max} &= -\frac{2m\alpha_1}{\alpha_2^2}, \\ s_{\min} + s_{\max} &= \frac{2Gm^2M}{\alpha_2^2}. \end{aligned}\right\} \tag{45.10}$$

Чтобы получить выражение (45.9) в удобной тригонометрической форме, введем еще подстановку:

$$s = \frac{s_{\min} + s_{\max}}{2} + \frac{s_{\max} - s_{\min}}{2} u, \tag{45.11}$$

которая переводит $s = s_{\max}$ в $u = +1$, $s = s_{\min}$ в $u = -1$. Тогда из (45.9) получаем:

$$\beta_2 - \varphi = \int\limits_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \tag{45.12}$$

и если мы еще возьмем произвольный нижний предел интегрирования равным $\frac{\pi}{2}$, то

$$\varphi - \beta_2 = \arccos u, \quad u = \cos(\varphi - \beta_2). \tag{45.13}$$

Наконец, при помощи (45.11) возвращаемся от u к s и принимаем во внимание, что, согласно рис. 7, имеет место:

$$s_{\min} = \frac{1}{a(1 + \varepsilon)}, \quad s_{\max} = \frac{1}{a(1 - \varepsilon)}$$

и, следовательно,

$$s = \frac{1}{a(1 - \varepsilon^2)} + \frac{\varepsilon}{a(1 - \varepsilon^2)} u.$$

Отсюда, принимая во внимание формулу (45.13), получаем уравнение эллипса в известной форме:

$$s = \frac{1}{r} = \frac{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \beta_2)}{a(1 - \varepsilon^2)}, \tag{45.14}$$

причем постоянная β_2 может быть включена в угол φ.

Однако по причинам, связанным с наблюдениями, астронома интересует не столько форма орбиты, сколько процесс движения по орбите во времени. Метод Гамильтона–Якоби весьма наглядным образом разрешает и этот вопрос, именно, посредством уравнения (44.1)

$$t = \frac{\partial S}{\partial W} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1},$$

из которого, после введения переменной s, получаем:

$$t = -\frac{m}{\alpha_2}\int\limits_{s_0}^{s}\frac{ds}{s^2\sqrt{(s-s_{\min})(s_{\max}-s)}}. \qquad (45.15)$$

Этим представлением мы одновременно дополняем наше прежнее рассмотрение в § 6, при котором мы оставляли без внимания зависимость местоположения планеты от времени. Если мы, далее, введем в качестве новой переменной интегрирования «эксцентрическую аномалию» из задачи I.16 [ее обозначение u не имеет, конечно, ничего общего с вспомогательной величиной u в формуле (45.11)], то интеграл (45.15) можно взять элементарными способами, и мы придем непосредственно к приведенному в упомянутой задаче уравнению Кеплера:

$$nt = n - \varepsilon \sin u.$$

Как известно, проблема двух и многих тел играет центральную роль также и в современной *атомной физике.* В *атоме водорода* электрон движется вокруг ядра (протона), как планета вокруг Солнца. Метод Гамильтона–Якоби поразительным образом оправдался также и в этой области. Этот метод непосредственно приводит нас к необходимости введения *квантовых чисел.*

В (старой) квантовой теории *фазовым интегралом*, соответствующим k-й степени свободы (если последняя может быть отделена от остальных степеней свободы), называют интеграл:

$$J_k = \int p_k\, dq_k, \qquad (45.16)$$

распространенный по всей области значений («фазовой области») переменной q_k и требуют при этом, чтобы J_k было целым кратным планковского кванта действия (ср. стр. 243):

$$J_k = n_k h. \qquad (45.16\text{a})$$

Выражая p_k в формуле (45.16) через функцию действия S, получаем:

$$\int \frac{\partial S}{\partial q_k}\, dq_k = \Delta S_k = n_k h. \qquad (45.17)$$

Величина ΔS есть k-й «модуль периодичности» функции действия, т. е. приращение, которое испытывает S, когда q_k пробегает всю свою фазовую область.

Электрон водородного атома имеет координаты $q_1 = \varphi$ и $q_2 = r$. Дифференциальное уравнение (45.2) для S и его решение (45.7) могут быть непосредственно перенесены из астрономии в атомную физику, если в них заменить потенциальную энергию тяготения на кулоновскую энергию $-\frac{e^2}{r}$.

Так как фазовая область координаты φ простирается от 0 до 2π, то из формул (45.7) и (45.17) получаем:

$$\Delta S_\varphi = 2\pi\alpha_2 = n_\varphi h. \tag{45.18}$$

Здесь n_φ — азимутальное квантовое число; α_2, как мы знаем, идентично с азимутальным моментом импульса p_φ.

Фазовая область координаты r простирается от $r_{\min}$ до $r_{\max}$ и обратно. В соответствии с этим формулы (45.7) и (45.17) дают:

$$\Delta S_r = 2\int\limits_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m\left(W - \frac{e^2}{r}\right) - \frac{n_\varphi^2 h^2}{4\pi^2 r^2}}\, dr = n_r h. \tag{45.19}$$

Здесь n_r радиальное квантовое число. Интегрирование можно выполнить (лучше всего комплексным интегрированием в плоскости r); при этом формула (45.19) переходит в

$$-n_\varphi h + 2\pi i \frac{me^2}{\sqrt{2mW}} = n_r h. \tag{45.20}$$

Отсюда получается энергия электрона водородного атома в квантовом состоянии $n = n_r + n_\varphi$:

$$W = -\frac{2\pi^2 me^4}{h^2 n^2}. \tag{45.21}$$

Эта величина отрицательна, так как энергия при бесконечном удалении электрона от протона (ср. вышеприведенное допущение о потенциальной энергии) принята равной нулю.

Формула (45.21), вместе с постулатом Бора об излучении энергии при квантовых переходах, впервые привела к пониманию спектра водорода (так называемые серии Бальмера) и далее — к современной теории спектральных линий вообще.

Как мы уже указывали в начале § 43, современное развитие атомной теории не остановилось на изложенном здесь представлении об электронных орбитах, но, следуя по стопам Гамильтона, пришло к углубленному пониманию атомных процессов на основе волновой механики.