

Приложения

Задачи к главе I

I.1. *Упругий удар*¹. n равных масс M расположены по прямой линии одна возле другой. Слева по ним одновременно ударяют две массы M , каждая со скоростью v . Законы сохранения энергии и импульса, очевидно, будут удовлетворены в том случае, если две массы слева передадут свою скорость двум последним массам справа. Показать, что эти законы не могли бы выполняться, если бы была выбита только одна масса справа или если бы две массы справа пришли в движение с различными скоростями v_1, v_2 .

I.2. *Упругий удар в случае неравных масс.* Допустим, что последняя масса m меньше остальных масс. Пусть слева ударяет масса M со скоростью v_0 . Показать, что, в силу законов сохранения энергии и импульса, *невозможно*, чтобы в движение пришла *только одна масса m* . Допустим, далее, что справа приходят в движение только две массы; каковы будут при этом их скорости?

I.3. *Упругий удар в случае неравных масс.* Последняя масса справа M' больше остальных масс. Сделав те же допущения, что и в задаче 2, нужно, однако, учесть, что предпоследняя масса справа передает свой импульс влево. Каковы скорости массы M' и первой массы M , расположенной на левом конце прямой? Что произойдет, если масса M' очень велика?

I.4. *Неупругое соударение электрона с атомом.* Электрон, обладающий массой m и скоростью v , ударяется о покоящийся атом массы M . При этом атом возбуждается, т. е. переходит из основного состояния в более высокое энергетическое состояние (разность соответствующих энергетических уровней равна W). Какова минимальная начальная скорость v_0 электрона, необходимая для этого возбуждения атома, если удар центральный?

Находим квадратные уравнения отдельно для конечной скорости электрона v и атома V . Из требования вещественности квадратного корня, входящего в решения этих уравнений, определяем минимальную величину v_0 . Эта величина несколько больше (впрочем, ввиду соотношения масс $\frac{M}{m} > 2000$, это превышение ненаблюдаемо мало), чем можно было бы ожидать, исходя

¹Рекомендуется изучающему эту книгу самому произвести опыты, описанные в задачах **I.1.**–**I.3.**, с помощью монет на гладкой поверхности или упругих шаров, нанизанных на нить таким образом, чтобы в состоянии покоя они соприкасались.

только из закона сохранения энергии, т. е. требуя, чтобы начальная кинетическая энергия электрона была не меньше W .

Если же ударяющая частица имеет такую же (или приблизительно такую же) массу, как ударяемая частица, то величина минимально необходимой энергии получается вдвое больше (или приблизительно вдвое больше), чем нужно было ожидать по закону сохранения энергии.

1.5. Ракета для полета на Луну. Ракета с непрерывным истечением пороховых газов летит вертикально вверх. Скорость истечения газов относительно ракеты a и масса вытекающих в секунду пороховых газов $\mu = -\dot{m}$ предполагаются постоянными во времени. Движение совершается без трения при постоянном ускорении силы тяжести g . Составить уравнение движения и проинтегрировать его, считая начальную скорость ракеты у поверхности Земли равной нулю. На какой высоте будет находиться ракета через $t = 10; 30; 50$ сек, если $\mu = \frac{1}{100}$ начальной массы m_0 и $a = 2000$ м/сек?

1.6. Падение водяной капли в насыщенной атмосфере. Шарообразная водяная капля падает без трения под влиянием силы тяжести в атмосфере, насыщенной водяными парами. Пусть и начале движения ($t = 0$) ее радиус $= c$, а ее скорость $= v_0$. Вследствие конденсации, капля испытывает непрерывное приращение массы, пропорциональное ее поверхности, и, следовательно, приращение радиуса, пропорциональное времени. Проинтегрировать дифференциальное уравнение движения, введя r вместо t в качестве независимой переменной, и доказать, что в случае $c = 0$ скорость равномерно нарастает со временем.

1.7. Падающая цепь. Свернутая цепь лежит на краю стола, причем вначале одно звено цепи неподвижно свешивается со стола. Звенья цепи по одному вовлекаются в движение; трение не принимается во внимание. Теорема живых сил (в ее обычной форме) в рассматриваемом случае не является интегралом уравнения движения. Здесь в балансе энергии нужно учесть, согласно теореме Карно, потерю энергии при ударе.

1.8. Падающий канат. Канат длиной l соскальзывает с неподвижной горизонтальной подставки, с которой к началу движения свешивался отрезок каната длиной x_0 ; x — длина вертикально висящей части каната в момент времени t . Канат не должен оказывать сопротивления изгибу. Показать, что закон сохранения энергии в форме $T + V = \text{const}$ является интегралом уравнения движения.

1.9. Ускорение Луны под действием земного притяжения. Расстояние Луны от Земли составляет приблизительно 60 земных радиусов. Орбиту Луны считаем круговой; время обращения полагаем равным 27 суткам 7 часам 43 минутам. Отсюда можно определить ускорение Луны по направле-

нию к Земле (центростремительное ускорение). Сравнение этого ускорения с ускорением, вычисленным из закона всемирного тяготения Ньютона, явилось первым подтверждением правильности этого закона.

1.10. *Момент силы как векторная величина.* Пусть в прямоугольной системе координат (x, y, z) точка приложения силы \mathbf{F} дана радиусом-вектором \mathbf{r} . Показать, что момент силы \mathbf{F} относительно начала координат системы при переходе к другой системе отсчета (x', y', z') , полученной из первой путем поворота, преобразуется как вектор, т. е. так же, как \mathbf{r} (x, y, z) . При этом предполагаем, что рассматриваемые системы координат являются обе либо правыми, либо левыми.

1.11. *Годограф движения планеты.* Как следует из уравнений (6.5), при $A = 0$ годограф движения планеты определяется уравнениями:

$$\begin{aligned}\xi &= \dot{x} = -\frac{GM}{C} \sin \varphi, \\ \eta &= \dot{y} = +\frac{GM}{C} \cos \varphi + B\end{aligned}$$

(M — масса Солнца, C — постоянная площадей, φ — истинная аномалия, ср. рис. 6). Показать, что орбита представляет собой гиперболу или эллипс, в зависимости от того, находится ли «полюс» $\xi = \eta = 0$ годографа вне или внутри последнего, и охарактеризовать предельные случаи параболы и окружности также в зависимости от положения этого полюса.

1.12. *Траектории параллельного пучка электронов в поле иона и огибающая этих траекторий.* На покоящийся ионизированный атом A (заряд E , масса M) последовательно (во времени) падает из бесконечности параллельный пучок электронов (заряд e , масса m) со скоростью v_0 . В какую окрестность атома вообще не могут попасть электроны, если знаки зарядов e и E одинаковы?

Примем направление падающих частиц за ось и будем рассматривать вопрос о движении электронов как плоскую задачу, лучше всего, исходя из уравнения траектории частицы в полярных координатах с A в качестве полюса системы координат и фокуса гиперболической траектории. Границей искомой области будет огибающая всех траекторий. Ввиду того, что $M \gg m$, ион A может рассматриваться как неподвижный.

Показать, что если заряды e и E имеют противоположные знаки, то хотя условия огибания и дают (кажущимся образом) ту же границу искомой области, но эта граница не имеет физического смысла.

1.13. *Эллиптическая траектория в поле центральной силы, прямо пропорциональной расстоянию.* Пусть масса m находится под действием силы,

направленной к неподвижной точке O (центральной силы)

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$$

($\mathbf{r} = \overrightarrow{Om}$; $k = \text{const}$). Показать, что для движения массы m справедливы следующие три закона:

- 1) m описывает эллипс с центром в точке O .
- 2) Радиус-вектор \mathbf{r} в равные промежутки времени описывает равные площади.
- 3) Время обращения T не зависит от формы эллиптической траектории, а зависит только от закона силы, т. е. от k и массы m .

I.14. *Расщепление ядра атома лития* (Кирхнер, 1933 г.). Если ядро атома водорода (протон, масса m_p) со скоростью v_p попадает в ядро Li^7 (литий, атомный вес 7), то последнее расщепляется на две альфа-частицы (масса $m_\alpha = 4m_p$), которые разлетаются почти (но не точно) в диаметрально противоположных направлениях. Для случая, когда альфа-частицы разлетаются с равными скоростями симметрично относительно направления «удара», вычислить угол 2φ их разлета. При этом нужно принять во внимание, что, кроме кинетической энергии E_p протона, в рассматриваемом случае фигурирует еще энергия W , освобождающаяся при расщеплении и определяемая дефектом массы, причем W гораздо больше, чем E_p . Эта энергия W также передается альфа-частицам. В окончательные формулы для $\cos \varphi$ входят, кроме масс m_p и m_α , кинетическая энергия протона E_p и энергия W .

В принятых в атомной физике единицах энергии $W = 14 \cdot 10^6 \text{ eV}$ (электрон-вольт). Как велики были скорость v_α и угол 2φ в опыте, в котором кинетическая энергия протона $E_p = 0,2 \cdot 10^6 \text{ eV}$?

I.15. *Центральное соударение нейтронов с атомными ядрами; действие парафинового блока*. Нейтроны лишь весьма слабо тормозятся свинцовой пластиной толщиной в 50 см, в то же время они полностью задерживаются слоем парафина в 20 см. Это объясняется тем, что при центральном ударе кинетическая энергия нейтрона (масса $m = 1$) полностью передается одному из водородных ядер парафина (масса протона $M_1 = 1$), тогда как ядру свинца (масса $M_2 = 206$) не передается сколько-нибудь заметная энергия. Построить кривую зависимости кинетической энергии, приобретаемой первоначально покоящимся атомным ядром (масса M) при центральном соударении с нейтроном (масса m), от величины отношения $\frac{M}{m}$.

I.16. *Уравнение Кеплера*. Временной ход процесса движения планеты по ее орбите определяется в дифференциальной форме законом площадей. Для того чтобы получить закон движения в конечной форме, можно, по Кеплеру, поступить следующим образом (рис. 55).

На большой оси кеплерова эллипса как на диаметре строится окружность. Планете, находящейся в момент t в точке E , сопоставляется на этой окружности точка K , имеющая в системе координат, совпадающей с главными осями эллипса, ту же абсциссу, что и точка E . Точка E задается полярными координатами r, φ (полюс S), тогда как точка K , задается полярными координатами a, u (полюс M). Таким образом, к истинной аномалии φ добавляется эксцентриская аномалия u . (Мы отсчитываем, как в тексте, обе эти аномалии от афелия в направлении движения, в отличие от астрономов, отсчитывающих их от перигелия, конечно, также в направлении движения планеты.)

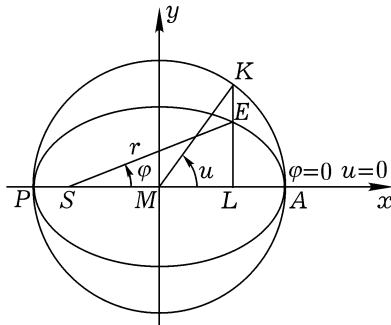


Рис. 55. Кеплерово построение средней аномалии u и ее связь с истинной аномалией φ

Координаты x и y планеты E можно выразить, с одной стороны, через r, φ и, с другой стороны, известным образом, через полуоси эллипса и эксцентрискую аномалию u , так что заданием точки K определяется также и точка E . Тогда процесс движения точки K , по окружности будет происходить согласно знаменитому уравнению Кеплера:

$$nt = (u - \varepsilon \sin u).$$

Здесь ε означает численный эксцентриситет эллиптической орбиты, а $n = \frac{\sqrt{GM}}{a^3} = \frac{C}{ab}$, где a, b — полуоси эллипса, G — постоянная тяготения, M — масса Солнца, C — постоянная площадей.

Для вывода уравнения Кеплера нужно исходить из уравнения эллипса в полярных координатах, беря S за полюс и радиус-вектор SA (Солнце — афелий) — за полярную ось [«параметр» $p = a(1 - \varepsilon^2)$]:

$$r = \frac{p}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)}.$$

Если мы с помощью указанных выше формул преобразования введем u вместо φ , то получим уравнение:

$$r = a(1 + \varepsilon \cos u).$$

Дифференцируя оба приведенных выше уравнения, исключая r и φ , а также используя закон площадей и соотношения (6.8), мы, в конце концов, путем интегрирования получим уравнение Кеплера; при этом надо еще условиться отсчет времени начинать с афелия.

Задачи к главе II

II.1. *Неголономные связи при качении колеса.* Колесо с острыми краями (радиуса a) катится без скольжения по шероховатому плоскому основанию (например, обруч на гладкой мостовой). Положение колеса в каждый данный момент времени определяется заданием следующих величин:

1) координат x, y точки касания колеса с основанием в прямоугольной системе координат x, y, z , плоскость xy которой совпадает с плоскостью основания,

2) угла ϑ между осью колеса и осью z ,

3) угла ψ , образованного касательной (линией пересечения плоскости колеса с плоскостью основания) и осью x ,

4) угла φ между радиусом колеса, проведенным в мгновенную точку касания, и произвольным, но фиксированным радиусом; этот угол можно отсчитывать, например, в направлении вращения.

Таким образом, катящееся колесо имеет пять степеней свободы в конечной области. Эта подвижность колеса, однако, ограничивается условием чистого качения (без скольжения), вызванного трением сцепления между колесом и основанием; действительно, при качении колеса в мгновенном направлении путь, пройденный вдоль касательной, должен быть равен $\delta s = a \delta \varphi$. Проектируя на оси, получим следующие условия связи для перемещений δx , δy и $\delta \varphi$:

$$\delta x = a \cos \psi \delta \varphi, \quad \delta y = a \sin \psi \delta \varphi. \quad (1)$$

Следовательно, в бесконечно малой области катящееся колесо имеет только три степени свободы.

Показать, что условия (1) не могут быть сведены к уравнениям, связывающим координаты. Для этого нужно доказать, что существование соотношений $f(x, y, \varphi, \psi)$ [ведь ϑ не входит в (1)] одновременно с условиями (1) ведет к противоречию.

II.2. *Приближенный расчет маховика одноцилиндровой поршневой пары машины двойного действия* (см. также § 9).

(«Двойное действие» означает, что пар попеременно подается по обе стороны поршня, так что работа производится как при прямом, так и при обратном ходе поршня.)

Если мы для простоты примем, что давление пара во время каждого хода поршня остается неизменным (паровая машина без расширения), а длину шатуна положим бесконечной, то за время половины оборота (от переднего до заднего мертвого положения кривошипа, т. е. между моментами нахождения поршня у соответственных оснований цилиндра) крутящий момент M , передаваемый поршнем на вал, меняется в зависимости от угла поворота

кривошипа φ согласно формуле

$$M = M_0 \sin \varphi$$

[ср. формулу (9.5)]. Здесь M_0 — постоянная; угол φ отсчитывается от заднего мертвого положения в направлении вращения. Во время второй половины хода (от переднего до заднего мертвого положения) крутящий момент при сделанных выше допущениях (именно: 1) машина двойного действия, 2) отсутствие расширения, 3) шатун бесконечной длины) изменяется по тому же самому закону; при этом угол φ нужно отсчитывать от переднего мертвого положения в направлении вращения.

Пусть нагрузка машины задача постоянным моментом W , соответствующим мощности N лош. сил при n оборотах в минуту. Вследствие непостоянства вращающего момента M при неизменном моменте нагрузки W угловая скорость вращения вала колеблется между наибольшим значением ω_{\max} и наименьшим значением ω_{\min} около среднего значения ω_m , которое приближенно положим равным

$$\omega_m = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}.$$

Назначение маховика состоит в том, чтобы не допускать роста относительного колебания числа оборотов, так называемой «степени неравномерности»

$$\delta = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{\omega_m},$$

выше установленного предела. Каков должен быть момент инерции требуемого маховика, если пренебречь инерционными воздействиями остальных движущихся масс (поршня с поршневым штоком и крейцкопфом, шатуна, кривошипа)?

II.3. *Центробежная сила при увеличенной скорости вращения Земли.* С какой скоростью должна вращаться Земля для того, чтобы на экваторе сила тяжести и центробежная сила взаимно уничтожились? Какова была бы при этом продолжительность суток?

II.4. *Опыт Поггендорфа с весами.* На одной стороне коромысла весов укреплен (без трения) невесомый ролик; через ролик перекинута нить F , несущая на одном конце груз P , а другом, как в машине Атвуда для исследования законов падения, груз $P + p$ (p — малый довесок). Вначале груз p прикреплен нитью F к оси ролика. На другой стороне весов грузы уравновешиваются. Вслед за этим нить F пережигается. Требуется определить:

- а) С каким ускорением поднимаются или опускаются грузы P и $P + p$?
- б) Отклоняется ли при этом коромысло весов?
- в) Какое натяжение действует в нити F ?

II.5. *Ускоренно движущаяся наклонная плоскость.* Наклонная плоскость движется в вертикальном направлении, согласно заданной зависимости от времени. По этой наклонной плоскости скользит без трения тело массы m . Исследовать движение этого тела, в частности, для случая движения наклонной плоскости с постоянным ускорением $\pm g$.

II.6. *Центробежные моменты при равномерном вращении несимметричного тела вокруг оси.* Несимметричное тело равномерно вращается вокруг оси, концы которой A и B находятся в подшипниках. Какие реакции A и B возникают в подшипниках? Определить эти реакции по принципу Даламбера показать, что они обусловлены приложенной в центре тяжести равнодействующей центробежной силы и результирующим моментом центробежных сил отдельных элементов массы.

Реакции, обусловленные только весом тела, известны (стр. 77) и поэтому их можно здесь не рассматривать.

II.7. *Теория игрушки йо-йо¹.* На дискообразном теле (масса M , момент инерции Θ) сделан глубокий, симметричный относительно его средней плоскости, паз (имеется в виду средняя плоскость, перпендикулярная к оси диска) Через этот паз на ось диска (радиуса r) намотана нить, верхний конец которой придерживается. Натянув нить, отпускают тело. Опускаясь, тело в то же время ускоренно вращается до тех пор, пока не размотается вся нить. В то время, как нить вновь наматывается в обратном направлении, тело поднимается, замедляясь в своем вращении, и т. д. Определить натяжение нити: а) при опускание тела, б) при подъеме тела.

Радиус r считаем столь малым по сравнению с расстоянием оси от верхнего конца нити, что нить можно все время рассматривать как вертикальную.

II.8. *Отрыв материальной точки от шаровой поверхности, по которой она движется.* По верхнему полушарию движется материальная точка; ее начальное положение z_0 и начальная скорость v_0 произвольны; однако начальная скорость v_0 направлена по касательной к поверхности шара. Движение происходит без трения под действием силы тяжести. На какой высоте произойдет отрыв материальной точки от поверхности шара?

Задачи к главе III

III.1. *Сферический маятник в случае бесконечно малых отклонений.* В то время как у сферического маятника вершины траектории, вообще говоря, продвигаются вперед, они должны быть неподвижными при достаточ-

¹По своей идее эта игрушка не отличается от хорошо известного маятника Максвелла. (Прим. ред.)

но малых отклонениях, в соответствии с тем обстоятельством, что здесь мы имеем дело с гармоническим движением по эллипсу. Оценить, в каком порядке исчезает продвижение вершины траектории $\Delta\varphi$ с уменьшением площади эллипса.

III.2. *Положение резонансного максимума при вынужденном затухающем колебании.* При вынужденном затухающем колебании максимум амплитуды колебания лежит не при $\omega = \omega_0$, как в случае незатухающего колебания, а при несколько меньшем значении ω , зависящем от величины затухания (ср. рис. 33). Вывести указанную на рис. 33 максимальную величину $|C|$. Показать, с другой стороны, что максимум амплитуды скорости $|C|\omega$ (и, соответственно, среднего по времени значения кинетической энергии) находится в точности при $\omega = \omega_0$.

III.3. *Процесс включения гальванометра.* Гальванометр соединен через выключатель с источником постоянного тока постоянной электродвижущей силы E . В момент $t = 0$ производится включение; через достаточное время устанавливается отклонение гальванометра α_∞ . Как происходит переход от начального положения покоя $\alpha = 0$, $\dot{\alpha} = 0$ к конечному положению $\alpha = \alpha_\infty$?

Здесь нужно учесть, что на гальванометр с моментом инерции Θ , кроме внешнего вращающего момента, пропорционального силе электрического тока (а, тем самым, и величине э.д.с.), оказывает тормозящее действие: 1) момент затухания, пропорциональный угловой скорости, и 2) момент упругих сил в подвесе, пропорциональный отклонению α . Величина ρ характеризует коэффициент пропорциональности в выражении момента затухания, а ω_0^2 — соответствующий коэффициент в выражении момента упругих сил.

При этом нужно различать и графически представить случаи:

- а) слабого затухания ($\rho < \omega_0$),
- б) аperiодический предельный случай ($\rho = \omega_0$),
- в) сильного затухания ($\rho > \omega_0$).

III.4. *Маятник, точка подвеса которого движется заданным образом.*

а) Материальная точка висит на нерастяжимой нити и совершает незатухающие колебания под действием силы тяжести. Точка подвеса движется прямолинейно в горизонтальном направлении по некоторому произвольному закону [перемещение $\xi = f(t)$].

Каковы будут уравнения движения системы (нить невесома)? Искомые уравнения выводятся из принципа Даламбера или из уравнений Лагранжа первого рода.

Уравнения движения значительно упрощаются, если перейти к случаю малых колебаний, а, следовательно, сохранить только члены первого порядка.

Если, кроме того, принять, что перемещение точки подвеса изменяется во времени по гармоническому закону, то уравнения движения могут

быть просто проинтегрированы. Показать, что при установившемся движении (т.е. после того, как благодаря обычно непринятому во внимание затуханию, способствующему переходу к установившемуся движению, прекратились собственные колебания маятника) точка подвеса и масса m в «дorzонансной» области частот движутся в одинаковом направлении, а в «зарезонансной» области — в противоположных направлениях.

б) Соответственно рассмотреть случай вертикального, в частности, равномерно ускоренного перемещения η точки подвеса. Каков будет в этом случае период колебания, если точка подвеса перемещается с ускорением $\pm g$?

III.5. Легко выполняемая модель симпатических маятников (рис. 56). Между двумя неподвижными опорами A, B (угловое железо) натянута невесомая упругая гибкая проволока. Натяжение S проволоки вызывается грузом G , прикрепленным к свисающему концу проволоки. Величину груза можно менять. В точках C и D , разделяющих отрезок AB на три примерно равные части, бифилярно подвешены два маятника, так что они могут колебаться почти строго трансверсально в плоскости, перпендикулярной к плоскости чертежа. (На рисунке бифилярные подвесы, каждый в отдельности, схематично представлены длинами маятников.) Увеличивая G , можно сделать связь между обоими маятниками более слабой (а не более сильной!). В дальнейшем мы будем считать связь слабой, т.е. силу S большей по сравнению с весами маятников. Углы отклонения маятников от вертикали φ_1 и φ_2 предполагаем малыми, так что (в отношении обозначений ср. рис. 56; 3' и 4' означают положения, противоположные положениям 3 и 4 точек подвеса C и D):

$$\sin \varphi_1 = \varphi_1 = \frac{x_1 - x_2}{l_1}, \quad \cos \varphi_1 = 1;$$

$$\sin \varphi_2 = \varphi_2 = \frac{x_2 - x_4}{l_2}, \quad \cos \varphi_2 = 1;$$

Пренебрегая слагающей малых колебаний по оси y , имеем для m_1 и, соответственно, для m_2 :

$$m_1 g = S_1 \cos \varphi_1 = S_1, \quad m_2 g = S_2 \cos \varphi_2 = S_2,$$

$$m_1 \ddot{x}_1 = -S_1 \sin \varphi_1 = \frac{m_1 g}{l_1} (x_3 - x_1), \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -S_2 \sin \varphi_2 = \frac{m_2 g}{l_2} (x_4 - x_2), \quad (2)$$

В точках C и D натяжения S_1 и, соответственно, S_2 должны находиться в равновесии с натяжением S , которое, со своей стороны, изменяется силами S_1 и S_2 лишь на пренебрежимо малые величины. Это дает еще два

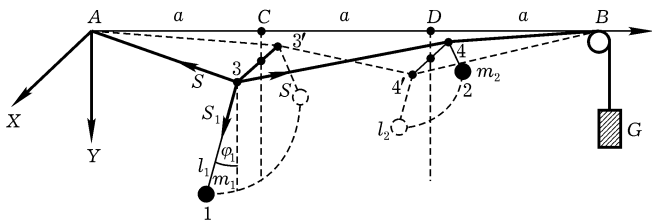


Рис. 56. Проволока $ACDB$ натянута с помощью груза G . Под действием веса маятников и их сил инерции проволока деформируется в ломаную $A34'B$ или при отклонении маятников в другую сторону — в ломаную $A3'4'B$. Маятники 1 и 2 (длины l_1 и l_2) подвешены бифилярно и поэтому качаются перпендикулярно к плоскости чертежа (бифилярные подвесы на рисунке не изображены); φ_1 и φ_2 — углы между маятниками и вертикальной линией

условия, связывающие x_1, x_2, x_3, x_4 . Выразив из этих условий x_3 и x_4 и подставив в уравнения (2), получим совместные дифференциальные уравнения симпатических маятников. Убедиться в том, что эти уравнения совпадают с уравнениями (20.10).

III.6. Успокоитель колебаний. С системой (масса M , постоянная упругой силы K), могущей колебаться в направлении оси x , связана пружиной (постоянная которой равна k) масса t таким образом, что и она может колебаться в направлении оси x . При воздействии внешней силы $P_x = c \cos \omega t$ на массу M последняя не должна двигаться. Каким условиям должна при этом удовлетворять система (t, k) ?

III.7. Баллистический маятник.

а) Баллистический маятник служит для измерения скорости полета снаряда. В своей ранней конструкции (Робинс, 1742) этот маятник состоял из ящика, наполненного мягким материалом (деревянными опилками или песком; и подвешенного к горизонтальной оси; с одной стороны этот ящик открыт. Снаряд застревает в мягком материале, так что удар можно считать неупругим. Измеряется отклонение маятника α ; по величине этого отклонения, зная параметры маятника (его массу M , момент инерции Θ , расстояние s центра тяжести от оси вращения), массу снаряда t и место попадания снаряда (характеризуемое расстоянием α от оси вращения), можно определить скорость v , с которой снаряд попал в маятник. Внести в окончательную формулу для v период колебания τ маятника или длину l соответствующего математического маятника.

б) На каком расстоянии от оси маятника должно находиться место падения снаряда для того, чтобы ось маятника не испытала при ударе добавочной нагрузки?

Задачи к главе IV

IV.1. *Моменты инерции плоского распределения масс.* Для каждого распределения масс в плоскости момент инерции относительно «полярной» оси (перпендикулярной к плоскости) равен сумме моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных «экваториальных» осей (расположенных в плоскости диска). Рассмотреть также частный случай кругового диска.

IV.2. *Вращение волчка вокруг своих главных осей.* В случае несимметричного волчка (см. рис. 46а, б) вращение вокруг главных осей, соответствующих наибольшему или наименьшему моментам инерции, является устойчивым, а вращение вокруг оси, соответствующей среднему главному моменту, — неустойчивым. Для аналитического доказательства этого предложения нужно исходить из уравнений Эйлера и принять угловую скорость вращения вокруг оси, равной $p = \text{const} = p_0$. Угловые скорости вращения q и r вокруг остальных двух главных осей инерции, которые вначале равны нулю, под влиянием внешнего возмущения принимают отличные от нуля значения. Если предположить, что возмущение мало, то из первого уравнения Эйлера следует, что p в первом приближении остается неизменным и равным $p + 0$. Из остальных двух уравнений получаем для q и r систему двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Полагая $q = ae^{\lambda t}$ и $r = be^{\lambda t}$, где a и b произвольные константы, получаем квадратное уравнение для λ , из рассмотрения которого и вытекает высказанное нами выше утверждение.

IV.3. *Удары «высокие» и «низкие», «с накатом» и «с оттяжкой» в бильярдной игре.* Горизонтальным кием ударяют бильярдный шар в его меридиональной плоскости, т. е. без «эффе». На какой высоте h над центром шара следует сообщить удар, чтобы имело место чистое качение (без скольжения)? Развить теорию «высоких» и «низких» ударов с учетом трения скольжения между шаром и сукном стола. Насколько возрастает скорость центра тяжести шара в течение периода трения при высоком ударе и насколько она уменьшается при низком ударе? По истечении какого времени имеет место лишь чистое качение? С помощью этих же методов можно объяснить и соотношения при ударах «с накатом» и «с оттяжкой».

IV.4. *Параболическое движение бильярдного шара.* Как нужно ударить шар для того, чтобы направление поступательного движения его центра тяжести не было перпендикулярным оси вращения? Показать, что направление

силы трения остается неизменным, пока шар скользит. Какова траектория центра шара? Через какое время наступает чистое качение?

Задачи к главе V

V.1. *Относительное движение на плоскости.* Допустим, что плоскость вращается с переменной угловой скоростью ω вокруг неподвижной точки O (ось вращения — нормаль к плоскости в точке O).

Какие добавочные силы, помимо центробежной силы, нужно приложить к материальной точке, чтобы уравнения движения ее во вращающейся плоскости приняли ту же форму, что и в инерциальной системе неподвижной плоскости? Целесообразно ввести комплексные переменные $x + iy$ в неподвижной плоскости и $\xi + i\eta$ во вращающейся плоскости.

V.2. *Движение вращающейся материальной точки по вращающейся прямой.* Материальная точка движется (без трения) в вертикальной плоскости по прямой, которая в свою очередь вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной горизонтальной оси. Выразить движение материальной точки по вращающейся прямой в функции времени [$r = r(t)$ — расстояние от оси вращения]. Показать, что реакция связи (давление на направляющую) и взятая вдоль нее компонента земного притяжения как раз уравновешиваются кориолисовой силой.

V.3. *Сани как простейший пример неголономной системы.* [По Каратеодори: Z. angew. Math. Mech., **13**, 71 (1933).] Сани рассматриваются как жесткая плоская система с тремя степенями свободы в конечной области и с одной степенью свободы в бесконечно малой окрестности (ср. задачу II.1.: катящееся колесо обладало пятью степенями свободы в конечной области и тремя в бесконечно малой).

Трение скольжения по снегу можно не принимать во внимание (или, например, можно представить себе, что оно постоянно уравновешивается силой тяги лошади). Однако нужно учесть трение R , которое оказывает снежная колея на полозья в перпендикулярном к ним направлении; эта сила трения препятствует всякому боковому движению полозьев. Сосредоточим эту (распределенную) силу трения в какой-либо одной точке.

Неподвижно свяжем с санями систему координат ξ, η . Пусть ось ξ проходит по средней линии полозьев через центр тяжести саней S (его координаты $\xi = a, \eta = 0$), а ось η — через точку приложения силы трения R . Пусть горизонтальная поверхность снега является плоскостью x, y . Введем обозначения: φ — угол между осями ξ и x , $\omega = \dot{\varphi}$ — мгновенная угловая скорость вращения саней вокруг вертикали; M — масса, Θ — момент инер-

ции саней относительно вертикали, проходящей через центр тяжести; u, v — компоненты скорости точки O ($\xi = \eta = 0$) по осям ξ и η .

а) Вывести по методу комплексной переменной (см. задачу V.1) систему трех дифференциальных уравнений для величин u, v, ω , беря R за внешнюю силу.

б) Упростив эти уравнения путем введения неголономной связи $v = 0$, определить из них R .

в) Проинтегрировать эти уравнения, введя вместо угла поворота φ пропорциональный ему вспомогательный угол.

г) Убедиться в том, что кинетическая энергия саней остается постоянной (сила R действует «беззаттно», т. е. не производит работы).

д) Показать, что при надлежащем выборе начала отсчета времени траектория точки O в плоскости xy имеет при $t = 0$ острие, а при $t \rightarrow \pm\infty$ стремится к асимптотам, как это показано на рис. 57, заимствованной у Каратеодори.

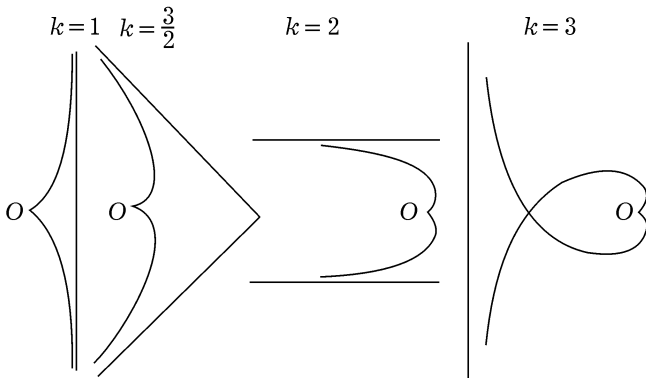


Рис. 57. Траектория саней по Каратеодори при различных значениях k

Задачи к главе VI

VI.1. *Пример на применение принципа Гамильтона.* Вычислить величину интеграла Гамильтона в пределах $t = 0$ до $t = t_1$: а) для случая действительного свободного падения материальной точки: $z = \frac{1}{2}gt^2$; б) для случаев двух фиктивных движений $z = ct$ и $z = at^3$, где постоянные c и a , в соответствии с условием относительно допустимых траекторий, должны быть

определены таким образом, чтобы начальное и конечное положения совпадали с действительными положениями. Показать, что величина интеграла для истинного движения а) меньше, чем для фиктивных движений б).

VI.2. *Относительное движение в плоскости и движение по вращающейся прямой.* Задачи V.1.. и V.2.. решить по методу Лагранжа.

VI.3. *Свободное падение на вращающейся Земле и маятник Фуко.* Убедиться в том, что и эти задачи можно решить по методу Лагранжа, не зная законов относительного движения. Этот метод интересен и по своей идее более прост, чем метод, изложенный в гл. V; однако он требует тщательного учета многочисленных малых членов, причем пренебрежения, связанные с большим значением земного радиуса и медленностью вращения Земли, могут быть допущены лишь после того, как будут выполнены операции дифференцирования

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial q}.$$

Нужно исходить из обычных полярных координат r, ϑ, ψ , причем r отсчитывается от центра Земли. Эти координаты нужно сравнить с координатами ξ, η, ζ (см. рис. 49). Если R — радиус Земли, а ϑ_0, ψ_0 — координаты точки, над которой находится начальная точка свободного падения или точка подвеса маятника, то координаты r, ϑ, ψ и ξ, η, ζ падающей или качающейся материальной точки m связаны соотношениями:

$$\xi = R(\vartheta - \vartheta_0), \quad \eta = R \sin \vartheta (\psi - \psi_0), \quad \zeta = r - R, \quad (1)$$

где

$$\psi_0 = \omega t, \quad \vartheta_0 = \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad (2)$$

$\frac{\pi}{2} - \varphi$ — дополнительный угол географической широты.

Отсюда следует:

$$\dot{\xi} = R\dot{\vartheta}, \quad \dot{\eta} = R \sin \vartheta (\dot{\psi} - \omega) + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \eta \dot{\vartheta}, \quad \dot{\zeta} = \dot{r}$$

и обратно:

$$\begin{aligned} r\dot{\vartheta} &= \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right)\dot{\xi}, \\ r \sin \vartheta \dot{\psi} &= \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right)\dot{\eta} + \omega R \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right) \sin \vartheta - \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right) \frac{\eta}{R} \dot{\xi}, \\ \dot{r} &= \dot{\zeta}. \end{aligned} \quad (3)$$

Входящий сюда угол ϑ нужно, в соответствии с соотношением (1), рассматривать как функцию от ξ .

Эти величины надо подставить в выражение кинетической энергии

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\psi}^2),$$

которое вследствие этого становится функцией от $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$, ξ , η , ζ . Отсюда можно, например, вычислить (если не учитываемые в дальнейшем члены обозначить через (...)):

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = m \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right)^2 \dot{\xi} - m \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right) \frac{\eta}{R} \left\{ \dots + \omega R \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right) \sin \vartheta + \dots \right\} \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = m \ddot{\xi} - m \omega \cos \vartheta \dot{\eta} + \dots \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = +m \omega \cos \vartheta \dot{\eta} + \dots \quad (6)$$

В качестве потенциальной энергии можно взять величину

$$V = mg(r - R) = mg\zeta. \quad (7)$$

Убедиться в том, что таким путем получаются уравнения (30.5) для случая свободного падения и уравнения (31.2) для случая маятника Фуко (из которых и вытекали полученные ранее результаты).

VI.4. «Маятникобразное» качение цилиндра по плоскому основанию. Пусть центр тяжести S неоднородного кругового цилиндра радиуса a находится на расстоянии s от его оси. Цилиндр катится под действием силы тяжести по горизонтальной плоскости. Масса цилиндра равна m , момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести параллельно оси цилиндра, равен Θ . Исследовать движение по методу Лагранжа, введя в качестве обобщенной координаты q угол φ поворота цилиндра вокруг его оси. При вычислении кинетической энергии поместить точку отсчета

а) в центре тяжести,

б) в (геометрическом) центре цилиндра и убедиться в том, что в обоих случаях получается одно и то же дифференциальное уравнение для φ .

По методу «малых колебаний» показать, что при наименьшем положении центра тяжести S имеет место устойчивое равновесие, а при наивысшем положении S — неустойчивое равновесие.

VI.5. Дифференциальная передача автомобиля. Для того чтобы ведущие колеса автомобиля не скользили при прохождении автомобиля по криволинейному пути, они должны вращаться с различной скоростью. Это осуществляется с помощью дифференциальной передачи (рис. 58). Мотор вращает ведущее колесо (Ω), с которым неподвижно скреплена ось A . Вокруг

этой оси может вращаться укрепленная на ней пара конических шестерен ω . Своими зубьями эта пара сцепляется с другой парой конических шестерен, по которой она катится при вращении оси A

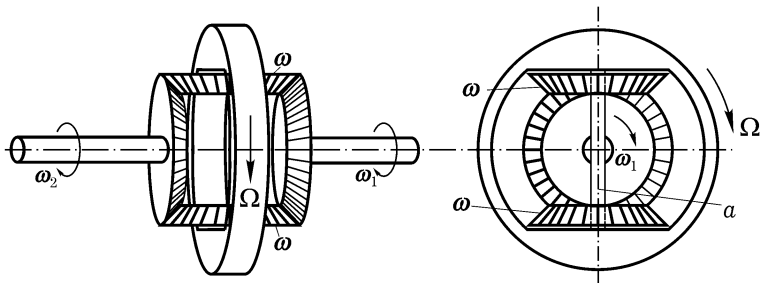


Рис. 58. Дифференциальная передача автомобиля; она же (по Больцману) может служить моделью индукционного взаимодействия двух цепей тока. Справа: вид вдоль оси задних колес автомобиля. Слева: вид на эту ось

Ось задних колес автомобиля разрезана посередине. На левый конец правой половины этой оси посажена коническая шестерня ω_1 , на правый конец левой половины оси — коническая шестерня ω_2 . Таким образом, обе половины оси задних колес могут вращаться с различными угловыми скоростями, причем, однако, они связаны между собой дифференциальной передачей.

Вывести кинематические соотношения между угловыми скоростями Ω , ω , ω_1 , и ω_2 . Далее, с помощью принципа виртуальной работы вывести условия равновесия между моментом M действующим на колесо Ω (движущий момент), и моментами M_1 , M_2 , приложенными к зубчаткам ω_1 , ω_2 .

Каково уравнение движения системы? Моменты инерции колес (ω_1), (ω_2) положим равными Θ_1 , Θ_2 , момент инерции пары колес ω относительно собственной оси — Θ , а относительно оси ведущего колеса (Ω) — Θ' . Моментом инерции Θ' колеса Ω пренебрегаем. Если вращение одного из задних колес ускоряется, например, вследствие уменьшения трения, то вращение другого заднего колеса замедляется (так же и в том случае, когда движущий его момент и момент трения остаются равными друг другу).

Указания к решению задач

Почти все численные расчеты, встречающиеся в задачах могут быть с достаточной степенью точности выполнены с помощью счетной линейки, которой мы и рекомендуем пользоваться при приближенных подсчетах.