

этой оси может вращаться укрепленная на ней пара конических шестерен ω . Своими зубьями эта пара сцепляется с другой парой конических шестерен, по которой она катится при вращении оси A

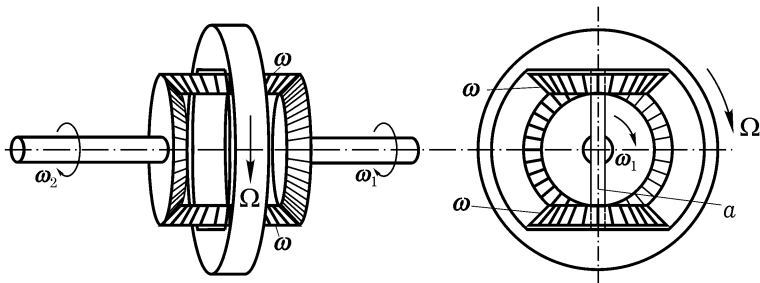


Рис. 58. Дифференциальная передача автомобиля; она же (по Больцману) может служить моделью индукционного взаимодействия двух цепей тока. Справа: вид вдоль оси задних колес автомобиля. Слева: вид на эту ось

Ось задних колес автомобиля разрезана посередине. На левый конец правой половины этой оси посажена коническая шестерня ω_1 , на правый конец левой половины оси — коническая шестерня ω_2 . Таким образом, обе половины оси задних колес могут вращаться с различными угловыми скоростями, причем, однако, они связаны между собой дифференциальной передачей.

Вывести кинематические соотношения между угловыми скоростями Ω , ω , ω_1 , и ω_2 . Далее, с помощью принципа виртуальной работы вывести условия равновесия между моментом M действующим на колесо Ω (движущий момент), и моментами M_1 , M_2 , приложенными к зубчаткам ω_1 , ω_2 .

Каково уравнение движения системы? Моменты инерции колес (ω_1), (ω_2) положим равными Θ_1 , Θ_2 , момент инерции пары колес ω относительно собственной оси — Θ , а относительно оси ведущего колеса (Ω) — Θ' . Моментом инерции Θ' колеса Ω пренебрегаем. Если вращение одного из задних колес ускоряется, например, вследствие уменьшения трения, то вращение другого заднего колеса замедляется (так же и в том случае, когда движущий его момент и момент трения остаются равными друг другу).

Указания к решению задач

Почти все численные расчеты, встречающиеся в задачах могут быть с достаточной степенью точности выполнены с помощью счетной линейки, которой мы и рекомендуем пользоваться при приближенных подсчетах.

1.1. Доказательство того, что должно быть $v_1 = v_2 = v$, можно провести алгебраическим или геометрическим путем. В последнем случае следует воспользоваться величинами v_1 и v_2 , как прямоугольными координатами на плоской диаграмме.

1.2. Скорость отлетающих масс m и M равна:

$$\frac{2M}{M+m}v_0 \quad \text{и, соответственно,} \quad \frac{M-m}{M+m}v_0.$$

1.3. Здесь сохраняют силу формулы задачи **1.2.**, но скорость первой массы направлена в противоположную сторону.

1.4. Нужно убедиться в том, что квадратное уравнение для V приводит к тому же минимальному значению v_0 , как и уравнение для v .

1.5. Дифференциальные уравнения, которые надо проинтегрировать, имеют вид:

$$\frac{dm}{dt} = -\mu,$$

$$\frac{d}{dt}(mv) - \mu a = -mg.$$

Из первого уравнения находим:

$$m = m_0 - \mu t.$$

Подставляя это значение во второе уравнение и интегрируя, получим:

$$v = \frac{\mu at - m_0 gt + \frac{\mu g t^2}{2}}{m_0 - \mu t},$$

или

$$v = \frac{m_0 \left(a - \frac{g m_0}{2 \mu} \right)}{m_0 - \mu t} - \left(a - \frac{g m_0}{2 \mu} \right) - \frac{gt}{2}.$$

После вторичного интегрирования (z — высота над поверхностью Земли):

$$z = \frac{am_0}{\mu} \left\{ \left(1 - \frac{\mu}{m_0} t \right) \lg \left(1 - \frac{\mu}{m_0} t \right) + \frac{\mu}{m_0} t \right\} - \frac{1}{2} g t^2. \quad (1)$$

Для малых t , пренебрегая высшими степенями t , получаем:

$$z = \left(\frac{\mu a}{m_0} - g \right) \frac{t^2}{2}. \quad (2)$$

Вычисление с помощью формулы (1) дает:

$$t = 10; \quad 30; \quad 50 \text{ сек.}$$

$$z = 0,54; \quad 5,65; \quad 18,4 \text{ км.}$$

1.6. Поскольку плотность равна единице, масса водяной капли будет $m = \frac{4\pi}{3} r^3$; следовательно, $dm = 4\pi r^2 dr$. С другой стороны, при конденсации (α — коэффициент пропорциональности) $dm = 4\pi r^2 \alpha dt$; следовательно, $dr = \alpha dt$. Переходя к переменной r , получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\alpha \frac{d}{dr}(r^3 v) = r^3 g.$$

Решение этого дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию $v = v_0$ при $r = c$, имеет вид:

$$v = \frac{g}{\alpha} \frac{r}{4} + \frac{c^3}{r^3} \left(v_0 - \frac{g}{\alpha} \frac{c}{4} \right).$$

При $c = 0$ получаем:

$$v = \frac{g}{\alpha} \frac{r}{4},$$

а при $v_0 = 0$,

$$v = \frac{g}{\alpha} \frac{r}{4} \left(1 - \frac{c^4}{r^4} \right).$$

1.7. Обозначим через x длину свешивающейся части цепи. Полагая массу, приходящуюся на единицу длины цепи, равной единице, получим следующее уравнение движения:

$$\frac{d}{dt}(x\dot{x}) = x\ddot{x} + \dot{x}^2 = gx.$$

Ввиду того, что интегрирование этого уравнения довольно сложно (после подстановки $x = \sqrt{u}$ оно приводит к эллиптическому интегралу), можно ограничиться выражением величин \dot{T} , \dot{V} , \dot{Q} (потеря энергии за единицу времени по теории Карно) через x , \dot{x} , \ddot{x} и показать, что, в силу уравнения движения, имеет место:

$$\dot{T} + \dot{V} + \dot{Q} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \dot{T} + \dot{V} \neq 0.$$

1.8. Уравнение движения имеет вид $l\ddot{x} = gx$. Это линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами можно проинтегрировать согласно (3.24б). В том, что закон сохранения энергии удовлетворяется, можно убедиться либо в его дифференциальной форме — путем рассмотрения уравнения движения, либо в его интегральной форме — рассматривая решение этого уравнения:

$$x = a(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}), \quad \alpha^2 = \frac{g}{l}, \quad a = \frac{x_0}{2}.$$

1.9. Числовые данные задачи позволяют определить центростремительное ускорение Луны в $m/сек^2$. Длину радиуса Земли можно при этом положить, в соответствии с определением метра, равной $r = \frac{2}{\pi} \cdot 10^7$ м; с другой стороны, из закона всемирного тяготения, исключая гравитационную постоянную G с помощью g (см. стр. 34), получаем для центростремительного ускорения величину $g/60^2$. Оба полученные таким образом числовые значения совпадают с достаточной степенью точности.

1.10. Применим формулы преобразования координат, как в (2.5), полагая, однако, $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$. Компоненты преобразованного момента M' получаются в виде выражений, линейных относительно компонент M , с коэффициентами, равными минорам матрицы преобразования. Последние удовлетворяют следующим соотношениям, справедливость которых вытекает из условий ортогональности:

$$\rho\gamma_1 = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}, \quad \rho\gamma_2 = \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{vmatrix}, \dots$$

Здесь $\rho = \pm 1$, в зависимости от того, можно ли путем вращения совместить преобразованную систему с исходной или нет (правая и левая системы).

1.11. Из формул (6.8) (стр. 65) непосредственно следует:

$$\varepsilon = \frac{B}{\frac{GM}{C}}.$$

Следовательно, для эллипса ($\varepsilon < 1$) $\frac{GM}{C} > B$, для гиперболы ($\varepsilon > 1$) $\frac{GM}{C} < B$. Но $R = \frac{GM}{C}$ есть радиус окружности годографа, а B — расстояние центра от полюса. Отсюда непосредственно вытекает утверждение задачи. Характеристики предельных случаев окружности и параболы дает следующая таблица, в которой

$$v_0 = \frac{GM}{C} - B$$

означает скорость планеты в перигелии.

Орбита планеты	ε	B	Годограф	v_0
Окружность	$= 0$	$= 0$	Центр в полюсе	$= GM/C$
Эллипс	< 1	$< R$	Полюс лежит внутри годографа	$GM/C < v_0$ $< 2GM/C$
Парабола	$= 1$	$= R$	Годограф проходит через полюс	$= 2GM/C$
Гипербола	> 1	$> R$	Полюс лежит вне годографа	$> 2GM/C$

I.12. В дифференциальных уравнениях (6.4) нужно заменить GM на $\pm \frac{eE}{m}$, причем верхний знак (притяжение) соответствует случаю положительного иона, а нижний знак (отталкивание) — случаю отрицательного иона. Тогда уравнения (6.5) (при том же значении φ , что и на рис. 6) дадут при $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$A = \pm \frac{eE}{m}C, \quad B = -v_0,$$

так как

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = -v_0.$$

При этом уравнения (6.6) принимают вид

$$\frac{1}{r} = \pm \frac{eE}{m_0 C^2} (1 - \sin \varphi) - \frac{v_0}{C} \cos \varphi. \quad (1)$$

Так как C меняется от траектории к траектории в зависимости от расстояния начальной прямолинейной траектории от оси y , то это уравнение определяет семейство кривых. Для того чтобы получить огибающую этого семейства, нужно продифференцировать уравнение (1) по C . Исключив C из продифференцированного и исходного уравнения (1), получим для искомой огибающей

$$x^2 = p^2 - 2pg, \quad p = \pm \frac{4eE}{m_0 v_0^2}. \quad (2)$$

Нужно принять во внимание, что траектория электрона всякий раз представляет собой одну ветвь гиперболы, тогда как уравнение (1) определяет обе ветви, и убедиться (проще всего, изобразив рассматриваемое семейство кривых графически) в том, что только в случае отталкивания уравнение (2) определяет огибающую истинных траекторий электронов.

I.13. Проще всего воспользоваться методом гармонических колебаний (см. § 3, раздел 4). Поучительно, однако, убедиться и том, что методы, приведенные в § 6, также ведут к цели.

I.14. Рассматриваемый здесь ядерный процесс не является ни упругим, ни неупругим, а «сверхупругим» соударением, поскольку к первичной энергии E прибавляется ядерная энергия W . Кинетическую энергию альфа-частиц можно выразить в классической форме:

$$E_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2.$$

Исключая v_α из уравнений, выражающих законы сохранения энергии и импульса, получаем (в согласии с Кирхнером) для симметричного случая:

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{m_p}{2m_\alpha} \frac{E_p}{W + E_p}}.$$

1 электрон-вольт есть энергия, которую приобретает электрон ($e = 1,6 \cdot 10^{-20}$ электромагнитных единиц заряда) под действием разности потенциалов в один вольт ($1 V = 10^8$ электромагнитных единиц потенциала); следовательно, $1 eV = 1,6 \cdot 10^{-12}$ эрг.

Масса протона $m = 1,65 \cdot 10^{-24}$ г; следовательно, масса альфа-частицы $m = 6,6 \cdot 10^{-24}$ г. Последняя величина необходима для того, чтобы перейти от значения энергии E_α , первоначально выраженного в электрон-вольтах, а затем в эргах, к скорости v_α . Найденная таким образом величина v_α показывает, что применение классического выражения для E_α оправдано и что релятивистская поправка [формула (4.11)] неощутимо мала.

I.15. Из второй формулы (3.27) при $V_0 = 0$ и, например, $v_0 = 1$ непосредственно вычисляется кинетическая энергия $\frac{M}{2} V^2$ «ударяемой» частицы после соударения как функция $x = \frac{M}{m}$, в частности, ее максимум для $x = 1$ и ее малая ордината для $x = 206$. Последняя величина составляет всего только 10 промилле (т.е. 1% от первой).

Исходя из этого рассуждения, Ферми разработал в 1935 г. свой метод получения «тепловых» нейтронов, т.е. медленных нейтронов одинаковой скорости, которые, благодаря многократным соударениям, приходят в равновесие с протонами, содержащимися в парафине.

I.16. Координаты точки E суть

$$x = ML = a \cos u = SL - SM = r \cos \varphi - \varepsilon a, \quad (1a)$$

$$y = EL = r \sin \varphi = b \sin u. \quad (16)$$

Уравнение эллипса, выраженное через r и φ , преобразуется к виду:

$$r = \varepsilon r \cos \varphi + p, \quad p = a(1 - \varepsilon^2). \quad (1)$$

Отсюда, подставляя величину $r \cos \varphi$ из (1a), получаем:

$$r = \varepsilon(a \cos u + \varepsilon a) + a(1 - \varepsilon^2) = a(1 + \varepsilon \cos u). \quad (2)$$

Дифференцирование уравнения (2) дает:

$$dr = -\varepsilon a \sin u du. \quad (3)$$

Дифференцируя уравнение (1), получаем:

$$\varepsilon \sin \varphi d\varphi = -p \frac{dr}{r^2}.$$

Отсюда

$$\frac{-p}{\varepsilon \sin \varphi} \dot{\varphi} = r^2 \dot{\varphi} = C \quad (\text{постоянная площадей}). \quad (4)$$

С помощью соотношений (16) и (3) это уравнение преобразуется к виду:

$$\frac{pa}{b} r \dot{u} = C.$$

Заменяя еще r по формуле (2), окончательно получим дифференциальное уравнение

$$(1 + \varepsilon \cos u) du = n dt, \quad (5)$$

$$n = \frac{Cb}{pa^2}. \quad (6)$$

Интегрирование уравнения (5) дает:

$$u - \varepsilon \sin u = nt.$$

Постоянная интегрирования обращается в нуль, так как при $t = 0$ u должно быть равно нулю. Величина nt называется «средней аномалией» (в астрономии она также отсчитывается от перигелия). Это название объясняется тем, что правая часть формулы (6) с помощью формулы (6.9) может быть приведена к виду $2\pi/T$.

II.1. Преобразуя выражение

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial f}{\partial \psi} \delta \psi,$$

согласно условию (1) данной задачи, получим

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} a \cos \psi + \frac{\partial f}{\partial y} a \sin \psi + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \delta \varphi + \frac{\partial f}{\partial \psi} \delta \psi = 0.$$

Отсюда, поскольку $\delta \varphi$ и $\delta \psi$ могут быть в отдельности приравнены нулю,

$$\frac{\partial f}{\partial \psi} = 0, \quad (2)$$

$$a \frac{\partial f}{\partial x} \cos \psi + a \frac{\partial f}{\partial y} \sin \psi + \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0. \quad (3)$$

Последнее равенство справедливо для любого ψ и поэтому может быть продифференцировано по ψ . Принимая во внимание (2), получаем:

$$-a \frac{\partial f}{\partial x} \sin \psi + a \frac{\partial f}{\partial y} \cos \psi = 0 \quad (4)$$

и после вторичного дифференцирования по ψ :

$$a \frac{\partial f}{\partial x} \cos \psi + a \frac{\partial f}{\partial y} \sin \psi = 0. \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

Согласно (3), имеем также:

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0. \quad (7)$$

Из равенств (2), (6) и (7) следует, что никакого условия связи $f = 0$, содержащего x , y , φ , ψ , не существует и поэтому наша система является неголономной. (Доказательство Г. Гамеля — «Elementare Mechanik», 2. Aufl. Leipzig, 1922.)

II.2. Начертим диаграмму работы машины, т. е. кривую момента M и (горизонтальную) прямую момента W ; по оси абсцисс откладываем угол поворота кривошипа от 0 до π ; следует обратить внимание на то, что площади, заключенные между осью и соответственно линией M и прямой W , должны быть равны друг другу. Таким образом, получается соотношение между M_0 и W . Углы φ_2 и φ_1 , соответствующие ω_{\max} и ω_{\min} , получаются на диаграмме как абсциссы точек пересечения линий M и W : $\sin \varphi_1 = \sin \varphi_2 = \frac{2}{\pi}$, $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$, $\varphi_1 = 39^\circ 33' = 0,69$ в дуговой мере. Определяем разность кинетических энергий маховика при углах φ_2 и φ_1 и выражаем ее через Θ , ω_m и δ . Из закона сохранения энергии, примененного к тому же интервалу углов, получаем выражение для искомого момента инерции Θ в виде:

$$\Theta = \frac{W}{\delta \omega_m^2} (\pi \cos \varphi_1 - \pi + 2\varphi_1) = \frac{0,66}{\delta \omega_m^2} W.$$

Введя

$$N = \frac{W\omega}{75} \text{ л.с.} \quad \text{и} \quad n = \frac{60}{2\pi} \omega \frac{\text{об.}}{\text{мин.}},$$

получаем (в технической системе единиц):

$$\Theta \sim 43\,400 \frac{N}{\delta n^3} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{сек}^2.$$

II.3. Относительно величины земного радиуса см. задачу I. 9. Для вычисления продолжительности суток можно принять $\sqrt{8\pi} = 5$.

II.4. а) Если представить себе коромысло весов закрепленным, то нужно рассматривать только равновесие силы тяжести и сил инерции, действующих на ролик при его виртуальном вращении $\delta\varphi$ (уравнение моментов). Отсюда получается ускорение грузов \ddot{x} как малая часть величины g

б) Прибавляем виртуальное вращение коромысла весов. При этом нужно принять во внимание моменты сил инерции относительно оси вращения коромысла весов. Равновесие нарушается: коромысло отклоняется в сторону чашки весов до тех пор, пока падает груз p . При определении избыточного груза можно пренебречь диаметром ролика по сравнению с плечом коромысла весов. В этом пренебрежении можно также приравнять друг другу нагрузку чашки весов и нагрузку другого конца коромысла, вызванную весом и силами инерции.

II.5. Пусть уравнение наклонной плоскости имеет вид:

$$F(z, x, t) = z - ax - \varphi(t) = 0. \quad (1)$$

Здесь $a = \operatorname{tg} \alpha$ определяет постоянный угол α , образуемый наклонной плоскостью с горизонтом; $\varphi(t)$ — изменяющийся со временем отрезок, отсекаемый наклонной плоскостью на оси z . Уравнения Лагранжа первого рода (12.9) дают:

$$\ddot{x} = -\lambda a, \quad \ddot{z} = \lambda - g. \quad (2)$$

Для того чтобы определить λ , нужно дважды продифференцировать по t уравнение (1); при этом получаем:

$$\ddot{z} - a\ddot{x} = \ddot{\varphi}(t). \quad (3)$$

Подставляя выражение (2) в уравнение (3), получим λ , после чего интегрирование уравнений (2) легко выполняется. Начальные условия $\dot{x} = \dot{z} = 0$, $x = x_0$, $z = z_0$ при $t = 0$ дают:

$$\begin{aligned} x &= x_0 - \frac{a}{1+a^2} \left(\varphi(t) - \varphi(0) - \dot{\varphi}(0)t + g\frac{t^2}{2} \right), \\ z &= z_0 + \frac{1}{1+a^2} \left(\varphi(t) - \varphi(0) - \dot{\varphi}(0)t - ga^2\frac{t^2}{2} \right), \end{aligned}$$

Отсюда для $\ddot{\varphi} = +g$ получим:

$$x = x_0 - \sin 2\alpha g \frac{t^2}{2}, \quad z = z_0 + \cos 2\alpha g \frac{t^2}{2}$$

и для $\ddot{\varphi} = -g$:

$$x = x_0, \quad z = z_0 - g\frac{t^2}{2},$$

как и при свободном падении. Только при этом допущении λ равно нулю, в остальных случаях λ характеризует давление на скользящее по наклонной плоскости тело и обуславливает отличную от нуля работу связи.

Задачу можно решить, не вводя λ , с помощью принципа Даламбера. Ввиду того, что время не должно варьироваться (стр. 92), виртуальные перемещения, согласно (1), связаны соотношением $\delta z = a\delta x$. Тогда, согласно принципу Даламбера, имеет место уравнение:

$$\ddot{x} + (g + \ddot{z})a = 0.$$

Это уравнение вместе с уравнением (3) позволяет непосредственно вычислить \ddot{x} и \ddot{z} . На этом примере видно, что метод Даламбера прямее и проще приводит к цели, чем уравнения Лагранжа, преимущество которых, в свою очередь, заключается в возможности количественного определения возникающих давлений.

II.6. В § 11, раздел 1, мы применяли принцип Даламбера для вывода уравнения ускорения системы, вращающейся под действием момента внешних сил. При этом мы рассматривали виртуальный поворот $\delta\varphi$ вокруг оси вращения, которая в дальнейшем может быть выбрана за ось x . В рассмотрение входили лишь касательные силы инерции, поскольку нормальные силы инерции (центробежные силы) при вращении $\delta\varphi$ не производят работы.

Теперь речь идет о нагрузке на подшипники A, B при равномерном вращении, а, значит, и об их реакциях A и B . При этом нужно принять во внимание именно центробежные силы, в то время как касательные силы инерции при равномерном вращении отсутствуют. Если сообщить системе виртуальные параллельные перемещения $\delta y(\delta z)$, то соответствующие виртуальные работы будут равны произведению величины δy (и соответственно δz) на сумму слагающих по оси y (соответственно по оси z) центробежных сил всех элементов массы:

$$dm y \omega^2, \quad dm z \omega^2.$$

Отсюда путем интегрирования получаем слагающие Y и Z обычного центробежного движения общей массы m , которую мы представляем себе сосредоточенной в центре тяжести системы.

Если, с другой стороны, сообщить системе виртуальные повороты $\delta\varphi_y$ и $\delta\varphi_z$ вокруг осей y и z , то получаем виртуальные работы

$$-\delta\varphi_y \int dm x z \omega^2 \quad \text{и} \quad \delta\varphi_z \int dm x y \omega^2.$$

Они соответствуют моментам

$$M_y = -\Theta_{xz}\omega^2 \quad \text{и} \quad M_z = \Theta_{xy}\omega^2.$$

Для определения реакций подшипников A и B поместим начало системы координат x, y, z , например, в подшипнике A и обозначим расстояние между обоими подшипниками через l , а координаты центра тяжести в направлениях y и z — через η и ζ . Тогда для определения четырех неизвестных A_y, A_z и B_y, B_z мы имеем два уравнения для компонент сил:

$$\begin{aligned} A_y + B_y &= -m\eta\omega^2, \\ A_z + B_z &= -m\zeta\omega^2 \end{aligned} \quad (1)$$

и два уравнения для моментов:

$$\begin{aligned} lB_z &= \Theta_{xz}\omega^2, \\ lB_y &= \Theta_{xy}\omega^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Понятно, что эти периодически изменяющиеся реакции подшипников крайне нежелательны в технике; для их устранения недостаточно, чтобы центр тяжести находился на оси вращения, $\eta = \zeta = 0$ [уравнения (1)], но также необходимо, чтобы ось вращения была главной осью инерции, т. е. $\Theta_{xz} = \Theta_{xy} = 0$ [уравнения (2)]; ср. в § 22 рассуждения, относящиеся к уравнению (22.15а). Выполнение этого второго требования столь же важно, как и выполнение первого требования. Выполнение этих двух требований называют «балансировкой тела вращения».

II.7. Обозначим через S натяжение нити, а через z — длину ее размотанной части в данный момент времени. Тогда имеет место: *В случае а*), т. е. при опускании:

$$\Theta\dot{\omega} = Sr, \quad S = m(g - \ddot{z}).$$

Величины \dot{z} и \ddot{z} положительны; ввиду того, что $\dot{z} = r\omega$, имеем

$$\ddot{z} - r\dot{\omega} = \frac{Sr^2}{\Theta}, \quad (1)$$

$$S = \frac{mg}{1 + \frac{mr^2}{\Theta}}. \quad (2)$$

В случае б), т. е. при подъеме:

Вращение ω сохраняет свое направление. Вращающий момент силы натяжения нити противодействует вращению ω . Величины \dot{z} и \ddot{z} отрицательны, и мы имеем:

$$\dot{z} = -r\omega, \quad \ddot{z} = -r\dot{\omega} = +\frac{Sr^2}{\Theta}. \quad (3)$$

$$S = \frac{mg}{1 + \frac{mr^2}{\Theta}}. \quad (4)$$

Натяжение нити в обоих случаях а) и б) одинаково; оно меньше веса вращающегося тела.

В промежутке времени между а) и б) рука, держащая нить, ощущает заметный рывок, соответствующий переходу от положительного ускорения \ddot{z} к отрицательному; в этом промежутке \ddot{z} на мгновение обращается в нуль, и натяжение S становится в действительности больше, чем по формуле (2).

II.8. Условием отрыва, согласно (18.7), является

$$\lambda = 0 \quad \text{или} \quad R_n = 0;$$

следовательно, согласно (18.6),

$$mg\frac{\ddot{z}}{l} = -\frac{m}{l}(x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z}). \quad (1)$$

Для каждой траектории на сфере имеет место соотношение:

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0, \quad \text{т. е.} \quad x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} = -(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = -v^2.$$

Поэтому уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{mgz}{l} = \frac{mv^2}{l}. \quad (2)$$

Правая часть этой формулы не равна центробежной силе на траектории (поскольку в нашем случае эта траектория не является геодезической линией), однако, согласно теореме Менье (см. § 35), она соответствует проекции этой центробежной силы на нормаль к поверхности шара.

Согласно закону сохранения энергии,

$$v^2 = v_0^2 - 2g(z - z_0). \quad (3)$$

В соответствии с этим, уравнение (2) может быть преобразовано к начальным значениям v_0 , z_0 следующим образом:

$$3z = 2z_0 + \frac{v_0^2}{g} = 2(z_0 + h_0), \quad (4)$$

где $h_0 = v_0^2/2g$ — скоростной напор, соответствующий скорости v_0 .

III.1. В случае почти вертикально свисающего маятника координаты x и y являются величинами первого порядка малости; $z = -l$ с точностью до малых второго порядка. Поэтому третье уравнение (18.2) дает (с точностью до малых второго порядка):

$$\lambda = -\frac{mg}{l}, \quad (1)$$

а первые два уравнения (18.2) определяют, как и в задаче 1.13, гармоническое движение по эллипсу с циклической частотой

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (2)$$

Для постоянной площадей при движении по эллипсу имеем:

$$C = \frac{2\pi ab}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}} ab \rightarrow 0 \quad (3)$$

и для постоянной энергии (начальное состояние $\vartheta_0 = \varepsilon$, $\dot{\vartheta}_0 = 0$):

$$W = T + V = mgl \left(-1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right). \quad (4)$$

Вводя $u = 1 - \eta$, получаем из уравнения (18.11):

$$U = -\frac{4g}{l} \left(\eta - \frac{\varepsilon^2}{2} \right) \eta - \frac{C^2}{l^4} = \frac{4g}{l} (\eta - \eta_1)(\eta - \eta_2),$$

$$\eta_{1,2} = \frac{\varepsilon^2}{4} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^4}{16} - \frac{C^2}{4gl^2}}.$$

Следовательно, из формулы (18.15) при $k = 0$ получаем:

$$\Delta\varphi = \frac{C}{2l\sqrt{l}g} \int_{\eta_2}^{\eta_1} \frac{d\eta}{\eta\sqrt{(\eta_1 - \eta)(\eta - \eta_2)}}. \quad (5)$$

Интеграл, входящий в формулу (5), можно преобразовать с помощью подстановки аналогичной (45.11), в известный интеграл:

$$\int_0^\pi \frac{dv}{A + B \cos v} = \frac{\pi}{\sqrt{A^2 - B^2}},$$

где

$$A = \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad B = \sqrt{\frac{\varepsilon^4}{16} - \frac{C^2}{4gl^3}}.$$

В соответствии с этим, из (5) получаем $\Delta\varphi = \pi$, что и требовалось доказать.

III.2. Первое (и соответственно второе) утверждение данной задачи доказывается непосредственно путем дифференцирования выражения (19.10) для $|C|$ (и, соответственно, выражения $|C|\omega$) по ω .

III.3. Если коэффициенты пропорциональности момента затухания и упругого момента обозначить через $2\rho\Theta$ и соответственно через $\omega_0^2\Theta$, то в качестве уравнения движения гальванометра получаем непосредственно уравнение (19.9), но с постоянной правой частью C и с переменной α вместо x . Значения констант a и b , входящих в общее решение

$$\alpha = C + e^{-\rho t} (a \cos \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2} t + b \sin \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2} t),$$

нужно выбирать так, чтобы они удовлетворяли условиям $\alpha = \dot{\alpha} = 0$ при $t = 0$.

В случае а) переход в конечное положение сопровождается затухающими колебаниями, в случае в) этот переход происходит монотонно. Случай б) надо рассматривать как предельный по отношению к а) или в), причем здесь появляется вековой член с множителем t .

III.4. а) Согласно принципу Даламбера (x, y — координаты качающейся материальной точки, ось y направлена вертикально вверх), имеем:

$$\ddot{x}\delta x + (\ddot{y} + g)\delta y = 0. \quad (1)$$

Условие связи имеет вид:

$$(x - \xi)^2 + y^2 = l^2. \quad (2)$$

Варьирование этого условия дает:

$$(x - \xi)\delta x + y\delta y = 0 \quad (3)$$

(t , а поэтому также и ξ , не варьируется). Комбинируя (1) и (3), получим:

$$y\ddot{x} - (x - \xi)(\ddot{y} + g) = 0. \quad (4)$$

Если условие (2) дважды продифференцировать по t , то получим второе соотношение для \ddot{x} и \ddot{y} , которое вместе с (4) и дает точное дифференциальное уравнение рассматриваемой задачи.

Переходя к малым колебаниям, нужно учесть, что $x - \xi$ является величиной первого порядка малости и что, согласно (2), с точностью до малых величин второго порядка $y = -l$. Следовательно, \dot{y} и \ddot{y} являются величинами второго порядка малости. В соответствии с этим уравнение (4) переходит в

$$l\ddot{x} + (x - \xi)g = 0. \quad (5)$$

Вводя $x - \xi = u$, получим неоднородное уравнение маятника

$$\ddot{u} + \frac{g}{l}u = -\ddot{\xi}, \quad (6)$$

в котором $-m\ddot{\xi}$ играет роль вынуждающей силы. Интегрирование выполняется, как указано на стр. 137. Указанное в задаче соотношение фаз движений точки подвеса и материальной точки соответствует рис. 31. Рекомендуем проделать опыт со шнуром, на нижнем конце которого подвешен груз, а верхний конец приводится рукой в колебательное движение в горизонтальном направлении. При быстром движении (выше резонанса) противоположное по фазе движение обеих точек особенно заметно.

Если воспользоваться методом уравнений Лагранжа первого рода, то из уравнения для y получаем, с точностью до малых второго порядка, $\lambda = -\frac{g}{l}$; из уравнения для x получаем уравнение (5).

б) Условие (1) сохраняется и в этом случае. Условие связи (2) принимает следующий вид:

$$x^2 + (y - \eta)^2 = l^2. \quad (7)$$

Вариирование этого условия дает вместо (4):

$$(y - \eta)\dot{x} - x(\dot{y} + g) = 0. \quad (8)$$

Если x рассматривать как малую величину первого порядка, то из условия (7), с точностью до малых второго порядка, получаем;

$$y - \eta = -l, \quad \dot{y} = \dot{\eta}. \quad (9)$$

Поэтому уравнение (8) принимает вид

$$\ddot{x} + \frac{\ddot{\eta} + g}{l}x = 0. \quad (10)$$

То же самое получается и из уравнений Лагранжа первого рода, так как уравнение для y в приближении (9) дает величину

$$\lambda = -\frac{\ddot{\eta} + g}{l}, \quad (11)$$

вследствие чего уравнение для x становится тождественным с уравнением (10).

При равномерно ускоренном движении точки подвеса вверх с ускорением $+g$ действие силы тяжести как бы удваивается, а при движении вниз с ускорением $-g$ ее действие как бы уничтожается. Это означает эквивалентность тяжести и ускорения, которая, наряду с равенством тяжелой и инертной масс (стр. 32), явилась основой теории тяготения Эйнштейна.

III.5. Из равновесия натяжения в точках c и D вытекают требования:

$$\begin{aligned} S_1 \frac{x_1 - x_3}{l_1} &= S \frac{x_3}{a} + S \frac{x_3 - x_4}{a}, \\ S_2 \frac{x_2 - x_4}{l_2} &= S \frac{x_4}{a} + S \frac{x_4 - x_3}{a}. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, ввиду уравнений (1) (ср. текст задачи), вводя

$$\sigma_1 = \frac{m_1 g}{S} \frac{a}{l_1}, \quad \sigma_2 = \frac{m_2 g}{S} \frac{a}{l_2},$$

получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 x_1 &= (2 + \sigma_1)x_3 - x_4, \\ \sigma_2 x_2 &= (2 + \sigma_2)x_4 - x_3. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

В силу предположения о слабой связи, σ_1 и σ_2 являются малыми величинами, так что в правых частях уравнений (4) ими можно пренебречь. Разрешая эти уравнения относительно x_3 , x_4 , получаем:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{2}{3}\sigma_1 x_1 + \frac{1}{3}\sigma_2 x_2, \\ x_4 &= \frac{2}{3}\sigma_2 x_2 + \frac{1}{3}\sigma_1 x_1. \end{aligned} \quad (5)$$

и, после подстановки в уравнении (2):

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{g}{l_1}(1 - \sigma_1)x_1 &= \frac{1}{3}\frac{g}{l_1}\sigma_2(x_2 - x_1), \\ \ddot{x}_2 + \frac{g}{l_2}(1 - \sigma_2)x_2 &= \frac{1}{3}\frac{g}{l_1}\sigma_1(x_1 - x_2). \end{aligned} \quad (6)$$

Эту систему дифференциальных уравнений нужно сравнить с уравнениями (20.10); при этом получаются значения введенных там величин ω_1 , ω_2 , k_1 , k_2 для рассматриваемого теперь расположения.

III.6. Воздействие m на M выражается величиной $k(X - x)$, а воздействие M на m — величиной $k(x - X)$. В полученной таким путем системе двух дифференциальных уравнений для X и x нужно положить $X = 0$. Оказывается, что искомое условие (колебание одной только массы m) совпадает с условием резонанса; круговая частота собственных колебаний системы (m, k) должна совпадать с частотой ω внешней силы.

Подобное устройство применяется в технике в качестве «успокоителя колебаний», чтобы, например, в случае коленчатого вала с маховиком, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω , передавать колебания с вала на связанный с ним успокоитель колебаний (являющийся в данном случае

также вращающимся механизмом, способным совершать крутильные колебания). При этом вместо координаты x нашей задачи в рассмотрение войдет угол поворота.

III.7. а) Удар mv сообщает баллистическому маятнику начальный момент импульса, из которого нужно определить его угловую скорость при $t = 0$. Из уравнения движения физического маятника, зная угловую скорость, найдем отклонение α . Обратив эту формулу, получим:

$$v = \frac{\sqrt{Mgs\Theta}}{ma} 2 \sin \frac{\alpha}{2}$$

или также

$$v = \frac{M}{m} \frac{s}{a} g \tau \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\pi} = \frac{M}{m} \frac{s}{a} \sqrt{gl} 2 \sin \frac{\alpha}{2},$$

где τ — период малого колебания.

б) После удара угловая скорость вращения маятника ω определяется из закона сохранения момента импульса:

$$\Theta \omega = mva,$$

где Θ — момент инерции всей системы (маятник + снаряд) относительно оси вращения маятника. (В дальнейшем под маятником понимается система, состоящая из собственно баллистического маятника и снаряда, застрявшего в нем.) С другой стороны, если при ударе снаряда ось маятника не испытывает дополнительной нагрузки, то закон движения центра тяжести дает:

$$Mu = mv,$$

где u — скорость движения центра тяжести системы. Так как

$$u \equiv \omega s,$$

то

$$\frac{\Theta}{M} = as,$$

откуда, вводя приведенную длину маятника $l = \frac{\Theta}{Ms}$, находим:

$$a = l.$$

Определенная таким образом точка подвеса маятника (ось машинка) называется «центром удара». Кузнец точно знает, в каком месте нужно держать рукоятку своего тяжелого молота (именно — в центре удара), чтобы при ударе не ощущать в руке неприятную отдачу.

IV.1. Моменты инерции плоско распределенных масс играют важную роль в теории упругости при рассмотрении кручения и изгиба балок. Ввиду $r^2 = x^2 + y^2$ имеем:

$$\Theta_p = \int r^2 dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm = \Theta_x + \Theta_y.$$

В применении к теории упругости масса предполагается равномерно распределенной с плотностью 1 по поперечному сечению балки, так что $dm = df$ = элементу площади. В соответствии с этим для кругового диска радиуса a , т. е. площади $F = \pi a^2$, получаем:

$$\Theta_p = \int r^2 df = 2\pi \int r^3 dr = \frac{1}{2} F a^2,$$

откуда

$$\Theta_x = \Theta_y = \frac{1}{4} F a^2.$$

IV.2. Оставляя до конца открытым вопрос о соотношениях величин трех главных моментов инерции, мы охватываем одним и тем же расчетом все три случая: когда A является наибольшим, наименьшим или средним из главных моментов инерции.

IV.3. Удар S одновременно сообщает шару радиуса a импульс поступательного движения и импульс вращательного движения:

$$Mv = S \tag{1}$$

и

$$\Theta\omega = Sh, \tag{2}$$

где h — высота (относительно центра шара) точки удара, произведенного кием в горизонтальном направлении.

Ось вращения ω перпендикулярна к центральной плоскости. Окружная скорость u в наинизшей точке лежит в центральной плоскости и равна $a\omega$. Это справедливо не только для $t = 0$ (момент удара), но также для $t > 0$.

Так как, согласно формуле (11.12а), $\Theta = \frac{2}{5} M a^2$, то, в силу (2) и (1), при $t = 0$ имеем:

$$\frac{2}{5} M a u = Sh = M v h; \tag{3}$$

$v = u$ означает чистое качение; условием последнего, согласно (3), является $h = \frac{2}{5} a$. При этом нужно учесть, что положительные направления отсчета скоростей u и V противоположны. При высоких ударах ($h > \frac{2}{5} a$) скорость

скольжения $u - v$ точки касания шара с сукном будет больше 0 и направлена противоположно v ; таким образом, сила трения направлена в ту же сторону, что и v , и равна по величине fMg . Момент силы трения относительно центра шара равен $fMga$ и противодействует вращению ω .

При низких ударах сила трения направлена в противоположную сторону. В общем случае при $t > 0$ имеем:

$$\dot{v} = \pm fg, \quad (4)$$

$$\dot{\omega} = \pm \frac{5}{2} fg \quad (5)$$

(верхний знак соответствует высокому удару, нижний знак — низкому удару).

Графическое рассмотрение. Будем откладывать скорости v и u по оси ординат, а по оси абсцисс — время t ; оба графика представляют собой прямые, пересекающиеся друг с другом как при высоких, так и при низких ударах. Точка пересечения $u = v$ соответствует началу чистого качения. В своей дальнейшей части графики u и v представляют собой совпадающие горизонтальные прямые. Абсцисса точки пересечения равна

$$\tau = \pm \frac{5h - 2a}{7a} \cdot \frac{S}{fgM}. \quad (6)$$

(При низком ударе числитель первой дроби имеет отрицательный знак, так как h лежит в этом случае между $-a$ и $\frac{2}{5}a$; поэтому правая часть отрицательна лишь кажущимся образом.) Прирост или убыль скорости при высоких и соответственно низких ударах будет $\Delta v = \pm fg\tau$. Конечная скорость чистого качения равна

$$v + \Delta v = \frac{5}{7} \frac{h + a}{a} \frac{S}{M};$$

таким образом, она пропорциональна высоте $h + a$ точки удара над сукном.

Теория ударов «с накатом». Шар, которому сообщен высокий удар, ударяет центрально другой шар в момент времени $t < \tau$ (когда $u > v$). Пусть скорости u и v при соударении равны u_0 и v_0 . Скорость v_0 передается второму шару. Движение первого шара, согласно (4), ускоряется, начиная от $v = 0$. Согласно (5), его окружная скорость u уменьшается, начиная от u_0 . Новый график показывает, что имеется точка пересечения, соответствующая началу чистого качения. Абсцисса точки пересечения и скорость чистого качения соответственно равны

$$\tau_1 = \frac{2}{7} \frac{u_0}{fg}, \quad v_1 = fg\tau_1 = \frac{2}{7} u_0. \quad (7)$$

Теория ударов «с оттяжкой». Шар, которому сообщен удар, ударяет другой шар также в момент времени $t < \tau$; при этом, однако, $u < v$. При особенно низких ударах, которые мы и будем предполагать имеющими место, скорость u будет даже отрицательна (т. е. будет совпадать по направлению с v). Пусть скорости u и v при соударении равны u_0 и v_0 . Скорость v_0 по-прежнему передается второму шару. Движение первого шара будет, согласно (4), ускоряться, начиная от $v_0 = 0$, в отрицательном направлении; шар катится назад. Окружная скорость u , согласно (5), увеличивается от отрицательного начального значения u_0 в положительном направлении, т. е. уменьшается по абсолютной величине. Обе прямые, представляющие v и u , пересекаются (новый график). Абсцисса точки пересечения и конечная скорость чистого качения равны

$$\tau_2 = \frac{2}{7} \frac{|u_0|}{fg}, \quad |v_2| = \frac{2}{7} |u_0|. \quad (8)$$

IV.4. Пусть кий направлен не горизонтально, как в задаче IV.3, а под некоторым углом к горизонтальной плоскости. Если выбрать ось x по направлению горизонтальной слагающей удара, а ось z — по вертикали (начало координат системы x, y, z помещаем в центре шара), то компоненты силы удара \mathbf{S} равны $S_x, 0, S_y$, а компоненты момента силы удара \mathbf{N} относительно центра шара равны:

$$N_x = yS_z, \quad N_y = zS_x - xS_z, \quad N_z = -yS_x.$$

Здесь x, y, z — координаты точки удара кия по шару. Слагающим момента силы удара N_x, N_y соответствуют угловые скорости

$$\omega_x = \frac{5}{2} \frac{N_x}{Ma^2}, \quad \omega_y = \frac{5}{2} \frac{N_y}{Ma^2}.$$

Соответствующие окружные скорости в наинизшей точке P шара суть

$$u_x = -a\omega_y, \quad u_y = +a\omega_x. \quad (1)$$

Величины N_z и ω_z нас не интересуют, так как они не вызывают скольжения точки P ; они вызывают лишь некоторое (пренебрежимо малое) «сверлящее» трение. Пусть слагающие скорости скольжения точки P по сукну равны

$$v_x - u_x = -\rho \cos \alpha, \quad v_y - u_y = -\rho \sin \alpha. \quad (2)$$

Это скольжение вызывает силу трения R , которая образует с осью x угол $\pi + \alpha$ и имеет величину fgM . Ее влияние на поступательное и вращательное движения определяется при $t > 0$ уравнениями

$$\begin{aligned} M\dot{v}_z &= R_x, & M\dot{v}_y &= R_y, \\ \Theta\dot{\omega}_x &= aR_y, & \Theta\dot{\omega}_y &= -aR_x. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\dot{v}_x = -fg \cos \alpha, \quad \dot{v}_y = -fg \sin \alpha \quad (3)$$

и, принимая во внимание (1) и (2),

$$\dot{u}_y = -\frac{5}{2}fg \sin \alpha, \quad \dot{u}_x = -\frac{5}{2}fg \cos \alpha. \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}_x - \dot{u}_x &= -\frac{d}{dt}(\rho \cos \alpha) = -\frac{7}{2}fg \cos \alpha, \\ \dot{v}_y - \dot{u}_y &= -\frac{d}{dt}(\rho \sin \alpha) = -\frac{7}{2}fg \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Разрешая последние два уравнения (5) относительно $\dot{\alpha}$ и $\dot{\rho}$, получаем:

1) $\dot{\alpha} = 0$. Сила трения постоянна по направлению; ввиду того, что она постоянна и по величине, траектория точки P в горизонтальной плоскости оказывается параболой. Ось параболы параллельна начальному направлению скольжения α , которое определяется векторами \mathbf{S} и \mathbf{N} .

$$2) \dot{\rho} = -\frac{7}{2}fg, \quad \rho = \rho_0 - \frac{7}{2}fgt, \quad \rho = 0 \quad \text{при} \quad t = \tau = \frac{2}{7} \frac{\rho_0}{fg}.$$

Здесь ρ_0 — начальная величина скорости скольжения, которая также может быть определена из \mathbf{S} и \mathbf{N} . При $t > \tau$ скольжение и трение становятся равными нулю. Шар катится прямолинейно по касательной к параболе.

V.1. Пусть φ — мгновенный угол поворота вращающейся плоскости относительно неподвижной. Положим

$$x + iy = (\xi + i\eta)e^{i\varphi}. \quad (1)$$

Дифференцируя дважды по t и полагая $\dot{\varphi} = \omega$, получим:

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = \{\ddot{\xi} + i\ddot{\eta} + 2i\omega(\dot{\xi} + i\dot{\eta}) + i\dot{\omega}(\xi + i\eta) - \omega^2(\xi + i\eta)\}e^{i\varphi}. \quad (2)$$

Здесь $\xi + i\eta$ есть вектор \mathbf{r} , рассматриваемый относительно вращающейся плоскости; $\dot{\xi} + i\dot{\eta}$ — соответствующая ему скорость (также относительно вращающейся плоскости) и т. д.; $i(\dot{\xi} + i\dot{\eta}) = (\dot{\xi} + i\dot{\eta})e^{i\pi/2}$ — перпендикулярный к нему вектор, так что можно написать:

$$2i\omega(\dot{\xi} + i\dot{\eta}) = 2[\omega\dot{\mathbf{r}}], \quad i\dot{\omega} = (\dot{\xi} + i\dot{\eta}) = [\dot{\omega}\mathbf{r}]. \quad (3)$$

При этом за направление вектора ω нужно взять нормаль к комплексной плоскости. Обозначим скорость $\dot{x} + i\dot{y}$, рассматриваемую относительно неподвижной плоскости, как на стр. 220, через \mathbf{w} . Для производных по времени от величин, рассматриваемых относительно вращающейся плоскости, мы сохраним обозначение с помощью точек (над соответствующими величинами),

использованное в уравнении (3). Тогда (2) переходит в следующее уравнение, аналогичное уравнению (29.4):

$$\dot{\mathbf{w}} = \{\ddot{\mathbf{r}} + 2[\boldsymbol{\omega}\dot{\mathbf{r}}] + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}] - \omega^2\mathbf{r}\}e^{i\varphi}. \quad (4)$$

Если $\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + i\mathbf{F}_y$ — сила, рассматриваемая относительно неподвижной плоскости, а $\Phi = \mathbf{F}_\xi + i\mathbf{F}_\eta$ — сила, рассматриваемая относительно вращающейся плоскости, то, согласно (1), имеет место $\mathbf{F} = \Phi e^{i\varphi}$, следовательно,

$$\Phi = \mathbf{F}e^{-i\varphi}. \quad (5)$$

Тогда, согласно (4) и (5), из $m\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{F}$ следует:

$$m\{\ddot{\mathbf{r}} + 2[\boldsymbol{\omega}\dot{\mathbf{r}}] + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}] - \omega^2\mathbf{r}\} = \Phi. \quad (6)$$

Тем самым искомые дополнительные силы определены. В частности, второй член слева представляет собой уже знакомую нам кориолисову силу.

Мы намеренно рассматривали эту задачу в комплексной форме, чтобы подчеркнуть, что двухмерные векторы лучше всего представлять с помощью комплексных переменных.

V.2. Плоскость, в которой вращается прямая, выберем в качестве плоскости x, y , ось X направим горизонтально, а ось y — вертикально вверх. Пусть ось вращения проходит через начало координат; $\varphi = \omega t$ есть угол, образованный прямой с осью x . Эту задачу можно свести к предыдущей, если (мысленно) неподвижно связать с вращающейся прямой вертикальную плоскость ξ, η , вращающуюся, таким образом, с постоянной угловой скоростью ω относительно плоскости x, y . При этом удобно направить ось ξ по вращающейся прямой. Однако в этом случае для того, чтобы материальная точка неизменно оставалась на оси ξ , необходима некоторая вынуждающая сила (реакция связи), действующая на нее в направлении оси η .

Таким образом, внешняя сила Φ здесь состоит из реакции связи, которую мы обозначим через mb , и силы тяжести mg . Если теперь спроектировать уравнение (6) предыдущей задачи на неподвижные оси x и y , то получим (при $\dot{\omega} = 0$):

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r} \sin \varphi - r\omega^2 \cos \varphi &= -b \sin \varphi, \\ \ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r} \cos \varphi - r\omega^2 \sin \varphi &= b \cos \varphi - g. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Умножая первое уравнение на $\cos \varphi$, второе — на $\sin \varphi$ и складывая их почленно, найдем ($\varphi = \omega t$):

$$\ddot{r} - r\omega^2 = -g \sin \omega t. \quad (2)$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$r = A \operatorname{ch} \omega t + B \operatorname{sh} \omega t + \frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t. \quad (3)$$

Не зная этого решения, можно приведенное в задаче соотношение

$$b = g \cos \varphi + 2\dot{r}\omega$$

между реакцией связи, силой тяжести и кориолисовой силой вывести непосредственно с помощью соответствующей комбинации уравнений (1).

V.3. а) Пусть $x_0 + iy_0$ определяет положение точки O в плоскости x, y . Тогда

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_0 + i\dot{y}_0 &= (u + iv)e^{i\varphi}, \\ \ddot{x}_0 + i\ddot{y}_0 &= \{\dot{u} + i\dot{v} + i\omega(u + iv)\}e^{i\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Пусть, далее, $x + iy$ определяет положение точки S в плоскости x, y . Имеем:

$$\left. \begin{aligned} x + iy &= x_0 + iy_0 + ae^{i\varphi}, \\ \dot{x} + i\dot{y} &= (u + iv + i\omega a)e^{i\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = [\dot{u} + i\dot{v} + i\dot{\omega}a + i\omega(u + iv) - \omega^2 a]e^{i\varphi}. \quad (2)$$

Внешней силе R соответствует в плоскости x, y комплексная величина

$$F = Rie^{i\varphi}. \quad (2')$$

Закон движения центра тяжести $\ddot{x} + i\ddot{y} = F/M$ дает, согласно (2) и (2'),

$$\dot{u} + i\dot{v} + i\dot{\omega}a + i\omega(u + iv) - \omega^2 a = \frac{iR}{M}$$

или, отделяя вещественную и мнимую части,

$$\dot{u} - \omega v - \omega^2 a = 0, \quad (3)$$

$$\dot{v} + \dot{\omega}a + \omega u = \frac{R}{M}. \quad (4)$$

Далее, согласно закону площадей (уравнению момента импульса) имеем:

$$\Theta\dot{\omega} = -Ra. \quad (5)$$

б) В силу условий $v = 0, \dot{v} = 0$, уравнения (3) и (4) упрощаются и принимают вид:

$$\dot{u} - \omega^2 a = 0, \quad (3')$$

$$\dot{\omega}a + \omega u = \frac{R}{M}. \quad (4')$$

Исключая R из (4') и (5), получим:

$$\dot{\omega}a \left(1 + \frac{\Theta}{Ma^2}\right) + \omega u = 0. \quad (6)$$

Положим $\Theta = Mb^2$ (b — радиус инерции) и

$$k^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} > 1, \quad (7)$$

вследствие чего уравнение (6) перейдет в

$$k^2 \dot{\omega} a + \omega u = 0. \quad (6')$$

После интегрирования системы уравнений (3') и (6') R определяется с помощью формулы (4') или (5).

в) Исключая u из (3) и (6), имеем:

$$k^2 \frac{d}{dt} \frac{\dot{\omega}}{\omega} = -\omega^2. \quad (8)$$

После умножения на $\frac{\dot{\omega}^2}{\omega}$ это уравнение может быть проинтегрировано и дает:

$$k^2 \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega} \right)^2 = k^2 c^2 - \omega^2. \quad (9)$$

$$k\dot{\omega} = \omega \sqrt{k^2 c^2 - \omega^2}, \quad (9')$$

где c — постоянная интегрирования.

От квадратного корня избавляемся, полагая

$$\omega = kc \cos \psi. \quad (10)$$

Тогда при соответствующем выборе знака квадратного корня в (9') получаем:

$$\dot{\psi} = c \cos \psi \quad (10')$$

или

$$c dt = \frac{d\psi}{\cos \psi}, \quad ct = \frac{1}{2} \lg \frac{1 + \sin \psi}{1 - \sin \psi}. \quad (11)$$

Тем самым определена величина ψ как функция t . Через ψ выражаются остальные величины, а именно: ω — согласно формуле (10), а u и R — согласно формулам (6') и (4'):

$$u = ak^2 c \sin \psi, \quad (12)$$

$$R = \frac{M}{2} ak(k^2 - 1)c^2 \sin 2\psi. \quad (12')$$

Этим и заканчивается интегрирование.

Сравнение (10) с (10') дает, ввиду $\omega = \dot{\varphi}$, соотношение $\dot{\psi} = \dot{\varphi}/k$. Таким образом, наш вспомогательный угол ψ пропорционален углу поворота

$$\psi = \frac{\varphi}{k}, \quad (13)$$

поскольку при соответствующем выборе пока что произвольной оси x постоянная интегрирования может быть обращена в нуль.

г) Из (1') получаем при $v = 0$:

$$\begin{aligned} |\dot{x} + i\dot{y}|^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = u^2 + \omega^2 a^2, \\ T &= \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{\Theta}{2}\omega^2 = \\ &= \frac{M}{2}(u^2 + \omega^2 a^2) + \frac{M}{2}(k^2 - 1)a^2\omega^2 = \frac{M}{2}(u^2 + k^2 a^2 \omega^2). \end{aligned} \quad (14)$$

Но, в силу формул (10) и (12), получаем:

$$T = \frac{M}{2}a^2 k^4 c^2 (\sin^2 \psi \cos^2 \psi) = \text{const}. \quad (15)$$

д) Согласно (1) и (12), имеем:

$$\dot{x}_0 = ak^2 c \sin \psi \cos \varphi, \quad \dot{y}_0 = ak^2 c \sin \psi \cos \varphi;$$

следовательно, ввиду (10') и (13),

$$\frac{dx_0}{d\varphi} = ak \operatorname{tg} \psi \cos \varphi, \quad \frac{dy_0}{d\varphi} = ak \operatorname{tg} \psi \sin \varphi. \quad (16)$$

Из (11) вытекает:

$$\begin{aligned} \text{при } \psi &= 0 & t &= 0, \\ \text{при } \psi &= \pm \frac{\pi}{2} & t &= \pm \infty. \end{aligned}$$

Вся траектория проходит в следующих интервалах углов ψ и φ

$$-\frac{\pi}{2} < \psi < +\frac{\pi}{2}, \quad -k\frac{\pi}{2} < \varphi < +k\frac{\pi}{2}.$$

При $t = 0$ траектория имеет острие; именно — из (16), ввиду $\psi = 0$, $\varphi = 0$, получаем:

$$\frac{dx_0}{d\varphi} = \frac{dy_0}{d\varphi} = \frac{d^2 y_0}{d\varphi^2} = 0, \quad \text{но } \frac{d^2 x_0}{d\varphi^2} \quad \text{и} \quad \frac{d^3 y_0}{d\varphi^3} \neq 0.$$

Острие является точкой возврата кривой; касательная к траектории в этой точке параллельна оси x .

При $t = \pm\infty$ траектория стремится к асимптотам; угол φ становится постоянным, так как, вообще говоря,

$$\frac{dx_0}{d\varphi} = \frac{dy_0}{d\varphi} = \pm\infty$$

[на основании формул (16)].
Поскольку из (14) следует

$$\frac{dy_0}{dx_0} = \operatorname{tg} \varphi = \pm \operatorname{tg} k \frac{\pi}{2},$$

то асимптоты расположены симметрично относительно оси x под углами $\pm k \frac{\pi}{2}$, как показывает рис. 57 (стр. 328) для $k = 1, \frac{3}{2}, 2, 3$.

VI.1. Если направить ось z по направлению падения, т. е. вертикально вниз, то $V = -mgz$. Начальное положение $z = 0$ при $t = 0$ лежит выше конечного положения $z = z_1$ при $t = t_1$

а) При $z = \frac{1}{2}gt^2$ получаем:

$$\int L dt = \int_0^{t_1} \left[\frac{m}{2}(gt)^2 + mg \frac{g}{2} t^2 \right] dt = \frac{1}{3} mg^2 t_1^3.$$

б) В случае $z = ct$ постоянная c должна быть выбрана так, чтобы при $t = t_1$ имело место соотношение

$$z = z_1 = g \frac{t_1^2}{2};$$

таким образом, $c = \frac{gt_1}{2}$.

Отсюда находим:

$$\int L dt = \int_0^{t_1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{gt_1}{2} \right)^2 + mg \frac{gt_1}{2} t \right] dt = \frac{3}{8} mg^2 t_1^3.$$

С другой стороны, в случае $z = at^3$, $a = g/2t_1$ имеем:

$$\int L dt = \int_0^{t_1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{3g}{2t_1} \right)^2 t^4 + mg \frac{g}{2t_1} t^3 \right] dt = \frac{7}{20} g^2 t_1^3.$$

В то время как при пользовании принципом Гамильтона мы сравниваем лишь траектории, бесконечно мало отличающиеся друг от друга, траектории в фазовом пространстве «координат» q , \dot{q} (здесь z , \dot{z}) в обоих случаях отличаются от истинного движения на конечные величины. Несмотря на это, величина интеграла Гамильтона и теперь оказывается меньшей в случае а), чем в случае б):

$$\frac{1}{3} < \frac{3}{8} \quad \text{и} \quad \frac{1}{3} < \frac{7}{20}$$

и притом для любых длин траекторий, что, вообще говоря (ср. стр. 276), не обязательно должно иметь место.

VI.2. Пусть ξ , η (как в задаче V.1) — координаты, измеренные во вращающейся плоскости; $u = (\dot{\xi}, \dot{\eta})$ — скорость, измеренная также относительно этой плоскости. Тогда скорость относительно неподвижной плоскости равна

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = [\omega \mathbf{r}]$$

(ср., например, первую строку таблицы на стр. 185). Поэтому при разложении на слагающие получим:

$$w_x = \dot{\xi} - \omega\eta, \quad w_y = \dot{\eta} + \omega\xi, \\ |\mathbf{w}|^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + 2\omega(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) + \omega^2(\xi^2 + \eta^2).$$

Отсюда следует (вводим $T = \frac{m|\omega|^2}{2}$):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = m \frac{d}{dt} (\dot{\xi} - \omega\eta) = m(\ddot{\xi} - \omega\dot{\eta} - \dot{\omega}\eta), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} = m \frac{d}{dt} (\dot{\eta} + \omega\xi) = m(\ddot{\eta} + \omega\dot{\xi} + \dot{\omega}\xi), \\ \frac{\partial T}{\partial \xi} = m(\omega\dot{\eta} + \omega^2\xi), \quad \frac{\partial T}{\partial \eta} = m(-\omega\dot{\xi} + \omega^2\eta).$$

Если обозначить через F_ξ , F_η слагающие внешней силы F по движущимся осям ξ , η , то получим следующие уравнения Лагранжа:

$$\ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} - \dot{\omega}\eta - \omega^2\xi = F_\xi, \\ \ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} + \dot{\omega}\xi - \omega^2\eta = F_\eta.$$

Это в точности совпадает с уравнением (6) задачи V.1, если последнее написать в компонентах.

В случае движения материальной точки по вращающейся прямой, рассмотренном в задаче V.2, имеем:

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{dt^2} = \dot{r}^2 + r^2 \omega^2, \quad L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2) - mgr \sin \omega t,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\omega^2 - mg \sin \omega t.$$

Вытекающее отсюда уравнение Лагранжа тождественно с уравнением (2), приведенным в пояснении к задаче V.2.; оно непосредственно приводит к указанному там же решению (3). При этом вообще не приходится рассматривать кориолисову силу и т. п.; правда, при этом мы ничего не узнаем относительно давления на направляющую.

VI.3. Члены, опущенные в уравнении (4) данной задачи и обозначенные точками, имеют вид

$$\left(1 + \frac{\zeta}{R}\right) \dot{\eta} \quad \text{и} \quad -\frac{\eta}{R} \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right) \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \dot{\xi}.$$

Эти члены после умножения на стоящий перед фигурными скобками множитель и последующего дифференцирования по t дали бы члены второго или высшего порядка малости относительно ξ , η , ζ или их производных. Относительно уравнений (5) и (6) нужно заметить, что после дифференцирования члены второго порядка, как $\zeta \ddot{\zeta}$, $\dot{\zeta} \ddot{\zeta}$ и т. д., в них, конечно, опущены. Заслуживает внимания, что при этом одновременно из результатов выпадает радиус Земли R . В уравнении (6) к выписанному члену прибавился бы член с ω^2 , а именно

$$R \sin \vartheta \cos \vartheta \omega^2.$$

Это, очевидно, слагающая обычной центробежной силы по оси ξ ; соответствующая слагающая по оси ζ вошла бы в $\frac{\partial T}{\partial \zeta}$. Однако эти члены нужно опустить, так как они уже учтены в эффективном ускорении свободного падения g [уравнение (30.1)].

В случае маятника Фуко следует, очевидно, применять не уравнения Лагранжа в их обычной форме (34.6), а смешанный тип уравнений (34.11), принимая во внимание условие связи (31.11).

Впрочем, нужно заметить, что в силу определений η и ψ_0 [формулы (1) и (2)] наша задача относится к охарактеризованному на стр. 288 классу задач, условия которых зависят от времени.

VI.4. Центр тяжести описывает «сплюснутую» циклоиду в плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра. Мы получим ее параметрическое представление через угол поворота φ из уравнения (17.1) для «обыкновенной»

циклоиды, если a в этом уравнении частично заменим через s :

$$\begin{aligned}\xi &= a\varphi - s \sin \varphi, & \dot{\xi} &= (a - s \cos \varphi)\dot{\varphi}; \\ \eta &= a - s \cos \varphi, & \dot{\eta} &= s \sin \varphi \dot{\varphi}.\end{aligned}$$

а) Выбрав центр тяжести за точку отсчета O , получим:

$$\begin{aligned}T_{\text{пост.}} &= \frac{m}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) = \frac{m}{2}(a^2 + s^2 - 2as \cos \varphi)\dot{\varphi}^2, \\ T_{\text{вращ.}} &= \frac{\Theta}{2}\dot{\varphi}^2, \quad T_w = 0, \quad V = mg\eta = mg(a - s \cos \varphi).\end{aligned}$$

При этом надо принять во внимание, что величину $\omega = \dot{\varphi}$ можно рассматривать как угловую скорость вращения цилиндра не только вокруг его геометрической оси (как мы считаем первоначально), но с тем же правом и вокруг оси, проходящей через его центр тяжести [согласно (23.8)]. Если, кроме того, положить $\Theta = mb^2$ (b — радиус инерции), $c^2 = a^2 + s^2 + b^2$, то получим:

$$\left. \begin{aligned}L &= T_{\text{пост.}} + T_{\text{вращ.}} - V = \frac{m}{2}(c^2 - 2as \cos \varphi)\dot{\varphi}^2 - mg(a - s \cos \varphi), \\ \frac{1}{m} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= (c^2 - 2as \cos \varphi)\ddot{\varphi} + 2as \sin \varphi \dot{\varphi}^2, \\ \frac{1}{m} \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= as \sin \varphi \dot{\varphi}^2 - gs \sin \varphi.\end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Таким образом, уравнение движения имеет вид

$$(c^2 - 2as \cos \varphi)\ddot{\varphi} + as \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + gs \sin \varphi = 0. \quad (2)$$

б) Если в качестве точки отсчета O выбрать центр поперечного сечения, проведенного через центр тяжести, то эта точка будет двигаться горизонтально со скоростью $a\dot{\varphi}$; полагая $\Theta' = \Theta + ms^2$ [ср. (16.8)], имеем:

$$T_{\text{пост.}} = \frac{m}{2}a^2\dot{\varphi}^2, \quad T_{\text{вращ.}} = \frac{\Theta'}{2}\dot{\varphi}^2, \quad V \text{ — как прежде,}$$

однако теперь T_w не равна нулю. Действительно, на основании (22.11),

$$T_w = -ma\dot{\varphi}^2 \cos \varphi.$$

Отсюда

$$L = T_{\text{пост.}} + T_{\text{вращ.}} + T_w - V = \frac{m}{2}(c^2 - 2as \cos \varphi)\dot{\varphi}^2 = mg(a - s \cos \varphi), \quad (3)$$

что совпадает с (1). Тем самым и в этом случае мы приходим к уравнению движения (2). Для малых колебаний при $\varphi = 0$ оно дает:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l_1} \varphi = 0, \quad l_1 \frac{c^2 - 2as}{s} = \frac{(a-s)^2 + b^2}{s} \dots (\text{устойчивость});$$

напротив, для малых колебаний при $\varphi = \pi$, полагая $\psi = \pi + \varphi$, получаем:

$$\ddot{\psi} - \frac{g}{l_2} \psi = 0, \quad l_2 \frac{c^2 + 2as}{s} = \frac{(a+s)^2 + b^2}{s} \dots (\text{неустойчивость}).$$

VI.5. 1. *Соотношения между угловыми скоростями.* Эти соотношения проще всего вывести, если учесть, что в местах сцепления конических шестерен (ω) с конической шестерней (ω_1), с одной стороны, и с конической шестерней (ω_2) — с другой, окружные скорости в любой момент должны быть одинаковы. Шестерни (ω) вращаются вокруг оси A с угловой скоростью ω ; кроме того, сама ось A вращается вместе с шестернями (ω) вокруг общей геометрической оси колес (Ω), (ω_1), (ω_2) с угловой скоростью Ω . Если r , r_1 и r_2 — средние радиусы конических шестерен (ω), (ω_1), (ω_2), то для места сцепления колес (ω), (ω_1) осуществляется равенство

$$r\omega + r_1\Omega = r_1\omega_1,$$

а для места сцепления колес (ω), (ω_2) — равенство

$$-r\omega + r_2\Omega = r_2\omega_2.$$

Отсюда при $r_1 = r_2$ получаются соотношения

$$\left. \begin{aligned} 2\Omega &= \omega_1 + \omega_2, \\ 2\omega &= \frac{r_1}{r}(\omega_1 - \omega_2). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Эти формулы могут быть, конечно, получены и путем введения виртуальных вращений.

2. *Соотношения между моментами.* Виртуальная работа момента M всегда должна быть равна сумме виртуальных работ моментов M_1 и M_2 , т. е.

$$M\Omega \delta t = M_1\omega_1 \delta t + M_2\omega_2 \delta t.$$

Заменяя Ω через ω_1 и ω_2 согласно (1), получим:

$$\left(\frac{M}{2} - M_1\right)\omega_1 + \left(\frac{M}{2} - M_2\right)\omega_2 = 0.$$

При произвольных ω_1 и ω_2 это возможно только в том случае, если

$$\frac{M}{2} = M_1 = M_2. \quad (2)$$

Таким образом, развиваемый двигателем момент распределяется на оба задних колеса поровну при произвольных значениях угловых скоростей ω_1 и ω_2 .

3. *Уравнение движения системы.* В этом случае проще всего пользоваться уравнениями Лагранжа второго рода. Имеем:

$$T = \frac{1}{2}(\Theta_1\omega_1^2 + \Theta_2\omega_2^2 + \Theta\omega^2 + \Theta'\Omega^2).$$

Если мы подставим сюда вместо ω и Ω их выражения через ω_1 и ω_2 и введем обозначения

$$\begin{aligned} L_{11} &= \Theta_1 + \frac{\Theta'}{4} + \frac{\Theta r_1^2}{4r^2}, \\ L_{22} &= \Theta_2 + \frac{\Theta'}{4} + \frac{\Theta r_1^2}{4r^2}, \\ L_{12} &= L_{21} = \frac{\Theta'}{4} - \frac{\Theta r_1^2}{4r^2}, \end{aligned}$$

то, по Лагранжу, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(L_{11}\omega_1 + L_{12}\omega_2) &= \frac{M}{2} - W_1, \\ \frac{d}{dt}(L_{21}\omega_1 + L_{22}\omega_2) &= \frac{M}{2} - W_2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Здесь W_1 и W_2 — приложенные к обоим задним колесам противодействующие моменты, вызванные трением сцепления с почвой, причем в эти моменты можно включить также и прочие сопротивления (сопротивление воздуха и т. д.)

Если M , W_1 , W_2 заданы как функции времени, то выражения в скобках в левых частях уравнений (3) вычисляются как интегралы по времени от правых частей этих уравнений, откуда определяются также ω_1 и ω_2 .

Средние по времени значения правых частей уравнений (3) равны нулю, а, следовательно, ω_1 и ω_2 постоянны; если сопротивление на одном колесе уменьшится [например, если колесо подскочит на неровной дороге и будет некоторое время вращаться в воздухе ($W = 0$)], то вращение этого колеса ускорится, тогда как вращение другого колеса замедлится.

4. *Электродинамическая аналогия.* Уравнения (3) имеют вид, напоминающий уравнение взаимодействия двух индуктивно связанных цепей тока

(ср. сказанное на стр. 299 о работе Больцмана). А именно, если отождествить величины L , с коэффициентами индукции этих цепей тока, а ω_1 и ω_2 — с токами, текущими в цепях, то левые части (3) будут выражать электродинамические индукционные воздействия. $\frac{M}{2}$ соответствует «сторонним» электродвижущим силам, действующим в цепях тока;

$$T = \frac{1}{2}L_{11}\omega^2 + L_{12}\omega_1\omega_2 + \frac{1}{2}L_{22}\omega_2^2$$

есть полная магнитная энергия. Согласно определению на стр. 262, системы, функция Лагранжа которых содержит только производные координат по времени (в данном случае $\omega_1 = \dot{\varphi}_1$, $\omega_2 = \dot{\varphi}_2$), называются циклическими системами. Таким образом, они являются механическими аналогами стационарных электрических токов. Дифференциальная передача, как и симметрический волчок, является «бициклом».