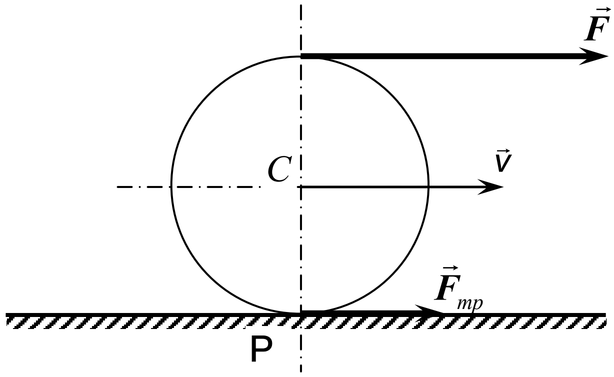
С.Я.Бекшаев

Может ли связь ускорять движение?

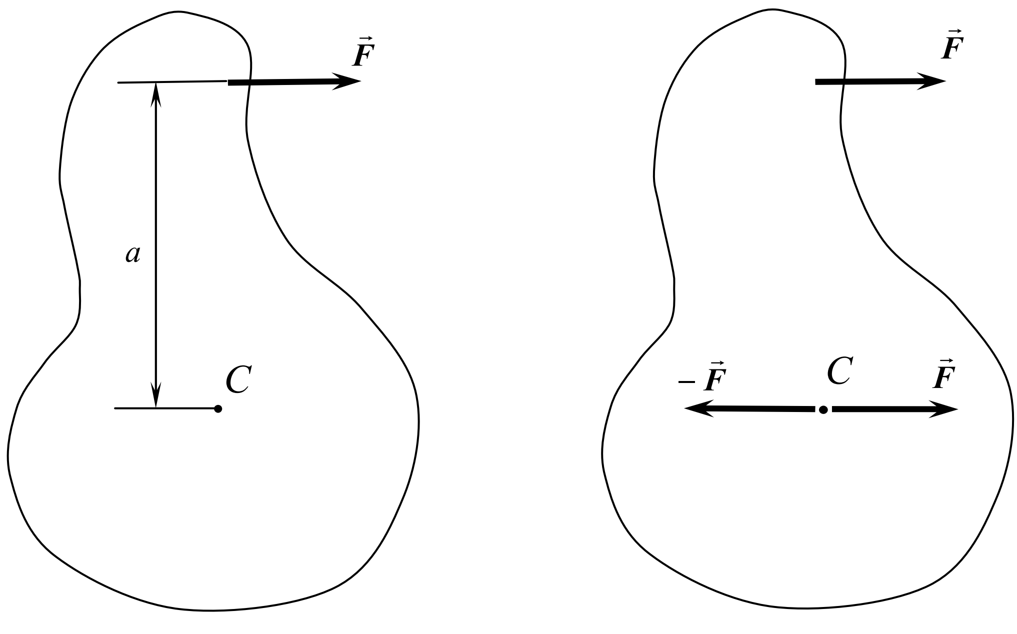
Может ли дорога подталкивать катящееся по ней колесо? Уточним вопрос. Может ли в случае, изображенном на рисунке, сила трения $\vec{F}_{тр}$ быть направленной туда же, куда и движущая сила $\vec{F}$?



Оказывается, может.

Качественно разобраться в ситуации поможет следующее рассуждение.

Пусть сила $\vec{F}$ приложена к свободному телу так, что ее линия действия проходит на некотором расстоянии a от центра масс C тела.



Приложив в центре масс C две прямопротивоположные силы $\vec{F}$ и $-\vec{F}$, увидим, что действие одной силы $\vec{F}$ эквивалентно действию такой же силы $\vec{F}$, приложенной в центре масс C, и пары сил с моментом $F \cdot a$. Если сила стремится перемещать тело ***поступательно*** (без поворотов), то пара вызывает ***вращение*** тела, при котором точки, лежащие ниже центра масс, получают движение, противоположное силе $\vec{F}$, причем тем большее, чем дальше от центра масс эти точки расположены. Суперпозиция (наложение) этих двух движений сообщит точкам тела, лежащим на достаточном удалении от центра масс внизу, движение влево, т.е. в сторону, противоположную действующей силе.

Если в одной из этих точек поместить связь, препятствующую этому движению, естественно ожидать, что ее реакция будет направлена в сторону действующей силы $\vec{F}$, т.е. реакция связи будет ускоряющей.

Точный количественный анализ ситуации не слишком сложен, но требует знакомства с общими теоремами механики.

Предположим, что рассматриваемый нами цилиндр имеет осесимметричное распределение массы и радиус инерции относительно оси цилиндра равен ρ. Тогда, применяя известную формулу для кинетической энергии T тела, совершающего плоскопараллельное движение, найдем

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\omega^2 = \frac{1}{2}m\left(1+\frac{\rho^2}{r^2}\right)v^2,$$

где m - масса цилиндра, v - скорость его центра масс (расположенного на оси цилиндра), r - его радиус, ω - его угловая скорость, равная линейной скорости какой-либо точки тела, деленной на расстояние от этой точки до мгновенного центра скоростей; мгновенный центр (точка, скорость которой равна нулю) находится при качении без скольжения в точке P касания цилиндра с неподвижной плоскостью.

Если ось цилиндра перемещается вправо на расстояние ds, то сила $\vec{F}$, линия действия которой проходит на высоте a над центром масс C, совершает работу

$$dA = F\frac{r+a}{r}ds = F\left(1+\frac{a}{r}\right)ds.$$

Согласно теореме об изменении кинетической энергии

$$dT = d\left[\frac{1}{2}m\left(1+\frac{\rho^2}{r^2}\right)v^2\right] = m\left(1+\frac{\rho^2}{r^2}\right)v\,dv = F\left(1+\frac{a}{r}\right)ds.$$

Разделив обе части на время dt, а затем сократив на скорость $v = \dfrac{ds}{dt}$, получим

$$m\left(1+\frac{\rho^2}{r^2}\right)w = F\left(1+\frac{a}{r}\right),$$

где $w = \dfrac{dv}{dt}$ - ускорение центра масс цилиндра. Отсюда

$$w = \frac{F}{m}\cdot\frac{1+\dfrac{a}{r}}{1+\dfrac{\rho^2}{r^2}}.$$

Из полученного соотношения видно, что при $a > \dfrac{\rho^2}{r}$ ускорение оси цилиндра будет больше, чем $\dfrac{F}{m}$, т.е. больше того ускорения, которое имела бы эта ось, если бы плоскость, на которой находится цилиндр, была бы идеально гладкой.

Например, если цилиндр однородный, то, как известно,

$$m\rho^2 = \frac{1}{2}mr^2 \Rightarrow \rho^2 = \frac{1}{2}r^2.$$

При $a = r$ (именно эта ситуация отражена на рисунке) ускорение оси цилиндра будет

$$w = \frac{F}{m}\cdot\frac{1+1}{1+0{,}5} = \frac{4}{3}\cdot\frac{F}{m},$$

откуда видно, что центр масс цилиндра ускоряется не силой F, а силой $\frac{4}{3}F$, т.е. сила трения равна $F_{mp} = \frac{1}{3}F$ и направлена в ту же сторону, что и $\vec{\boldsymbol{F}}$.