

ПАФНУТИЙ ЛЬВОВИЧ ЧЕБЫШЕВ (1821 — 1894)

Пафнутий Львович Чебышев оставил неизгладимый след в истории мировой науки и в развитии русской культуры.

Многочисленные научные труды почти во всех областях математики и прикладной механики, труды, глубокие по содержанию и яркие по своеобразию методов исследования, создали П. Л. Чебышеву славу одного из величайших представителей математической мысли. Огромное богатство идей разбросано в этих работах, и, несмотря на то, что пятьдесят лет прошло со дня смерти их творца, они не потеряли ни своей свежести, ни актуальности, и их дальнейшее развитие продолжается в настоящее время во всех странах земного шара, где только бьётся пульс творческой математической мысли.



П. Л. Чебышев был доступен для всех, кто хотел научно работать и имел для этого данные; он щедро делился своими идеями. Благодаря этому он оставил после себя большое число учеников, ставших впоследствии первоклассными учёными; среди них А. М. Ляпунов и А. А. Марков, очерки о которых помещены в настоящей книге. От него идут истоки многих русских математических школ в теории вероятностей, теории чисел, теории приближения функций, теории механизмов, с успехом продолжающих работу и в наши дни.

Жизнь Пафнутия Львовича Чебышева небогата внешними событиями. Родился он 26 мая 1821 года в сельце Окатове, Боровского уезда, Калужской губернии. Первоначальное образование и воспитание он получил дома; грамоте его обучала мать Аграфена Ивановна, а арифметике и французскому

языку — двоюродная сестра Сухарева, девушка весьма образованная и, по-видимому, сыгравшая значительную роль в воспитании будущего математика. В 1832 г. семейство Чебышевых переехало в Москву для подготовки Пафнутия Львовича и его старшего брата к поступлению в университет. Шестнадцатилетним юношей он стал студентом Московского университета и уже через год за математическое сочинение на тему, предложенную факультетом, был награждён серебряной медалью. С 1840 г. материальное положение семьи Чебышевых пошатнулось, и Пафнутий Львович был вынужден жить на собственный заработок. Это обстоятельство наложило отпечаток на его характер, сделав его расчётливым и бережливым; впоследствии, когда он уже не испытывал недостатка в средствах, он не соблюдал экономии в их расходовании только при изготовлении моделей различных приборов и механизмов, идеи которых часто рождались в его голове.

Двадцатилетним юношей П. Л. Чебышев окончил университет, а через два года опубликовал свою первую научную работу, за которой вскоре последовал ряд других, всё более и более значительных и быстро привлёкших к себе внимание научного мира. Двадцати пяти лет П. Л. Чебышев защитил в Московском университете диссертацию на степень магистра, посвящённую теории вероятностей, а ещё через год был приглашён на кафедру Петербургского университета и переселился в Петербург. Здесь началась его профессорская деятельность, которой П. Л. Чебышев отдал много сил и которая продолжалась до достижения им преклонного возраста, когда он оставил лекции и отдался целиком научной работе, продолжавшейся буквально до последнего мгновения его жизни. В двадцать восемь лет он получил в Петербургском университете степень доктора, причём диссертацией служила его книга «Теория сравнений», которой затем в течение более полувека студенты пользовались как одним из самых глубоких и серьёзных руководств по теории чисел. Академия наук избрала тридцатидвухлетнего П. Л. Чебышева адъюнктом по кафедре прикладной математики; через шесть лет он уже стал ординарным академиком. Год спустя он был избран членом-корреспондентом Парижской Академии наук, а в 1874 г. та же академия избрала его своим иностранным сочленом.

8 декабря 1894 года утром Пафнутий Львович Чебышев умер, сидя за письменным столом. Накануне был его приёмный день и он сообщал ученикам планы своих работ и наводил их на мысли о темах для самостоятельного творчества.

К этой внешней канве жизни П. Л. Чебышева надо добавить оставленную современниками и учениками характеристику его как педагога и научного воспитателя. Тот вес, который приобрела в истории математики созданная им научная школа, уже показывает с максимальной объективностью, независимо от персональных отзывов, что П. Л. Чебышев умел зажигать научный энтузиазм своих учеников. Основной чертой этой школы, которую принято называть петербургской математической школой, было стремление тесно связать проблематику математики с принципиальными вопросами естество-

знания и техники. Раз в неделю у П. Л. Чебышева был приёмный день, когда двери его квартиры были открыты для каждого, кто хотел о чём-либо посоветоваться по поводу своих исследований. Редко кто уходил, не обогатившись новыми мыслями и новыми планами. Современники и, в частности, ученики П. Л. Чебышева говорят о том, что он охотно раскрывал богатство своего идейного мира не только в беседах с избранными, но и на своих лекциях для широкой аудитории. С этой целью он иногда прерывал ход изложения, чтобы осветить своим слушателям историю и методологическое значение того или иного факта или научного положения. Этим отступлениям он придавал существенное значение. Они бывали довольно длительными. Приступая к такой беседе, П. Л. Чебышев оставлял мел и доску и усаживался в особое кресло, стоявшее перед первым рядом слушателей. В остальном ученики характеризуют его как педантически точного и аккуратного лектора, никогда не опаздывавшего и никогда не задерживавшего аудиторию ни на одну минуту долее положенного времени. Интересно отметить ещё характерную особенность его лекций: всякой сложной выкладке он предпосылал разъяснение её цели и хода в самых общих чертах, а затем проводил её молча, очень быстро, но настолько подробно, что следить за ним было легко.

На фоне этой размеренной, благополучной, не отмеченной никакими внешними потрясениями жизни, в тиши спокойного кабинета учёного совершались великие научные открытия, которым суждено было не только изменить и перестроить лицо русской математики, но и оказать огромное, в течение ряда поколений неизменно ощущающееся влияние на научное творчество многих выдающихся учёных и научных школ за рубежом. П. Л. Чебышев не был одним из тех учёных, которые, облюбовав какую-нибудь одну более или менее узкую ветвь своей науки, отдают ей всю свою жизнь, сперва создавая её основы, а потом тщательно дорабатывая и совершенствуя её детали. Он принадлежал к числу тех «кочующих» математиков, которых знает наука среди своих величайших творцов и которые видят своё призвание в том, чтобы, переходя от одной научной области к другой, в каждой из них оставить ряд блестящих основных идей или методов, разработку следствий или деталей которых они охотно предоставляют своим современникам и грядущим поколениям. Это не значит, конечно, что такой учёный ежегодно меняет область своих научных интересов и, опубликовав в выбранной им области одну-две статьи, навсегда её оставляет. Нет, мы знаем, что П. Л. Чебышев занимался, например, всю жизнь разработкой всё новых и новых задач своей знаменитой теории приближения функций, что к основным задачам теории вероятностей он обращался трижды — в начале, в середине и в самом конце своего творческого пути. Но характерным является то, что таких избранных областей у него было много (теория интеграции, приближение функций многочленами, теория чисел, теория вероятностей, теория механизмов и ряд других) и что в каждой из них его преимущественно привлекало создание основных, общих методов, расширение круга идей, а не логическое

завершение путём тщательной отделки всех деталей. И почти невозможно указать такую область, где брошенные им семена не дали бы обильных и мощных всходов. Его идеи подхватывались и разрабатывались блестящей плеядой учеников, а затем становились достоянием и более широких научных кругов, в том числе и зарубежных, и везде с успехом вербовали себе последователей и продолжателей. Были среди этих идей и такие, всё методологическое значение которых не могло быть в достаточной мере осознано современниками и раскрывалось во всей полноте лишь в исследованиях последующих поколений учёных.

В качестве другой важнейшей особенности научного творчества П. Л. Чебышева нужно отметить его неизменный интерес к вопросам практики. Этот интерес был настолько велик, что, пожалуй, им в значительной мере определяется своеобразие П. Л. Чебышева как учёного. Без преувеличения можно сказать, что большая часть его лучших математических открытий навеяна прикладными работами, в частности его исследованиями по теории механизмов. Наличие этого влияния нередко подчёркивалось самим Чебышевым как в математических, так и в прикладных работах, но наиболее полно идея плодотворности связи теории с практикой была им высказана в статье «Черчение географических карт». Мы не станем пересказывать мысли великого учёного, а приведём его подлинные слова:

«Сближение теории с практикой даёт самые благотворные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает; сами науки развиваются под влиянием её, она открывает им новые предметы для исследования, или новые стороны в предметах давно известных. Несмотря на ту высокую степень развития, до которой доведены науки математические трудами великих геометров трёх последних столетий, практика явно обнаруживает неполноту их во многих отношениях; она предлагает вопросы, существенно новые для науки, и таким образом вызывает на изыскание совершенно новых методов. — Если теория много выигрывает от новых приложений старой методы или от новых развитий её, то она ещё более приобретает открытием новых методов, и в этом случае наука находит себе верного руководителя в практике».

Среди огромного количества задач, которые ставит перед человеком его практическая деятельность, особенную важность имеет, по мнению П. Л. Чебышева, одна: «как располагать средствами своими для достижения по возможности большей выгоды?» Именно поэтому «большая часть вопросов практики приводится к задачам наибольших и наименьших величин, совершенно новым для науки, и только решением этих задач мы можем удовлетворить требованиям практики, которая везде ищет самого лучшего, самого выгодного».

Приведённая цитата для П. Л. Чебышева являлась программой всей его научной деятельности, была руководящим принципом его творчества.

Многочисленные прикладные работы П. Л. Чебышева, носящие далеко не математические названия — «Об одном механизме», «О зубчатых колёсах», «О центробежном уравнителе», «О построении географических

карт», «О кройке платьев» и многие другие, объединялись одной основной идеей — как располагать наличными средствами для достижения наибольшей выгоды? Так, в работе «О построении географических карт» он задаётся целью определить такую проекцию карты данной страны, для которой искажение масштаба было бы минимальным. В его руках эта задача получила исчерпывающее решение. Для Европейской России он довёл это решение до численных подсчётов и выяснил, что наивыгоднейшая проекция будет давать искажение масштаба не более 2%, тогда как принятые в то время проекции давали искажение не менее 4—5%¹.

* Значительную долю своих усилий он потратил на конструирование (синтез) шарнирных механизмов и на создание их теории. Особенно внимательно он уделял усовершенствованию параллелограмма Уатта — механизма, служащего для превращения кругового движения в прямолинейное. Дело заключалось в том, что этот основной для паровых двигателей и других машин механизм был весьма несовершенен и давал вместо прямолинейного движения криволинейное. Такая подмена одного движения другим вызывала вредные сопротивления, портившие и изнашивавшие машину. Семьдесят пять лет прошло со времени открытия Уатта; сам Уатт, его современники и последующие поколения инженеров пробовали бороться с этим дефектом, но, идя ощупью, путём проб, существенных результатов добиться не могли. П. Л. Чебышев взглянул на дело с новой точки зрения и поставил вопрос так: создать механизмы, в которых криволинейное движение возможно меньше отклонялось бы от прямолинейного, и определить при этом наивыгоднейшие размеры частей машины. С помощью специально разработанного им аппарата теории функций, наименее уклоняющихся от нуля, он показал возможность решения задачи о приближённо-прямолинейном движении с любой степенью приближения к этому движению.

На основе разработанного им метода он дал ряд новых конструкций приближённо-направляющих механизмов. Некоторые из них до сих пор находят себе практическое применение в современных приборах.

Но интересы П. Л. Чебышева не ограничивались рассмотрением только теории приближённо-направляющих механизмов. Он занимался другими задачами, являющимися актуальными и для современного машиностроения.

Изучая траектории, описываемые отдельными точками звеньев шарнирно-рычажных механизмов, П. Л. Чебышев останавливается на траекториях, форма которых является симметричной. Изучая свойства этих симметричных траекторий (шатунных кривых), он показывает, что эти траектории могут быть использованы для воспроизведения многих важных для техники форм движения. В частности, он показывает, что можно шарнирными механизмами воспроизвести вращательное движение с различным направлением. вращения около двух осей, причём указанные механизмы не будут ни параллелограм-

¹ Часть очерка, касающаяся работ П. Л. Чебышева по теории механизмов и отмеченная в начале и конце звёздочками, принадлежит акад. И. И. Артоболовскому

мами, ни антипараллелограммами, обладающими некоторыми замечательными свойствами. Один из таких механизмов, получивший в дальнейшем название парадоксального, является до сих пор предметом удивления всех техников и специалистов. Передаточное отношение между ведущим и ведомым валами в этом механизме может меняться в зависимости от направления вращения ведущего вала.

П. Л. Чебышев создал ряд так называемых механизмов с остановками. В этих механизмах, широко применяемых в современном автоматостроении, ведомое звено совершает прерывистое движение, причём отношение времени покоя ведомого звена ко времени его движения должно изменяться в зависимости от технологических задач, поставленных перед механизмом. П. Л. Чебышев впервые даёт решение задачи о проектировании таких механизмов. Ему принадлежит приоритет в вопросе создания механизмов «выпрямителей движения», которые в самое последнее время получили применение в целом ряде конструкций современных приборов, и таких передач, как прогрессивные передачи типа Вазанта, Константиновского и другие.

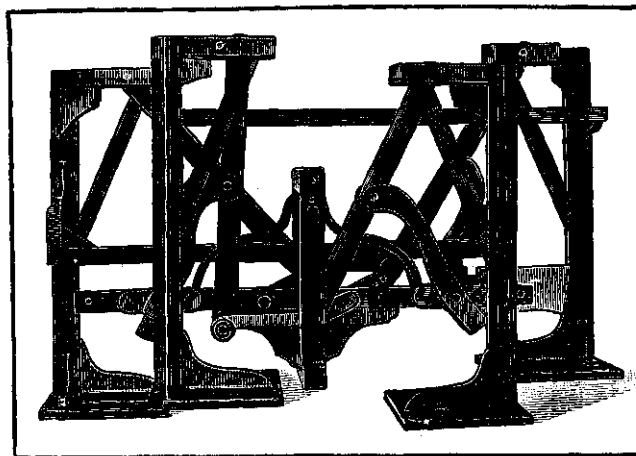
Используя свои механизмы, П. Л. Чебышев построил знаменитую переступающую машину (стопходящую машину), имитирующую своим движением движение животного; он построил так называемый гребной механизм, который имитирует движение вёсел лодки, самокатное кресло, дал оригинальную модель сортировальной машины и других механизмов. До сих пор мы с изумлением наблюдаем за движением этих механизмов и поражаемся богатой технической интуиции П. Л. Чебышева.

П. Л. Чебышеву принадлежит создание свыше 40 различных механизмов и около 80 их модификаций. В истории развития науки о машинах нельзя указать ни одного учёного, творчеству которого принадлежало бы столь значительное количество оригинальных механизмов.

Но П. Л. Чебышев решал не только задачи синтеза механизмов. Он на много лет раньше других учёных выводит знаменитую структурную формулу плоских механизмов, которая только по недоразумению носит название формулы Грюблера — немецкого учёного, открывшего её на 14 лет позднее Чебышева.

П. Л. Чебышев, независимо от Робертса, доказывает знаменитую теорему о существовании трёхшарнирных четырёхзвенников, описывающих одну и ту же шатунную кривую, и широко использует эту теорему для целого ряда практических задач.

Научное наследство П. Л. Чебышева в области теории механизмов содержит такое богатство идей, которое рисует облик великого математика подлинным новатором техники. *



Модель стопоходящей машины П. Л. Чебышева.

Для истории математики особенно важно то, что конструирование механизмов и разработка их теории послужили П. Л. Чебышеву исходной точкой для создания нового раздела математики — теории наилучшего приближения функций многочленами. Здесь П. Л. Чебышев явился пионером в полном смысле этого слова, совершенно не имея предшественников. Это — область, где он работал больше, чем в какой-либо другой, находя и решая всё новые и новые задачи и создав совокупностью своих исследований новую обширную ветвь математического анализа, продолжающую успешно развиваться и после его смерти. Первоначальная и простейшая постановка задачи имела началом исследование параллелограмма Уатта и заключалась в том, чтобы найти многочлен данной степени, который меньше, чем все остальные многочлены той же степени, уклонялся бы от нуля в некотором заданном промежутке изменения аргумента. Такие многочлены П. Л. Чебышевым были найдены и получили название «полиномов Чебышева». Они обладают многими замечательными свойствами и в настоящее время служат одним из наиболее употребительных орудий исследования во многих вопросах математики, физики и техники.

Общая постановка задачи П. Л. Чебышева связана с основными проблемами приложения математических методов к естествознанию и технике. Известно, что понятие функциональной зависимости между переменными величинами является основным не только в математике, но и во всех естественных и технических науках. Вопрос о вычислении значений функции для каждого данного значения аргумента встаёт перед каждым, кто изучает связи между различными величинами, характеризующими тот или иной процесс, то или иное явление. Однако непосредственное вычисление значений функций может быть произведено лишь для очень узкого класса функций много-

членов и частного двух многочленов. Поэтому уже давно возникла задача о замене вычисляемой функции близко к ней подходящим многочленом. Особенный интерес всегда возбуждала задача интерполяции, т. е. нахождение многочлена n -й степени, принимающего в точности те же значения, что и данная функция при $n + 1$ заданных значениях аргумента. Формулы, предложенные знаменитыми математиками Ньютоном, Лагранжем, Гауссом, Бесселем и другими, решают эту задачу, но обладают рядом недостатков. В частности, оказывается, что добавление одного или нескольких новых значений функции требует переделки всех вычислений заново, что ещё важнее, увеличение числа n , т. е. числа совпадающих значений функции и многочлена, не гарантирует неограниченного сближения их значений при всех значениях аргумента. Более того, оказывается, что существуют такие функции, для которых при неудачном выборе значений аргумента, при которых значения функции и многочлена совпадают, может даже получаться удаление многочлена от приближаемой функции.

П. Л. Чебышев не мог примириться с таким серьёзным недочётом в вопросе, играющем выдающуюся роль и для теории и для практики, и подошёл к нему со своей точки зрения. В его постановке задача интерполяции преобразилась так: среди всех многочленов данной степени найти тот, который даёт наименьшие абсолютные величины разностей значений функции и многочлена при всех значениях аргумента в заданном интервале его изменения. Эта постановка была чрезвычайно плодотворной и оказала исключительное влияние на работы последующих математиков. В настоящее время существует огромная литература, посвящённая развитию идей П. Л. Чебышева, в то же время расширяется круг задач, в которых методы, разработанные П. Л. Чебышевым, приносят неоценимую пользу.

Мы остановимся на краткой характеристике достижений П. Л. Чебышева ещё только в двух областях — теории чисел и теории вероятностей.

Трудно указать другое понятие, столь же тесно связанное с возникновением и развитием человеческой культуры, как понятие числа. Отнимите у человечества это понятие и посмотрите, насколько обеднеет от этого наша духовная жизнь и практическая деятельность: мы потеряем возможность производить расчёты, измерять время, сравнивать расстояния, подводить итоги результатам труда. Недаром древние греки приписывали легендарному Прометею, среди прочих его бессмертных деяний, изобретение числа. Важность понятия числа побуждала виднейших математиков и философов всех времён и народов пытаться проникнуть в тайны расположения простых чисел. Особенное значение уже в древней Греции получило исследование простых чисел, т. е. чисел, делящихся без остатка лишь на себя и на единицу. Все остальные числа являются, следовательно, произведениями простых чисел, и, значит, простые числа являются теми элементами, из которых образовано каждое целое число. Однако результаты в этой области получались с величайшим трудом. Древнегреческой математике, пожалуй, был известен только один общий результат о простых числах, известный теперь под назва-

нием теоремы Евклида. Согласно этой теореме, в ряду целых чисел имеется бесконечное множество простых. На вопросы же о том, как расположены эти числа, сколь правильно и как часто, греческая наука не имела ответа. Около двух тысяч лет, прошедших со времени Евклида, не принесли сдвигов в эти проблемы, хотя ими занимались многие математики и среди них такие корифеи математической мысли, как Эйлер и Гаусс. Эмпирические подсчёты, произведённые Лежандром и Гауссом, привели их к выводу, что в пределах известных им таблиц простых чисел число простых чисел среди всех первых n чисел приблизительно в $\ln n$ раз меньше, чем число n . Это утверждение оставалось чисто эмпирическим фактом, установленным лишь для чисел в пределах миллиона. Переносить его на большие значения n не было никаких оснований, путей же для строгого доказательства не было видно. В 40-х годах прошлого века французский математик Бертран высказал о характере расположения простых чисел ещё одну гипотезу: между n и $2n$, где n —любое целое число, большее единицы, обязательно находится по меньшей мере одно простое число. Долгое время эта гипотеза оставалась лишь эмпирическим фактом, для доказательства которого пути совершенно не чувствовалось.

Разбор научного наследия Эйлера пробудил интересы Чебышева к теории чисел и дал возможность проявиться здесь силе его математического таланта. Занявшись теорией чисел, П. Л. Чебышев совершенно элементарными методами установил ошибку в гипотезе Лежандра-Гаусса и исправил её.

Вскоре П. Л. Чебышев доказал предложение, из которого постулат Бертрана вытекал немедленно, как простое следствие, употребив при этом совершенно элементарный и исключительный по остроумию приём. Это был величайший триумф математической мысли. Крупнейшие математики того времени говорили, что для получения дальнейших сдвигов в вопросе распределения простых чисел требуется ум, настолько превосходящий ум Чебышева, насколько ум Чебышева превосходил ум обыкновенного человека. Мы не будем останавливаться на других результатах П. Л. Чебышева в теории чисел; уже сказанное в достаточной мере показывает, насколько мощен был его гений.

Мы перейдём теперь к тому разделу математической науки, в котором идеи и достижения П. Л. Чебышева получили решающее значение для всего дальнейшего его развития и определили на многие десятилетия, вплоть до наших дней, направление наиболее актуальных в нём исследований. Этот раздел математики называется теорией вероятностей. К теории вероятностей тянутся нити буквально от всех областей знания. Эта наука занимается изучением случайных явлений, течение которых нельзя предсказать заранее и осуществление которых при совершенно одинаковых условиях может протекать совершенно различно, в зависимости от случая. Два основных закона этой науки — закон больших чисел и центральная предельная теорема — те два закона, вокруг которых до самого последнего времени группировались почти все исследования и которые продолжают составлять собою предмет усилий большого числа специалистов в наши дни. Оба эти закона в их совре-

менной трактовке ведут своё начало от П. Л. Чебышева.

Мы не станем останавливаться на предметном содержании этих законов. Созданный П. Л. Чебышевым знаменитый элементарный метод позволил ему доказать с изумительной лёгкостью закон больших чисел в столь широких предположениях, каких не могли осилить даже несравненно более сложные аналитические методы его предшественников. Для доказательства центральной предельной теоремы П. Л. Чебышев создал свой метод моментов, продолжающий играть значительную роль и в современном математическом анализе, но доказательства до конца он довести не успел; его завершил позднее ученик П. Л. Чебышева академик А. А. Марков. Пожалуй, ещё более важное значение, чем фактические результаты Чебышева, для теории вероятностей имеет то обстоятельство, что он возбудил интерес к ней своих учеников и создал школу своих последователей, а также то, что именно он впервые придал ей лицо настоящей математической науки. Дело в том, что в эпоху, когда П. Л. Чебышев начинал своё творчество, теория вероятностей как математическая дисциплина находилась в младенческом состоянии, не имея собственных достаточно общих задач и методов исследования. Именно П. Л. Чебышев впервые создал ей недостававший идейный и методологический стержень и научил своих современников и последователей относиться к ней с той же суровой требовательностью (в частности, и в отношении логической строгости её выводов) и той же тщательной и серьёзной внимательностью и заботливостью, как во всякой другой математической дисциплине. Такое отношение, в настоящее время разделяемое всем научным миром и даже единственно мыслимое, было для прошлого столетия новым и необычайным, и зарубежный мир научился ему от русской научной школы, в которой оно со времени Чебышева стало незыблемой традицией.

Мировая наука знает немного имён учёных, творения которых в различных отраслях их науки оказали бы такое значительное влияние на ход её развития, как это было с открытиями П. Л. Чебышева. В частности, подавляющее большинство советских математиков до сих пор благотворно ощущает на себе влияние П. Л. Чебышева, доходящее до них через посредство созданных им научных традиций. Все они с глубоким уважением и тёплой признательностью чтут светлую память своего великого соотечественника.



Главнейшие труды П. Л. Чебышева: Опыт элементарного анализа теории вероятностей. Сочинение, написанное для получения степени магистра, М., 1845; Теория сравнений (Докторская диссертация), Спб., 1849 (3 изд., 1901); Сочинения, Спб., 1899 (т. I), 1907 (т. II), приложен биографический очерк, написанный К. А. Поссе. Полное собрание сочинений, т. I — Теория чисел, М. — Л., 1944; Избранные математические труды (Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины; О простых числах; Об интегрировании иррациональных дифференциалов; Черчение географических карт; Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближённым представлением функций; О квадратурах; О предельных величинах интегралов; О приближённых выражениях квадратного корня переменной через простые дроби; О двух теоремах относительно вероятностей), М. — Л., 1946.

О П. Л. Чебышеве: Ляпунов А. М., Пафнутий Львович Чебышев, «Собрания Харьковского матем. общества», серия II, 1895, т. IV, №5—6; Стеклов В. А., Теория и практика в исследованиях Чебышева. Речь, произнесённая на торжественном чествовании столетия со дня рождения Чебышева Российской Академией наук. Петроград, 1921; Бернштейн С. Н., О математических работах П. Л. Чебышева, «Природа», Л., 1935, № 2; Крылов А. Н., Пафнутий Львович Чебышев, Биографический очерк, М. — Л., 1944.

Источник: Люди русской науки: Очерки о выдающихся деятелях естествознания и техники / Под ред. С.И. Вавилова. — М., Л.: Гос. изд-во техн.-теоретической лит-ры. — 1948.