ГЛАВА I.

Теория векторов.

Наиболее отчетливый и гибкий алгорифм для выражения и математического исследования многих проблем механики (как и других физических теорий) представляет теория векторов. Вследствие этого мы в настоящей вводной главе изложим основные понятия и элементарные правила исчисления векторов[1]). Вместе с тем, читатель должен быть предупрежден, что рассуждения, которые развертываются в настоящем сочинении, предполагают отчетливое знакомство с общими курсами аналитической геометрии и анализа бесконечно-малых.

§ 1. Ориентированные отрезки и векторы.

1. Ориентированные отрезки. Точки прямолинейного *отрезка* с концами A и B (конечно, не совпадающими) можно мыслить расположенными либо в *сторону* от A к B, либо в сторону от B к A. Когда отрезку присвоена одна из сторон обращения, например от A к B, то он называется *ориентированным* и обозначается символом AB. Точка A называется *началом*, или *первой конечной точкой* отрезка, а B — *концом* (*свободным концом*), или

---

[1]) Настоящая глава действительно содержит краткое и отчетливое изложение тех элементов векторного исчисления, которыми авторы пользуются. При всем том читателю очень полезно ознакомиться с исчислением векторов более обстоятельно. Для этого на русском языке могут служить сочинения: 1) *Я. Дубнов*, Основы векторного исчисления, ч. I, Векторная алгебра, 2-е изд., Москва 1933; 2) *Я. Шпильрейн*, Векторное исчисление, Москва 1925; 3) *Я. Френкель*, Курс векторного исчисления с приложениями к механике, Москва 1925; 4) *Н. Е. Кочин*, Векториальное исчисление, 2-е изд., М.—Л. 1933. Для самого первого ознакомления с началами векторной алгебры подходят две главы в сочинении *Г. Филипс*, Диференциальное исчисление, Москва 1931. Из иностранных сочинений наиболее подходящими являются: 1) *C. Burali-Forti* et *R. Marcolongo*, Éléments du calcul vectoriel, Paris 1910; 2) *W. Ignatowsky*, Die Vektoranalysis, I—II, Leipzig 1921; 3) *A. Haas*, Vektoranalysis, Berlin 1924; 4) *J. Spielrein*, Lehrbuch der Vektor-Rechnung, Leipzig 1926; 5) *M. Lagally*, Vorlesungen über Vektor-Rechnung, Leipzig 1928. Последнее сочинение переводится на русский язык.

Векторное исчисление допускает как в обозначениях, так даже и в самом алгорифме различные схемы. В СССР Комиссией по стандартизации установлен стандарт векторных обозначений. Так как схема, которой придерживаются авторы настоящего сочинения, от этого стандарта отличается, то текст при переводе переработан и приведен в соответствие с нашим стандартом. (*Ред.*)

второй конечной точкой отрезка; прямая, на которой отрезок лежит, называется его *линией действия*[1]), или *прямой действия*.

Если тот же отрезок считать обращенным не от A к B, а в противоположную сторону — от B к A, то получим ориентированный отрезок BA, имеющий ту же прямую действия; но для него началом служит точка B, а концом A.

Если точки A и B совпадают, то отрезок AB сводится к единственной точке $A \equiv B$ и называется *нулевым отрезком*. Для нулевого отрезка как прямая действия, так и сторона обращения остаются неопределенными; это единственный случай, в котором противоположные отрезки AB и BA совпадают.

Таким образом ориентированный не нулевой отрезок AB представляет собой геометрический объект, который характеризуется *началом*, *длиной* (отношением отрезка, ограничиваемого точками A и B, к установленной единице), *направлением* и *стороной обращения*. Во избежание недоразумений следует указать, что под словом „направление“ мы разумеем общую характеристику как данной прямой, так и всех параллельных ей прямых, независимо от стороны обращения. Иными словами, два отрезка рассматриваются как имеющие то же направление, если они лежат на одной и той же прямой или на двух параллельных прямых, независимо от того, обращены ли они в одну и ту же или в противоположные стороны.

Для нулевого отрезка остаются неопределенными как линия действия и направление, так и сторона обращения.

2. Эквиполлентные ориентированные отрезки. Два ориентированные отрезка называются эквиполлентными[2]), если они имеют одну и ту же длину, одно и то же направление и обращены в одну и ту же сторону; в частности, это определение приводит к тому, что все нулевые отрезки нужно считать эквиполлентными, поскольку их направление и сторона обращения остаются одинаково неопределенными.

Эквиполлентность двух ориентированных отрезков по самому своему определению обладает основными свойствами равенства: 1) всякий отрезок эквиполлентен самому себе (*свойство рефлективности*); 2) если отрезок AB эквиполлентен отрезку $A'B'$, то отрезок $A'B'$ эквиполлентен AB (*свойство симметрии*); 3) два отрезка, эквиполлентные третьему, эквиполлентны между собой (*свойство транзитивности*).

Из определения эквиполлентности вытекает, далее, что эквиполлентные отрезки совпадают, если они имеют общее начало (или общий конец); вместе с тем, если заданы ориентированный отрезок AB и точка A', то всегда существует один и только один

---

[1]) Это наименование принадлежит авторам; оно имеет в виду механические применения, но широкого распространения не получило. (*Ред.*)

[2]) Авторы пользуются термином „эквиполлентность“, принадлежащим *Беллавитису* (*G. Bellavitis*, Methodo delle equipollenze, Padava 1837), которого заслуженно считают отцом векторного исчисления. Мы сохранили этот международный термин, которого отнюдь не следует отождествлять с понятием „эквивалентность“. (*Ред.*)

отрезок $A'B'$, эквиполлентный AB (и имеющий, следовательно, началом точку A').

Под *проекцией* ориентированного отрезка AB на заданную прямую или на заданную плоскость разумеют ориентированный отрезок AB_{11}, началом и концом которого соответственно служат ортогональные проекции начала A и конца B заданного отрезка на ту же прямую или плоскость. Совершенно ясно, что *два эквиполлентные ориентированные отрезка имеют эквиполлентные проекции на одну и ту же прямую* (или на две параллельные прямые) *и на одну и ту же плоскость* (или на две параллельные плоскости).

3. Векторы. Если задан ориентированный отрезок AB, то существует ∞^3 эквиполлентных ему отрезков, по одному для каждой точки пространства, принятой за начало; все эти отрезки имеют одинаковые длину, направление и сторону обращения. Объект, который можно привести в соответствие с этим классом ∞^3 ориентированных отрезков, называется *вектором*. Таким образом вектор представляет собой объект, который можно геометрически характеризовать длиной, направлением и стороной обращения прямолинейного отрезка (отвлекаясь, следовательно, от его начала)[1].

Чтобы индивидуализировать такой вектор, мы можем взять ориентированный отрезок AB или какой-либо из эквиполлентных ему отрезков точно так же, как для определения заданного направления мы можем воспользоваться любой из параллельных прямых, а для определения расположения плоскости можно воспользоваться любой из параллельных ей плоскостей.

В частности, все нулевые отрезки представляют один и тот же вектор, называемый *нулевым вектором*; длина этого вектора равна нулю, а его направление и сторона обращения остаются неопределенными. Всякий другой вектор имеет длину, отличную от нуля, и вполне определенное направление, как и сторону обращения.

Векторы обозначаются в печати буквами жирного шрифта, как, например, $\boldsymbol{v}$; только нулевой вектор обозначается просто нулем (0). Длина вектора $\boldsymbol{v}$, которую называют также *модулем*

[1]) В литературе по векторному исчислению нет единства в определении вектора. Различные точки зрения приводят, по существу, к двум основным определениям. Одни авторы, например Аппель (P. Appell), Бибербах (Bieberbach), Курант (R. Courant) и др., называют вектором просто ориентированный отрезок; другие, в том числе и авторы настоящего сочинения, разумеют под вектором величину (геометрическую, механическую, физическую), каждое значение которой *может быть отображено* некоторым ориентированным отрезком (как и любым эквиполлентным с ним отрезком). С этой последней точки зрения скорости, ускорения, силы суть векторы, индивидуально изображаемые ориентированными отрезками. Эта точка зрения в последнее время преобладает, а в сочинениях по механике и физике вполне доминирует. На этой точке зрения стоят и авторы настоящего сочинения. Тем не менее как авторы настоящего сочинения, так и другие сторонники последней точки зрения очень часто допускают выражения, которые более соответствуют первой, „геометрической“ точке зрения. Когда говорят: отложим от точки A данный вектор, — то это нужно понимать в том смысле, что мы построим ориентированный отрезок, изображающий данный индивидуальный вектор, принимая точку A за начало. Если давать себе в этом совершенно ясный отчет, то ни к каким недоразумениям эта фразеология привести не может. (*Ред.*)

или *тензором*[1]) вектора, обозначается символом mod $\boldsymbol{v}$ или $|\boldsymbol{v}|$, а еще проще той же буквой, которой обозначен вектор, но обыкновенного курсивного шрифта, например mod $\boldsymbol{v} = v$.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным*; можно сказать, что каждый единичный вектор устанавливает определенное ориентированное направление, и обратно.

Единичный вектор, имеющий то же направление и ту же сторону обращения, что и вектор $\boldsymbol{v}$, называется *версором* вектора $\boldsymbol{v}$ и обозначается символом vers $\boldsymbol{v}$.

Наконец, прибавим, что в противоположность векторам или векториальным величинам числа [относительные[2])] и величины, выражаемые такими числами, называются *скалярами*.

4. Ориентированные отрезки в качестве приложенных векторов Чтобы выделить один из ориентированных отрезков, которые могут представлять данный вектор $\boldsymbol{v}$, достаточно, как это отмечено в рубр. 2, указать его начало. Этот ориентированный отрезок AB обыкновенно называют также *вектором, приложенным в точке* A; в отличие от геометрического отрезка AB вектор $\overline{AB}$ мы будем отмечать чертой над буквенным его обозначением ($\overline{AB}$). Чтобы отметить не столько конечные точки отрезка, сколько начало A и самый вектор $\boldsymbol{v}$, его обозначают также символом $(A, \boldsymbol{v})$. По существу, то же достигается, конечно, и обозначением $\overline{AB}$; но обозначение $(A, \boldsymbol{v})$ подчеркивает, что отрезок, выходящий из точки A, отображает вектор $\boldsymbol{v}$[3]).

5. Равные векторы. Два вектора $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ называются *равными*, если они имеют ту же длину, то же направление и ту же сторону обращения; равные векторы могут быть, следовательно, отображены одним и тем же ориентированным отрезком. Можно сказать, что при равенстве векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ они, в сущности, представляют собой один и тот же вектор: равенство векторов как таковых сводится к их тождеству. Равенство в письме обозначается, как обычно, знаком $=$ $(\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2)$; таким образом знак равенства ставится для того, чтобы обозначить, что $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ выражают один и тот же вектор. Отсюда без дальнейших соображений ясно, что знак равенства при этом его употреблении обладает свойствами рефлективности, симметрии и транзитивности.

6. Составляющие вектора. Если спроектируем все (∞^3) ориентированные отрезки, эквиполлентные между собой и отображающие вектор $\boldsymbol{v}$, на все (∞^2) прямые одного и того же направления [или на все (∞^1) плоскости одного и того же расположения], то мы получим ∞^3 ориентированных эквиполлентных между собой отрезков, которые поэтому способны отобразить один и тот же вектор. Этот вектор называется *составляющей* данного вектора $\boldsymbol{v}$ по заданному направлению (или по заданному расположению плоскости).

---

[1]) Термин „тензор" в этом смысле в настоящее время совершенно выходит из употребления. (*Ред.*)

[2]) Т. е. положительные и отрицательные вещественные числа. (*Ред.*)

[3]) См. примечание на стр. 15. (*Ред.*)

Составляющая вектора $\boldsymbol{v}$, отличного от нуля, равна нулю в том, и только в том, случае, когда прямая или плоскость, проекцией на которую она выражается, перпендикулярна к вектору $\boldsymbol{v}$; составляющая же нулевого вектора всегда равна нулю, по какой бы прямой или плоскости она ни была взята.

Совершенно ясно, что *равные векторы имеют равные составляющие при любом направлении прямой или любом расположении плоскости проекций.*

7. **Численное выражение составляющей вектора по данному направлению.** Положим, что на данной прямой r фиксирована одна из двух сторон обращения (которая обозначается на чертеже стрелкой); иными словами, мы предположим, что r есть, как обыкновенно говорят, *ориентированная прямая.* Если при этом дан вектор $\boldsymbol{v}$, то мы возьмем *длину его составляющей* по направлению r и притом со знаком $+$ или $-$, смотря по тому, обращена ли эта составляющая в ту же сторону, что и прямая r, или в обратную. Полученное *число* с установленным таким образом знаком мы будем называть *компонентой вектора* $\boldsymbol{v}$ по ориентированному направлению r и будем обозначать его через v_r. Эта компонента не изменяется, если прямая r смещается параллельно самой себе, сохраняя сторону обращения; если сторону обратить, то число только меняет знак.

Фундаментальное значение имеет формула, выражающая v_r через длину v вектора $\boldsymbol{v}$ и угол $\widehat{r\boldsymbol{v}}$, который вектор $\boldsymbol{v}$ образует с ориентированной прямой r [1]). По известной теореме аналитической геометрии имеем:

$$v_r = v\cos\widehat{r\boldsymbol{v}} = v\cos\widehat{\boldsymbol{v}r}; \tag{1}$$

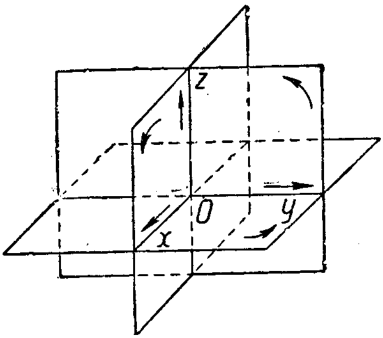
при этом полезно отметить, что формула (1) сохраняет силу и в том случае, когда $\boldsymbol{v}$ представляет собой нулевой вектор, ибо с левой стороны v_r в этом случае равняется нулю по определению, справа v также равно нулю, а $\cos\widehat{\boldsymbol{v}r}$ при неопределенности угла все же представляет собой конечную величину.

---

[1]) Из аналитической геометрии хорошо известно, что под *углом* $\widehat{r_1r_2}$ двух ориентированных прямых r_1 и r_2 разумеют угол, который содержится между 0 и π (включая и эти предельные значения) и образован двумя параллелями к прямым r_1 и r_2, проведенными из произвольной точки O и обращенными каждая в сторону соответствующей параллели r_1, r_2; следует при этом отметить, что это определение является законным, ибо охарактеризованный таким образом угол не зависит от выбора вспомогательной точки O. В случае ориентированной прямой r и вектора $\boldsymbol{v}$ (отличного от нуля) под углом $\widehat{r\boldsymbol{v}}$ разумеют угол, который прямая r образует с любой из ориентированных прямых (параллельных между собой и одинаково обращенных), имеющих направление и сторону обращения вектора $\boldsymbol{v}$; и, аналогично, под углом $\widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2}$ двух векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ (отличных от нуля) разумеют угол двух ориентированных прямых, имеющих направления и стороны обращения соответственно векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$.

Угол $\widehat{r\boldsymbol{v}}$ становится неопределенным, если вектор $\boldsymbol{v}$ обращается в нуль; точно так же неопределенным оказывается угол $\widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2}$, если обращаются в нуль один или оба вектора.

8. Декартов метод задания векторов. Фиксируем ортогональный триэдр декартовых координат $Oxyz$ (фиг. 1) и условимся раз навсегда, что три его оси должны иметь *расположение правостороннего вращения* (или правого винта); это значит: если будем представлять себе ориентированную ось z олицетворенной, то вращение ориентированной оси x, при котором она после поворота на $90°$ совпадет с ориентированной же осью y, должно происходить справа налево; отсюда следует, что в ту же сторону должно происходить вращение соответственно вокруг ориентированной оси x или y для совмещения после поворота на прямой угол оси y с осью z или оси z с осью x. Здесь важно указать, что в дальнейшем мы всегда будем называть вращение относительно любой ориентированной оси *правосторонним*, если наблюдатель, обращенный головой в сторону этой оси, видит вращение происходящим справа налево; так, это имеет место в указанных вращениях вокруг осей x, y, z. Естественно, что вращение в противоположную сторону мы будем называть *левосторонним*; точно так же мы будем называть *левосторонним* ортогональный триэдр, симметричный правостороннему, а потому на таковой не наложимый. Такой симметричный триэдр мы получим, если обратим в противоположную сторону одну из осей или все три оси.



Фиг. 1.

Что касается самых названий „правосторонний“ и „левосторонний“ триэдр, то они ведут свое начало от того, что большой, указательный и средний пальцы соответственно правой или левой руки в том порядке, как мы их называем, как бы осуществляют такой правосторонний или левосторонний триэдр.

Заметим еще, что правостороннее вращение происходит для наблюдателя, стоящего по оси вращения (это значит, ось вращения, проходя через его туловище, обращена от ног к голове), в сторону, обратную движению часовой стрелки.

После этих соображений возвратимся к правостороннему триэдру $Oxyz$, который мы выбрали для установления системы декартовых координат. Так как для геометрического определения вектора $\boldsymbol{v}$ достаточно задать ориентированный отрезок AB (произвольно выбранный из ∞^3 отрезков, имеющих ту же длину, то же направление и ту же сторону обращения, что и вектор $\boldsymbol{v}$), то здесь будет достаточно задать координаты x', y', z' и x'', y'', z'' начала A и конца B этого отрезка. Если теперь обозначим через v_x, v_y, v_z компоненты вектора $\boldsymbol{v}$ по осям (как частные случаи компоненты v_r, о которой шла речь в предыдущей рубрике), то, как известно из аналитической геометрии,

$$v_x = x'' - x', \quad v_y = y'' - y', \quad v_z = z'' - z'. \tag{2}$$

С другой стороны, если через α, β, γ обозначим направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{v}$, то по формуле (1):

$$v_x = v\alpha, \quad v_y = v\beta, \quad v_z = v\gamma. \tag{3}$$

Две группы формул (2) и (3) непосредственно обнаруживают, что компоненты вектора по осям дают все характерные для него элементы.

В самом деле, из формулы (3) вытекает выражение для длины отрезка AB или вектора $\boldsymbol{v}$:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \tag{4}$$

где радикал нужно понимать в арифметическом его значении. Из этого выражения явствует, что v обращается в нуль в том, и только в том случае, если все три компоненты v_x, v_y, v_z обращаются совместно в нуль. Если мы исключим этот случай, соответствующий нулевому вектору, то ориентированное направление вектора $\boldsymbol{v}$, определяемое соответствующими направляющими косинусами, устанавливается формулами:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{v_x}{v} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}, \\ \beta &= \frac{v_y}{v} = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}, \\ \gamma &= \frac{v_z}{v} = \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

отсюда, в частности, вытекает, что *компоненты версора* (т. е. единичного вектора, $v = 1$) *совпадают с его направляющими косинусами.*

В общем из формул (2)—(5) явствует, что между векторами в пространстве и тернами (тройками) чисел v_x, v_y, v_z — их компонентами по осям — существует двуоднозначная зависимость[1]); это дает основание называть компоненты вектора также его *координатами* [2]).

В заключение здесь будет еще целесообразно указать две формулы, столь же очевидные, как и важные. Если ориентированная прямая r задана своими направляющими косинусами α_1, β_1, γ_1, то для компоненты v_r, по хорошо известной теореме из теории проекций, имеет место соотношение:

$$v_r = v_x\alpha_1 + v_y\beta_1 + v_z\gamma_1. \tag{6}$$

---

[1]) Смысл термина „двуоднозначная зависимость“ заключается в том, что по данному вектору $\boldsymbol{v}$ определяются его компоненты v_x, v_y, v_z и, обратно, числами v_x, v_y, v_z определяется вектор $\boldsymbol{v}$.

[2]) Некоторые авторы называют *компонентами* самые векторы, представляющие собой проекции вектора $\boldsymbol{v}$ на оси координат, а численные их значения v_x, v_y, v_z — *координатами* вектора. Принципиально эта терминология более целесообразна. Но термин „компоненты“ в том их значении, которое принято в тексте, получил широкое распространение; поэтому авторы решили его в этом именно значении сохранить, хотя и не считают его удачным (они это указывают в первом издании). (*Ред.*)

9. Наконец, если $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ суть два вектора, отличные от нуля, X_1, Y_1, Z_1 — компоненты первого, X_2, Y_2, Z_2 — компоненты второго вектора, а $\widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2}$ — угол между этими векторами, то в силу соотношения (5), с одной стороны, и хорошо известного из аналитической геометрии выражения для косинуса угла между двумя ориентированными прямыми, с другой стороны, получаем соотношение:

$$\cos \widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{v_1v_2}. \tag{7}$$

10. Изменение осей координат. Положим, что нам нужно выполнить преобразование координат, взяв новый ортогональный триэдр $\Omega\xi\eta\zeta$, оси которого определяются своими направляющими косинусами по таблице

	x	y	z
ξ	α_1	α_2	α_3
η	β_1	β_2	β_3
ζ	γ_1	γ_2	γ_3

Как известно, эти девять косинусов связаны шестью уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_h^2 + \beta_h^2 + \gamma_h^2 = 1 \quad (h = 1,\ 2,\ 3), \\ &\alpha_h\alpha_k + \beta_h\beta_k + \gamma_h\gamma_k = 0 \quad (h = 1,\ 2,\ 3;\ k = 1,\ 2,\ 3;\ h \neq k); \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

эти уравнения могут быть заменены шестью другими, которые получаются таким же путем, если в предыдущей таблице заменим горизонтали вертикалями. Как известно, эти уравнения выражают тот факт, что элементы каждой горизонтали или вертикали суть направляющие косинусы ориентированной прямой (оси одного триэдра, отнесенной к другому триэдру) и что оси каждого триэдра попарно взаимно перпендикулярны. Напомним еще, что определитель девяти косинусов, — если оси второго триэдра, как мы это всегда предполагаем, также имеют правостороннее расположение, — равен единице; каждый же элемент этого определителя равен своему минору (или алгебраическому дополнению):

$$\alpha_1 = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2, \quad \alpha_2 = \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3, \quad \alpha_3 = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 \text{ и т. д.}$$ [1]).

После этих указаний, которые окажутся полезными впоследствии, возьмем вновь вектор $\boldsymbol{v}$ с компонентами X, Y, Z, относящимися к триэдру Oxy, и обозначим через Ξ, H, Z его компоненты по осям ξ, η, ζ. В силу общего соотношения (6) мы получаем следующие формулы преобразования:

$$\begin{array}{l|l} \Xi = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z & X = \alpha_1 \Xi + \beta_1 \mathrm{H} + \gamma_1 \mathrm{Z} \\ \mathrm{H} = \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z & Y = \alpha_2 \Xi + \beta_2 \mathrm{H} + \gamma_2 \mathrm{Z} \\ \mathrm{Z} = \gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z & Z = \alpha_3 \Xi + \beta_3 \mathrm{H} + \gamma_3 \mathrm{Z} \end{array}$$

[1]) Так как эти предложения имеют коренное значение, то мы посвящаем их выяснению и доказательству приложение II, которое полезно прочесть непосредственно после этого текста. (*Ред.*)

Как это можно было, конечно, предвидеть, формулы преобразования компонент одного и того же вектора при переходе от одного координатного триэдра к другому, зависят только от расположения осей нового триэдра относительно первоначального, а не от перенесения начала координат.

2. Сложение и вычитание векторов. Произведение вектора на число.

11. Полигонирование и центрирование векторов. Положим, что нам дано несколько векторов $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$, которые изображаются ориентированными отрезками $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ (фиг. 2). Из произвольной точки P проведем ориентированный отрезок PP_1, эквиполлентный A_1B_1. Из конца P_1 этого отрезка проведем ориентированный отрезок P_1P_2, эквиполлентный A_2B_2; из конца P_2 этого отрезка проведем отрезок P_2P_3, эквиполлентный A_3B_3, и т. д. Это приведет нас в результате к отрезку $P_{n-1}P_n$, эквиполлентному A_nB_n. Это построение называется *полигонированием* отрезков $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ в порядке их задания. Так как, однако, полигон, который мы таким образом получаем, не меняется, если мы любой отрезок A_iB_i заменяем эквиполлентным отрезком $A_i'B_i'$, то все построение определяется, по существу, не столько ориентированными отрезками $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$, сколько самыми векторами $v_1, v_2, \ldots, v_n$; поэтому процесс этот называется проще *полигонированием* векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Если компоненты вектора v_i обозначим через X_i, Y_i, Z_i, координаты точки P — через x, y, z, а координаты точки P_i — через x_i, y_i, z_i, то ясно, что

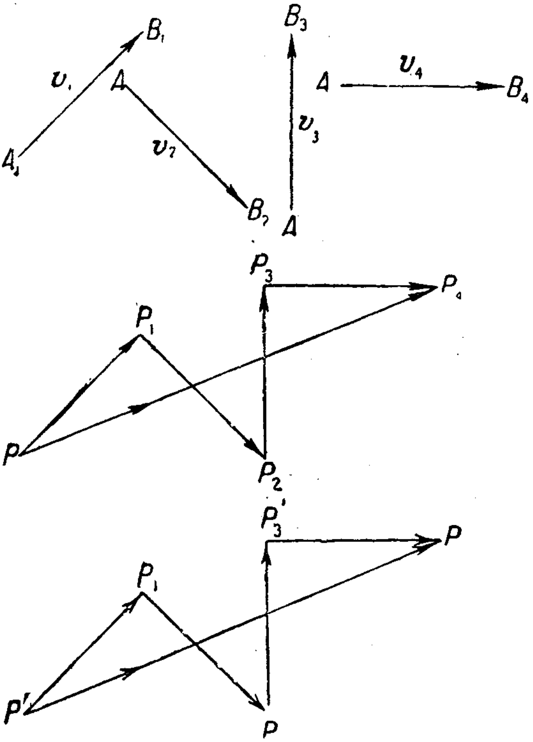
$$\left.\begin{array}{lll}
x_1 = x + X_1, & y_1 = y + Y_1, & z_1 = z + Z_1, \\
x_2 = x_1 + X_2, & y_2 = y_1 + Y_2, & z_2 = z_1 + Z_2, \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
x_n = x_{n-1} + X_n, & y_n = y_{n-1} + Y_n, & z_n = z_{n-1} + Z_n.
\end{array}\right\} \quad (9)$$

Отсюда

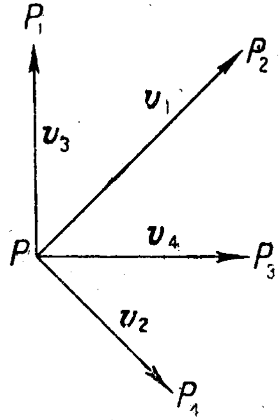
$$\left.\begin{array}{l}
x_n = x + X_1 + X_2 + \ldots + X_n = x + \sum_1^n {}_i X_i, \\
y_n = y + Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = y + \sum_1^n {}_i Y_i, \\
z_n = z + Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = z + \sum_1^n {}_i Z_i.
\end{array}\right\} \quad (9a)$$

Здесь суммирование распространяется на значения индекса i от 1 до n, как это и указано при знаке $\sum_i$.

Если все ориентированные отрезки $A_1B_1, \ldots, A_nB_n$ заменить эквиполлентными, исходя не от последовательно получаемых точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$, а от общей начальной точки P (фиг. 3), т. е. если при общей точке P, как начале, построим ориентированные отрезки $PP_1, PP_2, \ldots, PP_n$, изображающие заданные векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, то этот процесс называется *центрированием* данных векторов. Если векторы при центрировании располагаются в одной плоскости, то они называются *компланарными*; иначе говоря, компланарными называются векторы, параллельные одной плоскости. Если векторы при центрировании располагаются на одной прямой, то они называются *коллинеарными*; иначе говоря, коллинеарными называются векторы, параллельные одной и той же прямой, независимо от того, обращены ли они в одну и ту же или в различные стороны. Нулевой вектор, не имеющий определенного направления, можно считать коллинеарным с любым другим вектором и компланарным с любыми двумя векторами.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

12. Сумма векторов [1]. Положим, что нам даны векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$. Если мы их полигонируем, исходя один раз от точки P, другой раз от точки P' (как на нашем чертеже), то самые простые соображения обнаруживают, что ориентированные отрезки PP_n и $P'P_n'$, идущие в том и другом случае от

[1]) Учение о сложении векторов авторы в отличие от нашего стандарта излагают по идеям Грасмана; здесь оно приведено в соответствии с союзным стандартом. См. приложение II. (*Ред.*)

начальной точки P или P' к последней конечной точке P_n или P_n', эквиполлентны между собой, а потому могут быть рассматриваемы как изображения одного и того же вектора v; этот вектор называют *суммой* или *результирующей* векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ и обозначают это, как в случае алгебраической суммы:

$$\overline{PP}_n = v = v_1 + v_2 + \ldots + v_n. \tag{10}$$

Векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ называются по отношению к вектору v *слагаемыми* или *слагающими*.

Таким образом, *чтобы сложить несколько векторов* (т. е. построить их сумму), *нужно их полигонировать, исходя от любой начальной точки P, и замкнуть получающийся полигон ориентированным отрезком, идущим от начальной точки полигона P к конечной его точке P_n; ориентированный отрезок $\overline{PP}_n$ изобразит вектор, представляющий собою сумму заданных векторов (в порядке их задания).*

13. Сумма векторов обладает свойствами коммутативности и ассоциативности. Чтобы проще всего доказать это предложение, заметим, что компоненты вектора v, при обозначениях рубр. **11**; выразятся [см. (9)] тремя разностями:

$$x_n - x, y_n - y, z_n - z.$$

Если поэтому обозначим координаты суммы v через X, Y, Z, то в силу соотношений (10):

$$X = \sum_1^n {}_i X_i, \quad Y = \sum_1^n {}_i Y_i, \quad Z = \sum_1^n {}_i Z_i. \tag{11}$$

Эти же равенства непосредственно устанавливают формулированное выше предложение; это вряд ли нуждается в дальнейшем пояснении.

14. Соотношения (11) допускают обобщение столь же простое, как и важное. Если дано какое-либо ориентированное направление, то любую из координатных осей можно направить по этому направлению, и тогда соответствующее равенство (11) приводит к следующему более общему выводу: *компонента суммы нескольких векторов по любому направлению равна сумме компонент слагаемых векторов по тому же направлению.*

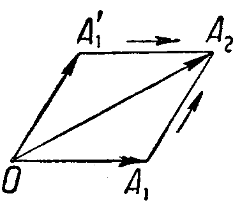
Отсюда вытекает еще следующий вывод: *проекция суммы нескольких векторов на любое направление совпадает с суммой проекций слагаемых векторов на то же направление.*

Это свойство остается в силе и в случае проектирования вектора на заданную плоскость. Чтобы это обнаружить, достаточно принять эту плоскость за одну из координатных плоскостей, скажем, за плоскость xy. Тогда компоненты вектора v_i будут иметь значения X_i, Y_i, Z_i, а компоненты результирующего вектора (суммы) — X, Y, где X и Y попрежнему определяются первыми двумя равенствами (11); а эти равенства и обнаруживают, что *проекция результирующего вектора (суммы) совпадает с результирующей (или суммой) проекций слагаемых векторов.*

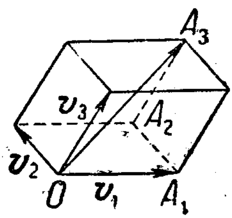
15. В случае двух векторов v_1, v_2 их результирующая

$$v_1 + v_2 = v_2 + v_1$$

выражается диагональю OA_2 параллелограма $OA_1A_2A_1'$, который получается, если мы центрируем данные векторы в точке O и полученные два отрезка дополним до параллелограма (фиг. 4); в самом деле, ориентированный отрезок OA_2 можно рассматривать, как замыкающий полигон OA_1A_2 (или $OA_1'A_2$), стороны которого изображают векторы v_1 и v_2 (или v_2 и v_1). Самый этот параллелограм или любой другой с эквиполлентными сторонами, построенный при другом начале центрирования, называется *параллелограмом данных двух векторов.*



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Точно так же для трех некомпланарных (т. е. не параллельных одной и той же плоскости, см. рубр. **11**) векторов v_1, v_2, v_3 результирующий вектор

$$v_1 + v_2 + v_3 = v_2 + v_3 + v_1 = v_3 + v_1 + v_2 = v_3 + v_2 + v_1 = \\ = v_1 + v_3 + v_2 = v_2 + v_1 + v_3$$

выражается диагональю параллелепипеда, построенного на данных трех векторах (т. е. имеющего эти три вектора своими ребрами, фиг. 5).

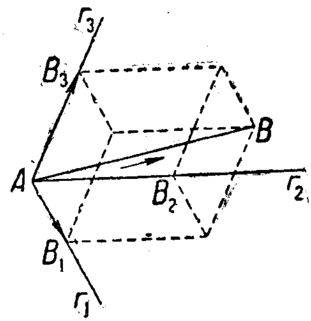
16. Разложение вектора на слагающие векторы. Совершенно ясно, что любой вектор v можно себе представить разложенным бесчисленным множеством различных способов на сумму произвольного числа (слагающих или слагаемых) векторов. В самом деле, если вектор v изображен ориентированным отрезком AB, и A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1} суть произвольно выбранные $n-1$ точек, то

$$\overline{AB} = \overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \ldots + \overline{A_{n-1}B}.$$

Но некоторые из этих многообразных разложений находят себе применение особенно часто; на них мы остановимся подробно.

Прежде всего предположим, что нам даны три некомпланарные (т. е. не параллельные одной и той же плоскости) направления r_1, r_2, r_3. Через произвольную точку A проведем отрезок AB, представляющий вектор v, и три прямые, имеющие направление r_1, r_2, r_3 (фиг. 6). Далее, через точку B проведем плоскости, параллельные плоскостям r_2r_3, r_3r_1, r_1r_2, которые пересекут прямые r_1, r_2, r_3 в точках B_1, B_2, B_3. Теперь три пары плоскостей определят параллелепипед, в котором отрезок AB служит диагональю; ребра же его AB_1, AB_2, AB_3 определяют слагающие векторы таким образом, что

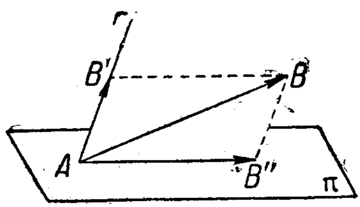
$$v = \overline{AB_1} + \overline{AB_2} + \overline{AB_3}.$$



Фиг. 6.

Таким образом *каждый вектор может быть однозначно разложен на три слагающие вектора по данным трем некомпланарным направлениям*; однозначность разложения непосредственно вытекает из построения. Эти три слагающие часто называют также *слагающими* вектора v по заданным трем направлениям.

Совершенно ясно, что одна из этих трех слагающих обращается в нуль в том, и только в том, случае, если вектор v компланарен с двумя из заданных трех направлений; две слагающие исчезают, когда вектор v *коллинеарен* с одним из этих трех направлений (т. е. параллелен прямым, имеющим это направление).



Фиг. 7.

Теперь в качестве второго, весьма часто встречающегося, разложения приведем следующее. Положим, что нам даны направления прямой и плоскости[1]), по которым нужно произвести разложение вектора.

Через начальную точку A данного вектора проводим прямую r заданного направления и плоскость π, также заданного направления (фиг. 7). Теперь через конечную точку B нашего вектора проводим плоскость, параллельную π, до пересечения с прямой r в точке B' и прямую, параллельную r, до пересечения с плоскостью π в точке B''. Четырехугольник $AB'BB''$

[1]) Когда говорят о направлении прямой, то разумеют геометрический признак, принадлежащий всем параллельным между собою прямым и отличающий их от других (им не параллельных) прямых. В оригинале настоящего сочинения авторы выражают его словом direzione. По аналогии, авторы систематически говорят и о направлении или расположении плоскости, также разумея под этим геометрический признак, принадлежащий совокупности параллельных плоскостей и отличающий их от других (им не параллельных) плоскостей. Авторы пользуются для выражения этого понятия термином giacitura (собственно „расположение", giacere — лежать). В настоящем переводе понятие это передается либо термином „направление плоскости", либо, где это уместнее, термином двумерное направление". (*Ред.*)

представляет собою параллелограм, имеющий диагональю отрезок AB, а сторонами AB' и AB''; вместе с тем

$$v = \overline{AB} = \overline{AB'} + \overline{AB''}.$$

Векторы $\overline{AB'}$ и $\overline{AB''}$ называются *слагающими* вектора v по направлению прямой r и направлению плоскости π.

17. Произведение вектора на число. Если v есть данный вектор, а n — данное целое положительное число, то сумма n векторов, равных v, есть, по определению, вектор, имеющий то же направление и ту же сторону обращения, что и вектор v; длина же его равна nv. Этот вектор называется произведением вектора v на целое число n и обозначается через nv.

В обобщение этого называют *произведением вектора* на *любое вещественное число* a вектор, имеющий длину $|a|v$, то же направление, что и вектор v, и обращенный в ту же сторону, что и v, если a есть число положительное, и в противоположную сторону, если a есть число отрицательное. Это произведение обозначается символами av или va — безразлично. По самому определению произведение av обращается в нуль только в том случае, если обращается в нуль либо вектор v, либо число a (либо, конечно, a и v совместно). Таким образом вектор av всегда коллинеарен с вектором v.

Обратно, если вектор v' коллинеарен с вектором v и последний отличен от нуля, то всегда существует одно, и только одно, вещественное число a, при котором

$$v' = av; \tag{12}$$

абсолютная величина этого числа равна отношению длин $\frac{v'}{v}$; оно должно иметь знак $+$, если вектор v' обращен в ту же сторону, что и v, и знак $-$, если он обращен в противоположную сторону; если $v' = 0$, то $a = 0$. Предыдущее равенство выражает, таким образом, условие, необходимое и достаточное для того, чтобы вектор v' был коллинеарен с v. Так как, однако, это условие предполагает, что $v \neq 0$, и ставит вектор v' в несколько иное положение, чем v, то ему придают более симметричную и более общую форму, исключающую всякие изъятия: *для того чтобы два вектора v_1 и v_2 были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы существовали два числа a_1 и a_2, из которых, по крайней мере, одно отлично от нуля и при которых*

$$a_1v_1 + a_2v_2 = 0. \tag{12a}$$

Если, скажем, $a_1 \neq 0$, то мы разрешим это уравнение относительно v_1, и оно примет прежнюю форму (12).

Остановимся еще на простейших частных случаях. Если в формуле (12) $a = -1$, то умножение приводит к вектору $(-1)\,v$, имеющему ту же длину и то же направление, что и v, но обращенному в противоположную сторону; такой вектор называют *противоположным* вектору $\boldsymbol{v}$ и обозначают просто символом $-\boldsymbol{v}$.

В силу предыдущего определения для каждого вектора

$$\boldsymbol{v} = v \operatorname{vers} \boldsymbol{v}.$$

Кроме того, если вектор $\boldsymbol{v}$ имеет по отношению к какой-либо системе координат компоненты X, Y, Z, то вектор $a\boldsymbol{v}$ имеет компоненты aX, aY, aZ.

Для произведения вектора на число имеют место тождества:

$$a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{v} = (a+b)\boldsymbol{v}, \quad a(b\boldsymbol{v}) = ab\boldsymbol{v}, \quad a\boldsymbol{v}_1 + a\boldsymbol{v}_2 = a(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2).$$

Доказательство первых двух из этих тождеств непосредственно ясно; что касается третьего, то его, конечно, было бы нетрудно провести на основании определения предыдущей рубрики; но это можно сделать проще, если обнаружить, что векторы, занимающие обе части равенства, имеют одинаковые компоненты по любой оси[1]).

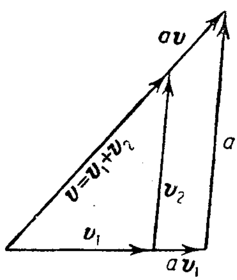
18. Комбинируя определение произведения вектора на число с определением суммы любого числа векторов, мы видим, что любое линейное выражение вида $\sum_1^n {}_i a_i \boldsymbol{v}_i$ представляет собою определенный вектор; его компоненты имеют значения:

$$\sum_1^n {}_i a_i X_i, \quad \sum_1^n {}_i a_i Y_i, \quad \sum_1^n {}_i a_i Z_i.$$

Остановимся на случае $n=2$. Мы уже видели выше, что при надлежащих значениях числа a_1 и a_2 вектор

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 \tag{13}$$

обращается в нуль, когда векторы $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ коллинеарны. Если векторы $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ не коллинеарны, то они совместно определяют некоторое двумерное направление, а при центрировании — плоскость этого направления. Ясно, что в этой плоскости лежат также векторы $a_1\boldsymbol{v}_1$ и $a_2\boldsymbol{v}_2$, а также их сумма $\boldsymbol{v}$ (13). Итак, вектор, определяемый линейным выражением (13), компланарен с векторами $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$. Обратно, если вектор $\boldsymbol{v}$ компланарен с двумя неколлинеарными векторами $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, то он разлагается на два слагающие вектора по направлениям $\boldsymbol{v}_1$



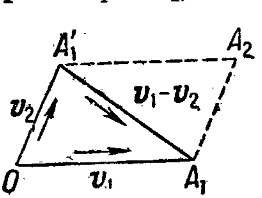
Фиг. 8.

[1]) Все-таки очень поучительно уяснить себе и геометрический смысл третьего равенства. Векторы $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ при полигонировании приводят к треугольнику, третьей стороной которого служит их сумма $\boldsymbol{v}$ (фиг. 8). Составив произведения $a\boldsymbol{v}_1$ и $a\boldsymbol{v}_2$ и полигонируя их, мы получим треугольник, подобный первому; третья его сторона представит поэтому вектор $a\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v}_1 + a\boldsymbol{v}_2$.

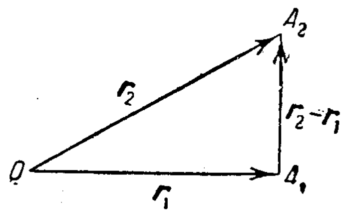
и v_2; эти слагающие по формуле (13) выражаются произведениями $a_1 v_1$ и $a_2 v_2$ с надлежащими коэфициентами a_1 и a_2, а поэтому вектор v может быть представлен линейным выражением (13). Соотношение (13) представляет собою, таким образом, условие, необходимое и достаточное для того, чтобы вектор v был компланарен с двумя неколлинеарными векторами v_1 и v_2. В более общей форме, не имеющей никаких изъятий, это предложение выражают еще так: *для того чтобы три вектора v_1, v_2, v_3 были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы существовали три числа a_1, a_2, a_3, не обращающиеся совместно в нуль, при которых*

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0. \qquad (12b)$$

Очень важным частным случаем вектора, компланарного с векторами v_1 и v_2, является их *разность* $v_1 - v_2$, т. е. вектор,



Фиг. 9.



Фиг. 10.

сложение которого с вектором v_2 дает вектор v_1; он изображается второй диагональю $A_1'A_1$ параллелограма $OA_1A_2A_1'$, построенного на векторах v_1 и v_2 (фиг. 9); точнее: чтобы построить разность $v_1 - v_2$ векторов v_1 и v_2, можно поступить следующим образом: *центрировать оба вектора при произвольной точке O и построить вектор, идущий от конца вектора v_2 (вычитаемого) к концу вектора v_1.*

В тесной связи с этим стоит соотношение между вектором и радиусами-векторами его концов. Часто бывает целесообразно определять положение любой точки пространства A векторными средствами относительно некоторой фиксированной точки O — *начала*, играющего здесь ту же роль, что и начало координат в аналитической геометрии. Вектор r, идущий от начала O к точке A [1]), называется *радиусом-вектором* точки A. При фиксированном начале положение точки вполне определяется ее радиусом-вектором. Любой вектор A_1A_2 всегда равен разности радиусов-векторов конца (r_2) и начала (r_1) отрезка A_1A_2, изображающего этот вектор (фиг. 10):

$$v = \overline{A_1A_2} = \overline{OA_2} - \overline{OA_1} = r_2 - r_1.$$

В заключение заметим, что все правила буквенного исчисления с относительными числами (имеющими знак + или —),

[1]) Полагаем, что такого рода сокращенное выражение, вместо которого, следовало бы сказать „вектор, изображаемый ориентированным отрезком, идущим от начала O к точке A“, — уже не может смутить читателя. (*Ред.*)

относящиеся к преобразованию суммы или разности алгебраических многочленов, к умножению многочлена на число, к приведению подобных членов, применяются без изменений к векториальным выражениям вида $\sum a_i \boldsymbol{v}_i$. Это вытекает из предложений рубр. 13, а также из определений и тождеств, установленных в рубр. 15.

19. Разложение векторов приводит к очень важному способу выражения вектора. Если O есть начало осей координат, X, Y, Z — компоненты вектора $\boldsymbol{v}$ относительно этих осей, то мы можем разложить вектор $\boldsymbol{v}$ на слагающие по этим осям, причем X, Y, Z будут численные значения этих слагающих (взятые с надлежащими знаками). Если мы приложим вектор $\boldsymbol{v}$ к началу O, то концом его будет служить точка Q с координатами X, Y, Z; если обозначим через Q_1, Q_2, Q_3 проекции точки Q на три оси, то будем иметь (рубр. 13):

$$\boldsymbol{v} = \overline{OQ} = \overline{OQ_1} + \overline{OQ_2} + \overline{OQ_3}.$$

Теперь обозначим через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ три единичных вектора, которые имеют каждый направление и сторону обращения соответствующей ориентированной оси x, y, z; эти три единичных вектора называются *основными версорами* установленного координатного триэдра. В силу соотношения (12):

$$\overline{OQ_1} = X\boldsymbol{i}, \quad \overline{OQ_2} = Y\boldsymbol{j}, \quad \overline{OQ_3} = Z\boldsymbol{k}.$$

Отсюда получаем выражение:

$$\boldsymbol{v} = \overline{OQ} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k},$$

играющее в векторном исчислении коренную роль, как векторно-координатное задание данного вектора.

В тесной связи с этим находится соотношение, которым в дальнейшем придется пользоваться очень часто. Пусть x, y, z будут координаты произвольной точки P. Эти же числа служат компонентами радиуса-вектора $\overline{OP}$ точки P. Поэтому

$$\overline{OP} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \tag{14}$$

3. Скалярное произведение и векторное произведение двух векторов.

20. Скалярное произведение. Если даны два вектора $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, отличные от нуля, то под *скалярным произведением* их разумеют число $v_1 v_2 \cos \widehat{\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2}$, т. е. произведение длин этих векторов на косинус образуемого ими угла. Так как это произведение стремится к нулю, когда один из двух векторов или оба вместе стремятся к нулю (в каковом случае угол между векторами становится неопределенным), целесообразно приписать скалярному произведению значение нуль в том случае, когда, по крайней мере, один из этих векторов равен нулю.

В том и другом случае скалярное произведение вектора $\boldsymbol{v}_1$ на вектор $\boldsymbol{v}_2$ обозначается через $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ (читается: $\boldsymbol{v}_1$ скалярно на $\boldsymbol{v}_2$).

Если через X_1, Y_1, Z_1 и X_2, Y_2, Z_2 обозначим компоненты векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, то из соотношения (7) непосредственно вытекает следующее формальное выражение скалярного произведения:

$$\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2 = v_1 v_2 \cos(\widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2}) = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2; \tag{15}$$

следует также отметить, что эта формула остается в силе и тогда, когда один из двух векторов или даже оба обращаются в нуль: в этом случае как правая, так и левая части равенства (15) обращаются в нуль.

Из предыдущих определений следует, что скалярное произведение $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ обращается в нуль в том, и только в том, случае, если заданные векторы взаимно перпендикулярны или же, по крайней мере, один из них равен нулю. Иными словами, если векторы $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ отличны от нуля, то исчезновение их скалярного произведения $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ есть необходимое и достаточное условие их перпендикулярности. Вследствие этого, если оказывается, что скалярное произведение вектора $\boldsymbol{v}_1$ на *любой* другой вектор $\boldsymbol{v}_2$ равно нулю, то отсюда можно заключить, что $\boldsymbol{v}_1 = 0$; в самом деле, в противном случае достаточно было бы взять за $\boldsymbol{v}_2$ вектор, отличный от нуля и не перпендикулярный к $\boldsymbol{v}_1$, чтобы произведение $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ оказалось отличным от нуля.

Если векторы $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ отличны от нуля, то произведение $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ имеет положительное или отрицательное значение в зависимости от того, образуют ли эти векторы острый или тупой угол.

Произведение $\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}$ вектора на самого себя, которое обыкновенно обозначают короче через $\boldsymbol{v}^2$, совпадает с квадратом длины вектора v^2 (так как $\widehat{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}} = 0$); поэтому условие $\boldsymbol{v}^2 = 1$ характеризует единичный вектор.

В частности, основные версоры ортогонального координатного триэдра характеризуются шестью соотношениями:

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = 1, \qquad \boldsymbol{ik} = \boldsymbol{ki} = \boldsymbol{kj} = 0. \tag{16}$$

Выражение $v_1 v_2 \cos \widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2}$ для скалярного произведения $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ обнаруживает, что его можно рассматривать как *произведение* (алгебраическое) *длины одного вектора на компоненту другого вектора по направлению первого.*

Сделаем еще одно важное замечание. Если мы возьмем за ось проекций направление вектора $\boldsymbol{v}_1$, но обращенное в противоположную сторону, то компоненты векторов на это направление будут:

$$-v_1 \quad \text{и} \quad -v_2 \cos \widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2}.$$

Вследствие этого тождество

$$\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2 = (-v_1)(-v_2 \cos \widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2})$$

обнаруживает, что *скалярное произведение двух векторов равно произведению* (*алгебраическому*) *их компонент по линии действия* (рубр. 1) *одного из них, в какую бы сторону оно ни было ориентировано* (но, конечно, одинаково при проектировании обоих векторов).

Наконец, небесполезно будет четко отметить, что *скалярное произведение* $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$ *какого угодно вектора* $\boldsymbol{v}$ *на единичный вектор* $\boldsymbol{u}$ *представляет в векторной форме компоненту вектора* $\boldsymbol{v}$ *по ориентированному направлению* $\boldsymbol{u}$; это непосредственно вытекает из сопоставления формул (15) и (1).

21. Как из определения скалярного произведения, так и из выражения его в компонентах (15) непосредственно вытекает, что для скалярного произведения имеет место свойство коммутативности:

$$\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_1; \tag{16a}$$

между тем свойство ассоциативности в этом случае отпадает. В самом деле, так как $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ есть скаляр, то о скалярном произведении вектора $\boldsymbol{v}_3$ на $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ не может быть речи.

Но зато остается в силе свойство дистрибутивности по отношению к сумме векторов:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)=\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_2. \tag{16b}$$

Чтобы это обнаружить, покажем прежде всего, что имеет место тождество:

$$\operatorname{vers}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)=\operatorname{vers}\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}_1+\operatorname{vers}\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}_2\ ^{1}).$$

В самом деле, так как $\operatorname{vers}\boldsymbol{v}$ есть единичный вектор, то это равенство выражает только, что компонента суммы $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$ на ориентированное направление вектора $\boldsymbol{v}$ равна сумме компонент слагающих векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ на то же направление. Теперь достаточно помножить обе части последнего равенства на v, чтобы получить соотношение (16b).

В результате этого для скалярного произведения остаются в силе правила обыкновенного алгебраического умножения, основанные на свойствах коммутативности и дистрибутивности. В частности, перемножение многочленов, представляющих алгебраические суммы векторов, совершается по правилу перемножения алгебраических полиномов.

На этом основании можно вновь получить выражение (15) для скалярного произведения $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$ в компонентах X_1, Y_1, Z_1 и X_2, Y_2, Z_2 векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ по ориентированным направлениям осей координат. Для этого достаточно вычислить произведение:

$$(X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\,(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k}),$$

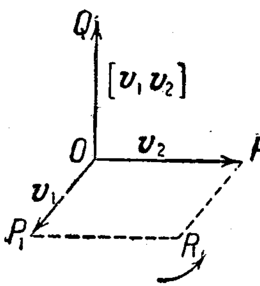
принимая во внимание соотношения (16).

---

[1]) Иначе говоря, рассматривается сначала случай, когда первый множитель есть единичный вектор. (*Ред.*)

Полезно еще отметить, что основные версоры $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ триэдра $Oxyz$, будучи отнесены к другому триэдру $\Omega\xi\eta\zeta$, имеют компонентами направляющие косинусы α_i, β_i, γ_i ($i=1$, 2, 3) (рубр. 8); вследствие этого соотношения (16) непосредственно приводят к равенствам (7).

22. Векторное произведение. Пусть будут заданы два вектора $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, отличные от нуля, неколлинеарные между собой, и притом в определенном порядке (т. е. первый и второй, согласно обозначению). В любой плоскости, параллельной обоим векторам (двумерное направление которой [1]), таким образом, определяется заданными двумя векторами), установим по ним определенную сторону вращения. Для этого центрируем векторы $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ в точке O этой плоскости и представим себе, что вектор $\boldsymbol{v}_1$ поворотом вокруг O на угол, меньший π, приводится в совмещение с вектором $\boldsymbol{v}_2$ по направлению и по стороне обращения (фиг. 11); ту сторону, в которую совершается этот поворот, мы и будем считать установленной в этой плоскости стороной вращения. Вместе с тем векторы $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ дают возможность отличать одну от другой две стороны любой прямой, не параллельной нашей плоскости (можно сказать, не принадлежащей двумерному направлению, которое определяется векторами $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$); одной из этих сторон прямой является та, по отношению к которой установленное вращение является правосторонним (т. е. сторона $\boldsymbol{u}$, образующая с векторами $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ правосторонний триэдр $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}$), а другой — противоположная сторона. На основе этих соображений устанавливается еще другое умножение векторов, при котором произведением служит не число, а *вектор*; это произведение называют поэтому *векториальным* или *векторным*.



Фиг. 11.

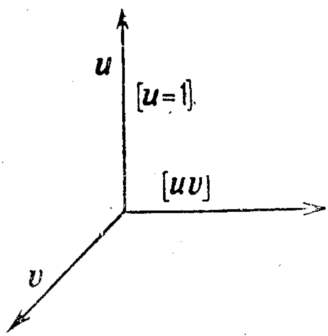
Векторным произведением двух векторов $\boldsymbol{v}_1$ *и* $\boldsymbol{v}_2$, *в этом порядке взятых*, называют *вектор* $\boldsymbol{u}$, длина которого выражается числом $v_1 v_2 \sin \widehat{\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2}$, направление которого перпендикулярно к плоскости $\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2$, а сторона обращения выбрана так, что по отношению к ней вращение от $\boldsymbol{v}_1$ к $\boldsymbol{v}_2$ представляется правосторонним (фиг. 11). Иными словами, длина векторного произведения вектора $\boldsymbol{v}_1$ на вектор $\boldsymbol{v}_2$ численно равна площади параллелограма, определяемого этими векторами (на нашем чертеже параллелограма OP_1RP_2); направление его перпендикулярно к двумерному направлению, определяемому векторами $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ (на нашем чертеже перпендикулярно к плоскости P_1OP_2); сторона обращения вектора $\boldsymbol{u}$ такова, что $\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2 \boldsymbol{u}$ есть правосторонний триэдр. Векторное произведение векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ обозначается символом $[\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2]$; читается: „$\boldsymbol{v}_1$ векторно на $\boldsymbol{v}_2$“. Так как вектор $[\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2]$

---

[1]) См. примечание на стр. 25. (*Ред.*)

лежит *вне* плоскости $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, то векторное произведение часто называют, следуя Грасману [1]), *внешним произведением* [2]).

23. Если один из двух векторов обращается в нуль или если эти векторы коллинеарны (т. е. $\sin \widehat{\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2} = 0$), то предыдущее определение все же остается в силе: направление и сторона обращения вектора $[\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2]$ остаются в этом случае неопределенными, но длина его равна нулю; иначе говоря, в этом случае $[\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2]$ есть нулевой вектор. Если же оба вектора $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ отличны от нуля, то их векторное произведение может обратиться в нуль только тогда, когда $\sin \widehat{\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2} = 0$, т. е. когда векторы коллинеарны. Таким образом для *двух векторов, отличных от нуля, обращение в нуль их векторного произведения представляет собою необходимое и достаточное условие их коллинеарности.* Как и в случае скалярного произведения, если известно, что векторное произведение $[\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2]$ вектора $\boldsymbol{v}_1$ на любой вектор $\boldsymbol{v}_2$ равно нулю, то отсюда можно заключить, что $\boldsymbol{v}_1 = 0$; в противном случае достаточно было бы взять вектор $\boldsymbol{v}_2$, отличный от нуля и не коллинеарный с $\boldsymbol{v}_1$, и произведение $[\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2]$ было бы отлично от нуля.



Фиг. 12.

24. Следует твердо помнить, что вектор $[\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2]$, если он не обращается в нуль, всегда перпендикулярен к каждому из векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$. В частности, если $\boldsymbol{u}$ есть единичный вектор, перпендикулярный к данному вектору $\boldsymbol{v}$, то вектор $[\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}]$ имеет ту же длину, что и $\boldsymbol{v}$ (ибо $u = 1$, $\sin \widehat{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}} = 1$), перпендикулярен к векторам $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ и обращен таким образом, что векторы $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ и $[\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}]$ образуют правосторонний ортогональный триэдр. Но в таком случае и векторы $\boldsymbol{v}$, $[\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}]$ и $\boldsymbol{u}$ образуют триэдр правого вращения. Это можно интерпретировать следующим образом: вектор $[\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}]$ представляет собою результат поворота вектора $\boldsymbol{v}$ вокруг оси $\boldsymbol{u}$ на прямой угол справа налево. Иначе говоря, *умножить произвольный вектор $\boldsymbol{v}$ на перпендикулярный к нему единичный вектор $\boldsymbol{u}$ в порядке $[\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}]$—значит повернуть вектор $\boldsymbol{v}$ вокруг оси $\boldsymbol{u}$ справа*

---

1) Герман Грасман (Hermann Grassmann) родился в Штеттине в 1809 г. и жил в этом городе почти постоянно до своей смерти (1877). Мы обязаны ему оригинальным геометрическим исчислением, которое объемлет векторное исчисление как частный случай. Оно было опубликовано Грасманом в 1844 г. и в глубоко переработанном виде — в 1862 г. под названием „Ausdehnungslehre“. Оно находит себе применение во многих вопросах не только геометрии, но также механики и математической физики.

2) Авторы употребляют для скалярного произведения знак $\times$ $(\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2)$, а для векторного произведения знак $\wedge$ $(\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2)$; но эти обозначения, как указано в предисловии, противоречат нашему стандарту. Принятое последним обозначение $[\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2]$ ведет свое начало еще от Грасмана и сохраняет в мировой литературе еще наибольшее распространение. (*Ред.*)

налево на прямой угол. Отсюда и название единичного вектора — версор (вращающий вектор, см. рубр. 3).

25. По определению, векторное произведение $[\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_1]$ имеет то же численное значение (ту же длину), что и $[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2]$; если оно отлично от нуля, то оно имеет и то же направление; но вектор $[\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_1]$ обращен не в ту сторону, что $[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2]$, а в противоположную; в самом деле, на прямой, перпендикулярной к плоскости векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, сторона, относительно которой ориентированный угол $\widehat{\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_1}$ (т. е. угол между двумя ориентированными прямыми; см. примечание на стр. 17) представляется правосторонним, противоположна той стороне, относительно которой правосторонним представляется ориентированный угол $\widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2}$. Поэтому

$$[\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_1] = -[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2].$$

Это соотношение остается в силе и тогда, когда одно из произведений (а с ним неизбежно и второе) обращается в нуль.

В соответствии с этим принято говорить, что векторное произведение является *знакопеременным* (в противоположность коммутативности, которой обладает произведение двух чисел, произведение вектора на число и скалярное произведение двух векторов).

26. Применяя соображения, изложенные в рубр. **23** и **24**, к основным версорам $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, мы приходим к следующим основным формулам, которые необходимо хорошо усвоить:

$$\left.\begin{aligned} [\boldsymbol{ii}] = [\boldsymbol{jj}] = [\boldsymbol{kk}] = 0, \\ [\boldsymbol{jk}] = \boldsymbol{i}, \quad [\boldsymbol{ki}] = \boldsymbol{j}, \quad [\boldsymbol{ij}] = \boldsymbol{k}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Наконец, для четкости повторим правило построения векторного произведения. Чтобы получить вектор, приложенный в точке O и представляющий собой произведение $[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2]$ двух векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, отличных от нуля и не параллельных между собою, достаточно центрировать их в точке O; если $\overline{OP_1}$ и $\overline{OP_2}$ суть эти приложенные векторы (см. фиг. 10), то вектор $[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2]$ направлен по прямой OQ, перпендикулярной к плоскости OP_1P_2 в точке O, и обращен в сторону, относительно которой ориентированный угол $P_1\widehat{O}P_2$ является правосторонним; длина этого вектора OQ выражается тем же числом, что и площадь параллелограма OP_1RP_2.

27. Выражение векторного произведения в компонентах перемножаемых векторов. Мы намерены здесь найти выражения компонент w_x, w_y, w_z векторного произведения $\boldsymbol{w} = [\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2]$ при помощи компонент X_1, Y_1, Z_1 и X_2, Y_2, Z_2 векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$. При этом мы начинаем с того случая, когда оба вектора $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ отличны от нуля и не коллинеарны; если поэтому мы центрируем эти векторы, то на них можно будет построить действительный параллелограм.

При этих предположениях вектор $\boldsymbol{w}$ должен быть, по определению, перпендикулярен к каждому из векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$; поэтому компоненты w_x, w_y, w_z должны удовлетворять двум условиям:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{w} = X_1 w_x + Y_1 w_y + Z_1 w_z = 0, \\ \boldsymbol{v}_2\boldsymbol{w} = X_2 w_x + Y_2 w_y + Z_2 w_z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Легко убедиться, что в рассматриваемом случае миноры

$$Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2, \quad Z_1 X_2 - X_1 Z_2, \quad X_1 Y_2 - Y_1 X_2 \tag{19}$$

матрицы

$$\left\| \begin{matrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{matrix} \right\| \tag{19a}$$

не могут совместно обратиться в нуль. В самом деле, имея в виду определение скалярного произведения векторов, можно написать сумму их квадратов [1]) в виде:

$$\begin{vmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 \cos \widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2} \\ v_1 v_2 \cos \widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2} & v_2^2 \end{vmatrix} = v_1^2 v_2^2 (1 - \cos^2 \widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2}) = v_1^2 v_2^2 \sin^2 \widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2};$$

при сделанных предположениях произведение $v_1 v_2 \sin \widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2}$ (площадь параллелограма, построенного на векторах $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$), наверное, имеет положительное значение.

Таким образом в силу уравнений (18) компоненты w_x, w_y, w_z пропорциональны минорам (19) матрицы (19a); если поэтому обозначим через ρ коэфициент пропорциональности, то

$$w_x = \rho\,(Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2), \quad w_y = \rho\,(Z_1 X_2 - X_1 Z_2), \quad w_z = \rho\,(X_1 Y_2 - X_2 Y_1).$$

Отсюда следует, что квадрат длины вектора $\boldsymbol{w}$ выражается формулой:

$$w^2 = w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 = \rho^2 v_1^2 v_2^2 \sin^2 \widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2};$$

а так как это выражение должно быть тождественно с произведением $v_1^2 v_2^2 \sin \widehat{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2}$, то отсюда заключаем, что $\rho^2 = 1$, т. е.

$$\rho = \pm 1.$$

Чтобы установить, какой из двух знаков действительно имеет место, заметим следующее. Если мы будем непрерывно изменять векторы $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, то значение ρ не может измениться, пока вектор $\boldsymbol{w}$ не пройдет через нуль; другими словами, ρ сохранит свое значение, как бы ни изменялись непрерывно векторы $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, лишь бы они не становились параллельными и не обращались

---

[1]) Следует припомнить тождество, к которому приходим, возведя матрицу (19a) в квадрат:

$$\begin{vmatrix} Y_1 Z_1 \\ Y_2 Z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} Z_1 X_1 \\ Z_2 X_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X_1 Y_1 \\ X_2 Y_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 & X_2 X_1 + Y_2 Y_1 + Z_2 Z_1 \\ X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 & X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 \end{vmatrix}.$$

В справедливости этого тождества можно, конечно, убедиться и непосредственно.

в нуль. Между тем, такой непрерывной деформацией в пространстве всегда можно превратить одну пару векторов, удовлетворяющую этим условиям, в любую другую [1]). Следовательно, ρ постоянно имеет один и тот же знак, и, чтобы его установить, достаточно рассмотреть один частный случай.

Если, положим, $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{j}$, то матрица (19a) примет вид:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix};$$

если теперь припомним, что $[\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}]=\boldsymbol{k}$ и что компоненты вектора $\boldsymbol{k}$ имеют значения $0, 0, 1$, то убедимся, что ρ равно 1; вместе с тем мы приходим к заключению, что компоненты векторного произведения $\boldsymbol{w}$ всегда выражаются формулами:

$$w_x=Y_1Z_2-Z_1Y_2,\quad w_y=Z_1X_2-X_1Z_2,\quad w_z=X_1Y_2-Y_1X_2. \tag{20}$$

Вводя основные версоры, можно написать:

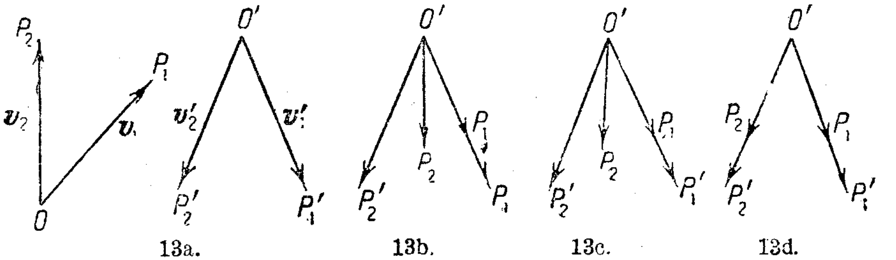
$$[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2]=(Y_1Z_2-Z_1Y_2)\,\boldsymbol{i}+(Z_1X_2-X_1Z_2)\,\boldsymbol{j}+(X_1Y_2-Y_1X_2)\,\boldsymbol{k}$$

или в форме определителя

$$[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2]=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \tag{21}$$

К этому заключению мы пришли, вовсе исключив из рассмотрения два случая: когда каждый из векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ обращается в нуль и когда они друг другу параллельны. Но соотношения (20), а следовательно, и (21) остаются в силе также и для этих двух исключительных случаев, ибо как в одном, так и в другом из них обе части равенств (20) и (21) обращаются в нуль.

[1]) Так, чтобы привести к такому совмещению пары $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ и $\boldsymbol{v}_1'$, $\boldsymbol{v}_2'$, изображенные на (фиг. 13a), перемещаем угол P_1OP_2 так, чтобы сторона OP_1 совпала с $O'P_1'$ (фиг. 13b); вектор $\overline{OP_2}$ займет при этом некоторое положение $\overline{O'P_2}$.



13a. 13b. 13c. 13d.

Фиг. 13.

Вращая угол $P_2O'P_1$ в ту или в другую сторону вокруг $O'P_1$, приведем вектор $O'P_2$ в полуплоскость $P_1'O'P_2'$ (фиг. 13c), затем, изменяя угол, приведем вектор $O'P_2$ к совмещению с прямой $O'P_2'$ (фиг. 13d). Наконец, изменяя длины векторов и $O'P_1$ и $O'P_2$, достигнем полного совпадения. (*Ред.*)

28. Из выражений (20) и (21) векторного произведения в компонентах мы вновь убеждаемся в знакопеременном характере этого произведения (рубр. 25): так как определитель (21) изменит знак на обратный, если мы в нем переставим две последние горизонтали, то

$$[\boldsymbol{v}_2 \boldsymbol{v}_1] = -[\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2].$$

На основе формул (20) или (21) легко устанавливаются следующие два тождества, в первом из которых a есть произвольное вещественное число:

$$a[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2] = [a\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2] = [\boldsymbol{v}_1 a\boldsymbol{v}_2];$$

$$[\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2)] = [\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}]_1 + [\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_2].$$

Первое из этих тождеств доказывается настолько просто, что на нем не стоит останавливаться. Для доказательства второго обозначим компоненты вектора $\boldsymbol{v}$ через X, Y, Z; тогда по формуле (21):

$$[\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_1] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ X & Y & Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \end{vmatrix}; \quad [\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_2] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ X & Y & Z \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix};$$

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ X & Y & Z \\ X_1 + X_2 & Y_1 + Y_2 & Z_1 + Z_2 \end{vmatrix}.$$

Ясно, что последний определитель равен сумме двух первых.

Последнее тождество выражает свойство *дистрибутивности* или *распределительности* векторного произведения; как и в алгебре, оно распространяется на случай, когда сумма векторов содержит не два, а какое угодно число слагаемых. Отсюда и из правила умножения вектора на число (рубр. 15) вытекает, что произведение многочленов, составленных из векторных слагаемых, может быть развернуто, как произведение алгебраических полиномов. Иначе говоря, произведение

$$\left[\sum_1^n {}_r a_r \boldsymbol{v}_r \sum_1^p {}_s b_s \boldsymbol{w}_s\right]$$

(где n и p суть целые числа, a_r и b_s — вещественные числа, $\boldsymbol{v}_r$ и $\boldsymbol{w}_s$ — произвольные векторы) развертывается, как обыкновенно в алгебре, с тем только ограничением, что в общем члене разложения $[a_r \boldsymbol{v}_r, b_s \boldsymbol{w}_s]$ нельзя переставлять векторных сомножителей; однако коэфициенты a_r и b_s можно переставлять как угодно, в частности, общему члену можно придать форму: $a_r b_s [\boldsymbol{v}_r \boldsymbol{w}_s]$.

29. Смешанные произведения. Даны три вектора $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$; составим векторные произведения:

$$[\boldsymbol{v}_2 \boldsymbol{v}_3], \quad [\boldsymbol{v}_3 \boldsymbol{v}_1], \quad [\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2]$$

и затем каждое из них помножим скалярно на недостающий третий вектор.

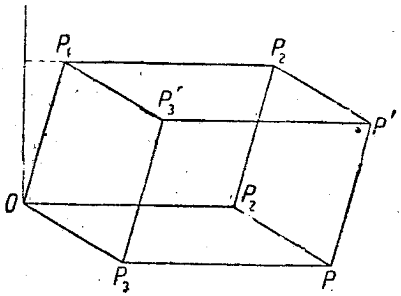
Получающиеся, таким образом, *смешанные произведения равны между собой*, т. е. имеют место тождества:

$$\boldsymbol{v}_1[\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3] = \boldsymbol{v}_2[\boldsymbol{v}_3\boldsymbol{v}_1] = \boldsymbol{v}_3[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2] \tag{22}$$

Чтобы это установить наиболее простым способом, отнесем данные три вектора к ортогональному триэдру и обозначим через X_i, Y_i, Z_i $(i=1, 2, 3)$ компоненты вектора $\boldsymbol{v}_i$ по осям триэдра. Легко усмотреть, что наши три смешанные произведения в силу соотношений (20) и (15) выразятся определителями:

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} X_3 & Y_3 & Z_3 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \tag{23}$$

Отметим, что абсолютное значение каждого из этих трех определителей выражает объем параллелепипеда, построенного на трех векторах $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ ($OP_2PP_3, P_1P_2'P'P_3'$ на фиг. 14). Чтобы это доказать, исключим, прежде всего, случай вырождения, когда на трех векторах нельзя построить действительного параллелепипеда, и обозначим через $\boldsymbol{v}$ произведение $[\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3]$. Тогда длина вектора $\boldsymbol{v}$ выразит площадь параллелограма векторов $\boldsymbol{v}_2$ и $\boldsymbol{v}_3$ (т. е. основания OP_2PP_3 нашего параллелепипеда); направление же его перпендикулярно к плоскости этого параллелограма. Скалярное произведение можно поэтому интерпретировать (рубр. 20), как произведение из $\boldsymbol{v}$ на компоненту вектора $\boldsymbol{v}_1$ по направлению $\boldsymbol{v}$, надлежащим образом ориентированному; а так как вектор $\boldsymbol{v}$ ($\overline{OQ}$) перпендикулярен к плоскости $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ (OP_2PP_3), то длина этой компоненты (OR) есть не что иное, как высота h параллелепипеда, соответствующая основанию, площадь которого выражается числом v. Таким образом абсолютное значение произведения $\boldsymbol{v}_1\,\boldsymbol{v}$, т. е. смешанного произведения $\boldsymbol{v}_1[\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3]$, равно vh (произведение из основания параллелепипеда на высоту) и выражает объем параллелепипеда векторов $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$. Знак же произведения $\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_1$ есть $+$ или $-$, смотря по тому, образует ли $\boldsymbol{v}_1$ острый или тупой угол с вектором $\boldsymbol{v}$, т. е. с перпендикуляром к плоскости $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, ориентированным таким образом, чтобы вращение $\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3$ было относительно него правосторонним; еще иначе, произведение $\boldsymbol{v}_1[\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3]$ имеет положительное значение, когда векторы $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ образуют правосторонний триэдр, и отрицательное в противоположном случае.



Фиг. 14.

Случаи вырождения, провизорно оставленные в стороне, получаются из соображений непрерывности, если представим себе, что три вектора стремятся стать параллельными одной и той же плоскости или что один из них стремится к нулю.

Объем соответствующего параллелепипеда всегда имеет пределом нуль, а потому в предельном случае

$$\boldsymbol{v}_1[\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3]=0. \tag{24}$$

Отсюда следует вывод: *обращение в нуль смешанного произведения* $\boldsymbol{v}_1[\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3]$, *составленного из трех не нулевых векторов, представляет собою условие, необходимое и достаточное для того, чтобы векторы были компланарны.*

30. Условия коллинеарности двух векторов. Выражения компонент векторного произведения и численного значения смешанного произведения дают возможность выразить в координатах условия коллинеарности и компланарности векторов; этим условиям можно придать и векторную форму.

Как мы уже знаем (рубр. 22), условие коллинеарности двух векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ сводится к тому, что векторное их произведение должно обращаться в нуль:

$$[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2]=0. \tag{25}$$

В координатах (при прежних их обозначениях) это условие выражается тремя равенствами:

$$Y_1Z_2-Z_1Y_2=0,\quad Z_1X_2-X_1Z_2=0,\quad X_1Y_2-Y_1X_2=0. \tag{25a}$$

Одно из этих трех уравнений представляет собою следствие остальных. Если исключим совершенно тривиальный случай, когда оба вектора $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ равны нулю, т. е. будем считать один из них, скажем, $\boldsymbol{v}_2$, во всяком случае отличным от нуля, то, по крайней мере одна из координат X_2, Y_2, Z_2 отлична от нуля; пусть $Z_2\neq 0$. Если положим $\frac{Z_1}{Z_2}=a$, т. е. $Z_1=aZ_2$, то соотношения (25a) дадут: $X_1=aX_2$, $Y_1=aY_2$. Условие коллинеарности векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ может быть, таким образом, выражено равенствами:

$$X_1=aX_2,\quad Y_1=aY_2,\quad Z_1=aZ_2, \tag{25b}$$

где a есть вещественное число. Эти равенства, в свою очередь, влекут за собой соотношения (25a). При $a=0$ они охватывают и тот случай, когда $\boldsymbol{v}_1$ есть нулевой вектор и может поэтому считаться коллинеарным с любым другим вектором.

Равенство (25b) можно объединить в векторное соотношение:

$$\boldsymbol{v}_1=a\boldsymbol{v}_2, \tag{25c}$$

которое, как мы уже знаем (рубр. 17), имеет место в том и только в том случае, когда векторы $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ коллинеарны.

Итак, *чтобы векторы* $\boldsymbol{v}_1$ *и* $\boldsymbol{v}_2$ *были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение* (25c). *Это векторное равенство может быть заменено тремя скалярными равенствами* (25b). Из соотношений (25c) и (25b) можно исключить множитель a, и тогда *условия коллинеарности выразятся либо тремя скалярными равенствами* (25a), *либо одним векторным равенством* (25).

31. Условия компланарности трех векторов $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, как мы видели (рубр. 29), выражается равенством (24):

$$\boldsymbol{v}_1 [\boldsymbol{v}_2 \boldsymbol{v}_3] = 0 \tag{24}$$

или в координатах

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{24a}$$

Оставляя и здесь в стороне совершенно тривиальный случай, когда все три вектора коллинеарны, будем считать, что векторы $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ не коллинеарны. Тогда равенства (25a) не могут быть совместно справедливы, т. е. из трех разностей

$$Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1, \quad Z_1 X_2 - Z_2 X_1, \quad X_1 Y_2 - X_2 Y_1,$$

по крайней мере, одна отлична от нуля.

Положим, что отлична от нуля третья разность. Мы можем ее рассматривать как минор e_3 элемента Z_3 в определителе (24a); если через e_1 и e_2 обозначим миноры элементов Z_1, Z_2 того же определителя и примем во внимание, что определитель этот равен нулю, то придем к трем равенствам:

$$\begin{aligned} e_1 X_1 + e_2 X_2 + e_3 X_3 &= 0, \\ e_1 Y_1 + e_2 Y_2 + e_3 Y_3 &= 0, \\ e_1 Z_1 + e_2 Z_2 + e_3 Z_3 &= 0. \end{aligned} \tag{24b}$$

Они выражают, что векторы $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ связаны линейным соотношением:

$$e_1 \boldsymbol{v}_1 + e_2 \boldsymbol{v}_2 + e_3 \boldsymbol{v}_3 = 0, \tag{24c}$$

в котором, по крайней мере, один из коэфициентов e_1, e_2, e_3 отличен от нуля. Обратно, если имеет место векторное равенство (24c), то оно разрешается в три скалярные равенства (24b), исключая из которых коэфициенты e_1, e_2, e_3, получаем соотношение (24a) или — в векторной форме — (24). Заметим, что соотношение (24c) можно представить также в виде:

$$\boldsymbol{v}_3 = d_1 \boldsymbol{v}_1 + d_2 \boldsymbol{v}_2, \quad \text{где} \quad d_1 = -\frac{e_1}{e_3}, \quad d_2 = -\frac{e_2}{e_3}. \tag{24d}$$

Итак, *чтобы три вектора $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы один из них выражался линейно через оба других* (24) или, *в более симметричной форме, чтобы они были связаны линейной зависимостью* (24c), *в которой, по крайней мере, один из коэфициентов e_1, e_2, e_3 отличен от нуля.* В скалярной форме эта зависимость выражается тремя равенствами (24b), исключая из которых коэфициенты e_1, e_2, e_3, *мы получим условие компланарности векторов $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ в форме* (24a) *или* (24).

32. Двойное векторное произведение. Если векторное произведение $[\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2]$ помножим векторно же на третий вектор $\boldsymbol{v}$, то получим так называемое двойное векторное произведение:

$$\boldsymbol{u} = \Big[\boldsymbol{v}\, [\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2]\Big].$$

Если через $\boldsymbol{w}$ обозначим произведение $[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2]$, то вектор $\boldsymbol{w}$ перпендикулярен к плоскости $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$. Вектор $\boldsymbol{u}=[\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}]$, в свою очередь, перпендикулярен к вектору $\boldsymbol{w}$; поэтому он лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$, вернее, компланарен с ними. Следовательно (рубр. 31):

$$\boldsymbol{u}=d_1\boldsymbol{v}_1+d_2\boldsymbol{v}_2\,.$$

Основываясь на формулах (20), можно вычислить коэффициенты d_1 и d_2. С этой целью заметим, что компоненты w_x, w_y, w_z вектора $\boldsymbol{w}$ даются формулами (20) непосредственно; а чтобы получить компоненты u_x, u_y, u_z вектора $\boldsymbol{u}$, нужно в формулах (20) вместо X_1, Y_1, Z_1 подставить компоненты X, Y, Z вектора $\boldsymbol{v}$, а вместо X_2, Y_2, Z_2 компоненты w_x, w_y, w_z вектора $\boldsymbol{w}$. Следовательно:

$$u_x=Yw_z-Zw_y=Y(X_1Y_2-Y_1X_2)-Z(Z_1X_2-X_1Z_2)=$$
$$=X_1(YY_2+ZZ_2)-X_2(YY_1+ZZ_1).$$

Прибавляя в последней части этого равенства к уменьшаемому и вычитаемому по XX_1X_2, получим:

$$u_x=(XX_2+YY_2+ZZ_2)X_1-(XX_1+YY_1+ZZ_1)X_2=$$
$$=(\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_2)X_1-(\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_1)X_2.$$

Таким же образом найдем, что

$$u_y=(\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_2)Y_1-(\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_1)Y_2\,,\quad u_z=(\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_2)Z_1-(\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_1)Z_2.$$

Отсюда вытекает, что

$$\boldsymbol{u}=[\boldsymbol{v}[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2]]=(\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_1-(\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_2\,. \qquad (26)$$

Иными словами,

$$d_1=\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_2\,,$$
$$d_2=-\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_1.$$

Формула *разложения двойного векторного произведения* (26) находит очень часто применение в приложениях векторного исчисления. Из этой формулы вытекает, между прочим, что свойством сочетательности векторное произведение не обладает, т. е. двойные произведения $[\boldsymbol{v}[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2]]$ и $[[\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_1]\boldsymbol{v}_2]$, вообще, не равны. В самом деле, первое из этих двойных произведений выражается формулой (26) непосредственно, а для второго та же формула (26) дает:

$$\boldsymbol{u}'=[[\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_1]\boldsymbol{v}_2]=-[\boldsymbol{v}_2[\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_1]]=[\boldsymbol{v}_2[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}]]=(\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}_1-(\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}\,.$$

Если бы $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}'$, то имело бы поэтому место равенство:

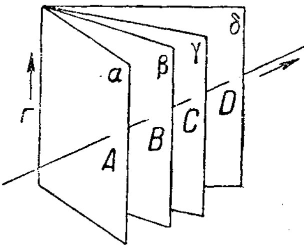
$$(\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_2=(\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}\,.$$

Это значит, что равенство $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}'$, требуемое свойством сочетательности, имеет место только в том исключительном случае, когда векторы $\boldsymbol{v}_2$ и $\boldsymbol{v}$ коллинеарны и притом имеют совершенно определенное отношение длин.

4. Момент приложенного вектора относительно точки или оси.

33. Учению о *моменте* вектора предпошлем некоторые соображения качественного свойства относительно стороны обращения двух ориентированных прямых r и r', не принадлежащих одной плоскости.

Если через одну из этих прямых, скажем, через r, проведем плоскости, проходящие через точки A, B, C, $D, \ldots$ другой прямой r', следующие одна за другой в сторону ориентации последней, то образуется пучок плоскостей (фиг. 15), и сторона обращения луча r' определяет сторону обращения пучка. Относительно оси r (т. е. относительно наблюдателя, стоящего на оси r так, что сторона обращения от ног к голове совпадает со стороной обращения оси r) последовательность проекций пучка (или, если угодно, соответствующее вращение) будет представляться правосторонней или левосторонней. Но легко видеть, что вращение вокруг оси r, определяемое осью r', будет того же типа (правостороннее или левостороннее), что и вращение вокруг оси r', определяемое осью r.



Фиг. 15.

Две ориентированные прямые r и r', не лежащие в одной плоскости, имеют друг относительно друга правостороннее или левостороннее расположение, смотря по тому, определяют ли они одна вокруг другой правостороннее или левостороннее вращение (в установленном смысле слова).

Определение правостороннего и левостороннего расположения непосредственно распространяется и на два приложенных некомпланарных вектора $\overline{AB}$ и $\overline{A'B'}$, а также на смешанную пару (ориентированная прямая и приложенный вектор, не лежащие в одной плоскости) в том смысле, что тот же критерий применяется в этом случае к ориентированным по стороне обращения вектора прямым их действия (рубр. 3).

34. Если дан приложенный вектор $\overline{AB} = v$ и точка P (фиг. 16), то векторное произведение

$$M = [\overline{PA}, \overline{AB}] = [\overline{PA}\ v]^{1)}$$

называется *моментом приложенного вектора $v = \overline{AB}$ относительно точки или полюса P.*

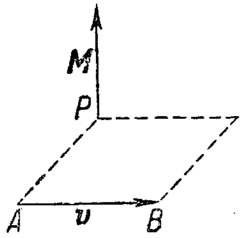
Очень важно точно фиксировать геометрический смысл этого определения: если мы будем иметь в виду общий случай, когда вектор $\overline{AB}$ отличен от нуля и не расположен с полюсом P на одной прямой (так что векторы $\overline{PA}$ и v не коллинеарны), то момент M, будучи приложен в полюсе P, перпендикулярен к пло-

---

[1]) Т. е. векторное произведение радиуса-вектора точки приложения A относительно полюса P на вектор v. (*Ред.*)

скости PAB и имеет относительно $\overline{AB}$ правостороннее расположение; длина же его численно равна площади параллелограма, построенного на отрезках PA и AB, или, иначе говоря, равна произведению длины v приложенного вектора на расстояние полюса P от прямой действия этого вектора.

В случаях, которые мы исключили, когда $\boldsymbol{v}=0$ или когда линия действия вектора $\boldsymbol{u}$ проходит через полюс, совершенно ясно, что момент $\boldsymbol{M}$ обращается в нуль (рубр. 21).



Фиг. 16.

Если отнесем вектор $\boldsymbol{v}$ и точки P и A к триэдру ортогональных декартовых координат и обозначим компоненты вектора $\boldsymbol{v}$ через X, Y, Z, координаты точки A — через x, y, z, а координаты точки P — через a, b, c, то компоненты радиуса-вектора $\overline{PA}$ будут $x-a$, $y-b$, $z-c$; компоненты же момента $\boldsymbol{M}$ по формулам (20) будут иметь значения:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= (y-b)Z-(z-c)Y, \\ M_y &= (z-c)X-(x-a)Z, \\ M_z &= (x-a)Y-(y-b)X. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

35. Перейдем к определению *осевого* момента, т. е. отнесенного не к точке, а к ориентированной прямой r общего расположения. Для этого важно установить следующее предложение. *Компонента по направлению r момента приложенного вектора относительно любой точки P той же прямой r не зависит от положения точки на этой прямой.* Чтобы это доказать, достаточно принять прямую r за ось z; тогда координаты точки P будут 0, 0, c. Последняя из формул (27) примет вид:

$$M_z = xY - yX$$

и покажет, что компонента M_z не зависит от c, т. е. не зависит от положения точки P на оси (по прямой r).

Этим оправдывается следующее определение: *под моментом M_r вектора, приложенного в точке A, относительно ориентированной прямой r* разумеют компоненту по направлению r момента вектора $\boldsymbol{v}$ относительно любой точки этой прямой.

Для противоположения *осевому* моменту принято называть момент вектора относительно точки или полюса *полярным* [1]).

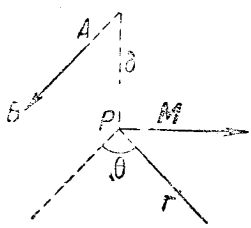
36. Если $\boldsymbol{u}$ есть единичный вектор, имеющий направление в сторону обращения ориентированной прямой r, то осевой момент M_r можно представить (рубр. 20) в векториальной форме смешанным произведением:

$$M_r = \boldsymbol{u}[\overline{PA},\ \overline{AB}] = \boldsymbol{u}[\overline{PA}\,\boldsymbol{v}];$$

---

[1]) Важно отчетливо себе уяснить, что полярный момент вектора есть вектор, а осевой момент есть скаляр. (*Ред.*)

отсюда следует (рубр. 29), что M_r имеет положительное или отрицательное значение в зависимости от того, образуют ли три вектора u, $\overline{PA}$ и v правосторонний или левосторонний триэдр, т. е. имеет ли вектор v относительно ориентированной оси r правостороннее или левостороннее расположение; абсолютное же значение числа M_r равно объему параллелепипеда, построенного на векторах u, $\overline{PA}$ и v; поэтому M_r обращается в нуль (помимо тривиальных случаев $v=0$ или $\overline{PA}=0$) только в том случае, когда векторы u, $\overline{PA}$ и $\overline{AB}$ компланарны, т. е. когда прямая действия вектора v, приложенного в точке A, компланарна с осью r (т. е. с прямой действия вектора u, приложенного в точке P). Если исключить эти случаи, когда M_r обращается в нуль, можно получить для него весьма простое выражение следующим образом.



Фиг. 17.

Построим общий перпендикуляр к прямым AB и r (фиг. 17); длина δ отрезка этого перпендикуляра, проходящего между прямыми, выражает кратчайшее расстояние между ними. Основание P этого перпендикуляра на прямой r примем за полюс. Тогда длина полярного момента M вектора v относительно точки P выражается произведением $v\delta$. Если теперь обозначим через θ наименьший угол неориентированных прямых r и AB, то наименьший угол между r и прямой действия (тоже не ориентированной) вектора M есть дополнение угла θ; поэтому абсолютное значение момента M_r дается выражением $v\delta\sin\theta$; в связи с тем, что было сказано выше, мы отсюда заключаем, что

$$M_r = \pm v\delta\sin\theta \tag{28}$$

с верхним или нижним знаком, смотря по тому, имеет ли приложенный вектор v правостороннее или левостороннее расположение относительно ориентированной прямой r.

5. Результирующий или главный момент системы приложенных векторов.

37. Дана система векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$, приложенных в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (различных или совпадающих); моменты этих векторов относительно общего полюса P обозначим соответственно через $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

Результирующим или главным моментом этой системы относительно точки P называют вектор M, представляющий сумму моментов отдельных векторов:

$$M = M_1 + M_2 + \ldots + M_n = \sum_1^n {}_i M_i. \tag{29}$$

Точка P, относительно которой взяты все моменты M_i, называется *полюсом* или *центром приведения* системы векторов. Отметим следующую теорему:

Если все векторы системы приложены в общей точке A, то главный момент системы всегда совпадает с моментом суммы всех данных векторов, приложенной в точке A (теорема Вариньона) [1].

В самом деле, если обозначим через R сумму всех векторов v_i, то в силу определения полярного момента, с одной стороны, и по свойству дистрибутивности векторного произведения, с другой стороны, каков бы ни был центр приведения P,

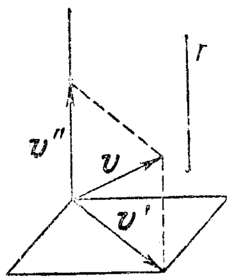
$$M = \sum_1^n {}_i M_i = \sum_1^n {}_i [\overline{PA} v_i] \left[\overline{PA} \sum v_i\right] = [\overline{PA}\, R].$$

38. Рассмотрим снова систему приложенных векторов общего положения (A_1, v_1), (A_2, v_2), $(A_3, v_3), \ldots, (A_n, v_n)$; пусть r будет произвольная ориентированная прямая.

Припомним (рубр. 13), что сумма нескольких векторов имеет компонентой (по отношению к любой ориентированной оси) сумму компонент слагаемых векторов. Вследствие этого из предыдущей рубрики непосредственно вытекает, что компонента по направлению r главного момента системы по отношению к любой точке P прямой r равна сумме моментов по отношению к оси r всех векторов системы.

В связи с этим нужно считать оправданным следующее определение: *результирующим или главным моментом системы приложенных векторов относительно ориентированной прямой r* называется алгебраическая сумма моментов относительно этой оси всех векторов системы, или, что то же, компонента относительно r главного момента системы, взятого по отношению к любой точке прямой r.

Если все векторы приложены в одной и той же точке A, то главный момент системы относительно любого полюса совпадает с моментом главного вектора относительно того же полюса; точно так же, главный момент системы относительно любой оси равен моменту главного вектора относительно той же оси.



Фиг. 18.

В частности, если представим себе приложенный вектор v (фиг. 18) разложенным на две слагающие v' и v'' — одну, перпендикулярную к прямой r, и другую, параллельную ей, и имеющие с v общее начало, то момент вектора v относительно r совпадает с главным моментом системы, образованной приложенными векторами v' и v''. Но так как момент вектора v'' равен нулю (рубр. 36), то мы отсюда заключаем, что момент относительно

[1] П. Вариньон (Pierre Varignon) родился в Кано в 1654 г., умер в Париже в 1722 г. Приведенная в тексте теорема содержится в его посмертном труде „Nouvelle mécanique ou statique“, Paris 1725.

оси r приложенного вектора $\boldsymbol{v}$ совпадает с моментом (конечно, относительно той же оси) его перпендикулярной к r слагающей $\boldsymbol{v}'$.

39. Изменение момента с переменой центра приведения. Пусть M и M' будут моменты одного и того же приложенного вектора $\boldsymbol{u}=\overline{AB}$ относительно двух различных полюсов P и P'.

По определению имеем:

$$\boldsymbol{M}=[\overline{PA}\boldsymbol{v}],\ \boldsymbol{M}'=[\overline{P'A}\boldsymbol{v}];$$

но так как

$$\overline{P'A}=\overline{PA}+\overline{P'P},$$

то

$$M'=[\overline{PA}\boldsymbol{v}]+[\overline{P'P}\boldsymbol{v}],$$

т. е.

$$M'=M+[\overline{P'P}\boldsymbol{v}].$$

Далее, пусть дана система приложенных векторов $(A_i, \boldsymbol{v}_i)$ $(i=1,\ 2,\ 3,\dots,n)$; положим

$$\sum_1^n{}_i\,\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{R}.$$

Если M_i и M_i' суть моменты вектора $\boldsymbol{v}_i$ относительно двух центров приведения P и P', а M и M' — главные моменты системы относительно тех же центров приведения, то

$$\overline{M_i'}=M_i+[\overline{P'P}\boldsymbol{v}_i]; \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n).$$

Суммируя эти равенства, мы получаем, как и в случае одного вектора, формулу:

$$M'=M+[\overline{P'P'}\boldsymbol{R}]. \tag{30}$$

Она, очевидно, допускает следующее толкование: *главный момент системы относительно точки P' представляет собою сумму аналогичного момента системы относительно точки P и момента относительно точки P' главного вектора $\boldsymbol{R}$, приложенного в точке P.*

Пусть, в частности, точка P' совпадает с началом O осей координат и пусть M_0 будет соответствующий главный момент.

Обозначим через M_x, M_y, M_z компоненты главного момента M, через $M_{o/x}$, $M_{o/y}$, $M_{o/z}$ — компоненты главного момента M_o, через x, y, z — координаты произвольно выбранного полюса P (вместо a, b, c в рубр. 34) и, наконец, через X, Y, Z — компоненты главного вектора $\boldsymbol{R}$.

Тогда из соотношений (30) и (20) легко получим следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} M_x&=M_{o/x}-yZ+zY,\\ M_y&=M_{o/y}-zX+xZ,\\ M_z&=M_{o/z}-xY+yX. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Из соотношения (30) сверх того вытекает: 1) при $\boldsymbol{R}=0$, $\boldsymbol{M}'=\boldsymbol{M}$; 2) чтобы момент $\boldsymbol{M}'$ совпадал с $\boldsymbol{M}$, каков бы ни был полюс P', необходимо, чтобы $[\overline{P'P}\boldsymbol{R}]=0$, каков бы ни был полюс P; а это влечет за собой (рубр. 21):

$$\boldsymbol{R}=0.$$

Отсюда вытекает, что для системы векторов, сумма которых равна нулю, главный момент не зависит от центра приведения. Если главный вектор системы $\boldsymbol{R}$ (сумма векторов системы) отличен от нуля, то $\boldsymbol{M}'=\boldsymbol{M}$ в том, и только в том случае, когда прямая $P'P$ параллельна вектору $\boldsymbol{R}$ (т. е. когда $[\overline{P'P}\boldsymbol{R}]=0$).

40. Инвариантный трехчлен. Из соотношения (30) и из дистрибутивности скалярного произведения вытекает тождество:

$$\boldsymbol{M}'\boldsymbol{R}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}+[\overline{P'P}\boldsymbol{R}]\,\boldsymbol{R}.$$

Но, по определению векторного произведения вектор $[\overline{P'P}\boldsymbol{R}]$ перпендикулярен к $\boldsymbol{R}$, а потому

$$[\overline{P'P}\boldsymbol{R}]\,\boldsymbol{R}=0\,^{1)},$$

а следовательно:

$$\boldsymbol{M}'\boldsymbol{R}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}.$$

Отсюда следует, что *скалярное произведение*

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}=M_xX+M_yY+M_zZ$$

главного момента системы на ее главный вектор не зависит от центра приведения. Вследствие этого трехчлен $M_xX+M_yY+M_zZ$ называют *инвариантным трехчленом.* Мы будем обозначать его для краткости буквой T.

41. Если главный вектор системы отличен от нуля и, следовательно, имеет вполне определенное направление, то компонента главного момента по направлению результирующего вектора не зависит от центра приведения. В самом деле, как бы ни был выбран центр приведения, из соотношения (15) рубр. 20 следует, что

$$M\cos\widehat{\boldsymbol{R}\boldsymbol{M}}=\frac{T}{R}, \tag{32}$$

чем утверждение и доказывается.

Отметим еще, что как из соотношения (32), так и из общих свойств скалярного произведения (рубр. 20) вытекает, что в зависимости от того, будет ли $T>0$ или $T<0$, угол между главным вектором системы $\boldsymbol{R}$ и ее главным моментом $\boldsymbol{M}$ будет всегда острым либо всегда тупым, как бы ни был выбран центр приведения.

---

1) Вообще если вектор $\boldsymbol{v}$ коллинеарен с одним из векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, то смешанное произведение $[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2]\,\boldsymbol{v}$ обращается в нуль, ибо векторы $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ в этом случае компланарны (см. рубр. 29 и 31). (*Ред.*)

Если, наконец, $T=0$, а R, как выше, предполагается отличным от нуля, то главный момент системы всегда остается перпендикулярным к ее главному вектору или же обращается в нуль, как это в частных случаях может иметь место.

42. Центральная ось. Наименьший момент. Дана система векторов, главный вектор которой отличен от нуля; разыщем геометрическое место точек $P(x, y, z)$, по отношению к которым главный момент системы параллелен ее главному вектору R или, в частности, равен нулю. Задачу эту можно было бы решить геометрически, основываясь на соотношении (30). Но гораздо проще это сделать, пользуясь аналитическим ее выражением. Выберем надлежащим образом оси координат, именно, возьмем ось Oz параллельной главному вектору R и обращенной в ту же сторону; тогда компоненты X и Y результирующего вектора обратятся в нуль, а компонента Z совпадет с длиной R главного вектора, которая, по условию, больше нуля. В соответствии с этим формулы (39) примут вид:

$$M_x = M_{o'x} - yR, \quad M_y = M_{o'y} + xR, \quad M_z = M_{o'z}.$$

С другой стороны, для точек искомого геометрического места компоненты M_x и M_y должны обращаться в нуль; это приводит к уравнениям:

$$M_{o'x} - yR = 0,$$
$$M_{o'y} + xR = 0,$$

которые дают для x и y постоянные значения:

$$x = -\frac{M_{o'y}}{R}, \quad y = \frac{M_{o'x}}{R}.$$

Требуемое геометрическое место представляет собою прямую, параллельную оси z, т. е. главному вектору R; эта прямая называется *центральной осью* системы.

43. Припомним теперь, что компонента главного момента по ориентированному направлению главного вектора не зависит от центра приведения (рубр. **41**). Отсюда ясно, что длина главного момента принимает наименьшее свое значение, когда момент становится параллельным главному вектору, т. е. когда центр приведения лежит на центральной оси. Эта наименьшая длина, называемая *наименьшим моментом*, совпадает с (постоянным) абсолютным значением момента по направлению главного вектора; вследствие соотношения (32) она имеет значение

$$\frac{|T|}{R}.$$

Поэтому, если инвариантный трехчлен обращается в нуль, то равен нулю и главный момент системы относительно точек центральной оси.

44. Мы до сих пор предполагали, что главный вектор системы отличен от нуля. Если он равен нулю, то главный момент, как нам уже известно, не зависит от центра приведения. В этом случае мы можем принять за центральную ось системы любую прямую, параллельную главному моменту. Мы можем, таким образом, при любой системе векторов говорить о ее центральной оси.

6. Эквивалентные системы векторов и их приведение.

45. Две системы приложенных векторов Σ и Σ' называются *эквивалентными*, если они имеют один и тот же главный вектор и один и тот же главный момент по отношению к какой-либо точке P, а вследствие этого, в силу соотношений (30), и по отношению к любой точке. Таким образом, например, несколько векторов, приложенных к одной и той же точке, образуют в силу теоремы Вариньона (рубр. 38) систему, эквивалентную одному вектору, именно, главному вектору этой системы, приложенному в той же точке. Таким же образом всякие два вектора, расположенные на той же прямой (имеющие общую прямую действия), также эквивалентны.

Из самого определения эквивалентности двух систем непосредственно вытекает, что две системы приложенных векторов, эквивалентные третьей, эквивалентны между собой. Кроме того, если системы $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ соответственно эквивалентны системам $\Sigma_1', \Sigma_2', \ldots, \Sigma_n'$, то система Σ, составленная из систем Σ_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$, эквивалентна системе Σ', составленной из систем Σ_i'.

Если даны две системы приложенных векторов и нужно установить, эквивалентны ли они, то достаточно отнести их к общей системе координат; условия, необходимые и достаточные для эквивалентности систем, выражаются формулами:

$$\begin{gathered} X = X', \qquad Y = Y', \qquad Z = Z' \\ M_x = M_x', \quad M_y = M_y', \quad M_z = M_z'; \end{gathered} \tag{33}$$

значение букв, конечно, понятно.

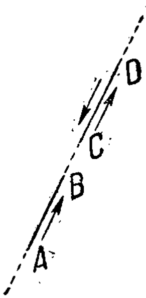
46. Из самого определения эквивалентности также совершенно ясно, что система Σ эквивалентна одному вектору в том и только в том случае, если существует такой центр приведения, по отношению к которому главный момент равен нулю, а это, в свою очередь, имеет место в том и только в том случае, если наименьший момент или, что то же, инвариантный трехчлен T равен нулю. Если условие это выполнено и главный вектор системы отличен от нуля, то система эквивалентна главному вектору $\mathbf{R}$, приложенному в любой точке центральной оси системы (прямой действия этого вектора).

Если $\mathbf{R} = 0$, то главный момент $\mathbf{M}$ (рубр. 39) не зависит от центра приведения; если поэтому $M > 0$, то система ни в коем случае не эквивалентна одному вектору; если же и $M = 0$, то система эквивалентна нулевому вектору; в этом последнем случае говорят, что *система эквивалентна нулю*, или, что *она уравновешена*, что она *находится в равновесии.*

Относительно уравновешенной системы нужно иметь в виду, что ее момент относительно любой прямой также равен нулю (рубр. 38).

Важно еще заметить, что две системы эквивалентны, если одна из них получается из другой путем присоединения уравновешенной системы; в самом деле, совершенно ясно, что такое преобразование системы не изменяет ни ее главного вектора, ни главного момента.

Самым простым примером уравновешенной системы служат два вектора, обращенные в противоположные стороны на одной и той же прямой действия, или, как обыкновенно говорят, *прямо противоположные векторы.* Совершенно ясно, что уравновешенная система остается таковой, если к ней присоединить два прямо противоположные вектора.



Фиг. 19.

47. Элементарные операции. По отношению к заданной системе приложенных векторов следующие два приема носят название элементарных операций.

1) *Сложение или разложение векторов, приложенных к одной и той же точке* (т. е. замена какого угодно числа векторов системы, приложенных в одной и той же точке P, их суммой, приложенной в той же точке P; или обратно — замена какого угодно вектора, приложенного в некоторой точке P, несколькими другими, приложенными в той же точке и имеющими этот вектор своею суммой).

2) *Присоединение или устранение двух прямо противоположных векторов.*

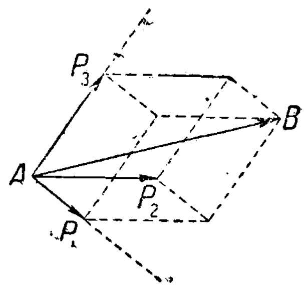
К числу элементарных операций можно еще отнести *перенесение вектора вдоль линии его действия*, т. е. замену какого угодно приложенного вектора $\overline{AB}$ (фиг. 19) равным ему вектором $\overline{CD}$, расположенным на той же прямой. В самом деле, эта последняя операция сводится к последовательному применению следующих двух элементарных операций: присоединяем к рассматриваемой системе два прямо противоположные вектора $\overline{CD}$ и $\overline{DC}$, затем устраняем в полученной после этого системе векторы $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$, также прямо противоположные.

Из сказанного следует, что последовательное производство над системой векторов какого угодно числа элементарных операций всегда приводит к системе, эквивалентной данной. Мы покажем ниже (рубр. 51), что и обратно, если две системы эквивалентны, то одну из них можно получить из другой путем выполнения ряда элементарных операций. Вследствие этого *две эквивалентные системы* называют также *приводимыми одна к другой*. Речь идет здесь, таким образом, о приведении одной системы к другой, выполняемом с помощью одних только элементарных операций.

Из этого следует, что за определение двух эквивалентных систем можно было бы принять их взаимную приводимость, как это, действительно, и делал Пуансо [1]).

48. Приводимость всякой системы к трем приложенным векторам. Пусть P_1, P_2, P_3 будут три точки пространства, не расположенные на одной прямой. Рассмотрим сначала один приложенный вектор $\overline{AB}$, начало которого не лежит в плоскости $P_1P_2P_3$.

Мы знаем (рубр. **15**), что вектор $\overline{AB}$ можно разложить на три вектора, центрированные в точке A и имеющие прямыми действия AP_1, AP_2, AP_3 (фиг. 20). Перенесем каждый из них на прямой действия так, чтобы они имели точками приложения соответственно P_1, P_2, P_3. Вектор $\overline{AB}$, таким образом, приведен одними элементарными операциями к трем векторам, приложенным в предназначенных точках P_1, P_2, P_3.



Фиг. 20.

Легко видеть, что такое приведение вектора $\overline{AB}$ всегда возможно также и в том случае, когда начало его A лежит в плоскости $P_1P_2P_3$. В самом деле, если вектор $\overline{AB}$ не лежит весь в плоскости $P_1P_2P_3$, то достаточно перенести его по линии действия: начало A выйдет тогда из плоскости $P_1P_2P_3$, и мы окажемся в условиях уже рассмотренного случая. Остается случай, когда прямая AB лежит в плоскости $P_1P_2P_3$. Но тогда из трех прямых AP_1, AP_2, AP_3, по крайней мере, две, скажем, AP_1 и AP_2, не совпадают; наш вектор можно тогда разложить на два (рубр. **15**) по прямым AP_1 и AP_2 (один из них может оказаться равным нулю), которые, следовательно, можно будет перенести в точки P_1 и P_2; приведение, таким образом, выполнено, три вектора будут приложены в точках P_1, P_2, P_3, но один из них (а может случиться, что и два) будет нулевым.

Установив это, уже легко доказать более общее предложение, что всякая система приложенных векторов может быть приведена к трем векторам, приложенным к трем произвольно выбранным точкам, не лежащим на одной прямой. Для этого, очевидно,

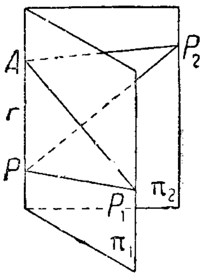
---

[1]) *Л. Пуансо* (Louis Poinsot) родился в Париже в 1777 г., умер также в Париже в 1859 г. Отличался редкой наглядностью и изяществом методов в исследовании многих глубоких вопросов, пользовался исключительно прямыми геометрическими средствами. Классическим является его сочинение „Éléments de statique“, Paris — Maillet Bochelier, 10-е издание которого появилось в 1861 г.

будет достаточно произвести требуемое приведение для каждого вектора системы в отдельности, а затем заменить векторы, приложенные в каждой точке, их суммой.

49. Приведение любой системы к двум приложенным векторам. Точнее мы здесь докажем, что любая система приложенных векторов может быть приведена (при помощи одних элементарных операций) к *двум* векторам, один из которых приложен в произвольно выбранной точке.

Выберем произвольно еще две дополнительные точки P_1 и P_2, не расположенные на одной прямой с точкой P (фиг. 21). Согласно доказанному, система может быть приведена к трем векторам $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ (между которыми могут оказаться и нулевые), соответственно приложенным к точкам P, P_1, P_2. Обозначим через π_1 плоскость, проходящую через точку P и содержащую вектор $\boldsymbol{v}_1$ (произвольную плоскость, проходящую через прямую PP_1, если $\boldsymbol{v}_1=0$); аналогично, через π_2 обозначим плоскость, проходящую через точку P и содержащую вектор $\boldsymbol{v}_2$ (произвольную плоскость, проходящую через прямую PP_2, если $\boldsymbol{v}_2=0$).



Фиг. 21.

Рассмотрим сначала наиболее общий случай, когда плоскости π_1 и π_2 не совпадают и прямая их пересечения r не содержит точек P_1 и P_2. На прямой r выберем произвольно точку A, отличную от P. Как известно (рубр. **14** и **41**), вектор $\boldsymbol{v}_1$, лежащий в плоскости π_1, эквивалентен двум векторам, приложенным в точке P_1 и лежащим на прямых AP_1 и PP_1; эти последние могут быть затем перенесены по прямым действия (рубр. **40**) соответственно в точки P и A. Выполнив такое же приведение по отношению к вектору $\boldsymbol{v}_2$, мы сможем заключить, что данная система приводится к трем векторам, приложенным в точке P, и двум, приложенным в точке A. Теперь достаточно сложить векторы, приложенные в точке A, а также векторы, приложенные в P, чтобы получить требуемое приведение системы к двум векторам, из которых один приложен к точке P.

То же самое рассуждение остается также в силе в исключительных случаях, когда плоскости π_1 и π_2 совпадают или когда прямая их пересечения проходит через одну из точек P_1 или P_2. Во всяком случае, если, скажем, точка P_1 лежит в обеих плоскостях, то достаточно совместить точку A с P_1, и все рассуждение можно будет провести, как выше [1]).

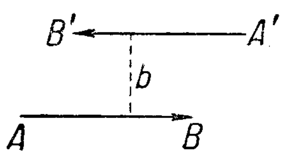
50. Пусть Σ будет какая-либо уравновешенная система (рубр. **46**), т. е. имеющая нулевой главный момент и нулевой главный вектор.

---

[1]) Вектор $\boldsymbol{v}_1$ при этом разлагать не придется, а вектор $\boldsymbol{v}_2$ разложим по направлениям AP_2 (P_1P_2) и PP_2; затем первую слагающую перенесем в P_1, а вторую в P *(Ред.)*

Если подвергнем ее приведению, указанному в предыдущей рубрике, то оба вектора, к которым приведение приводит, неизбежно окажутся прямо противоположными (в частности, они будут оба нулевыми, если один из них окажется нулевым); в самом деле, для того чтобы их сумма была равна нулю, эти векторы должны быть противоположны, т. е. (рубр. 15) равны по абсолютной величине и обращены в противоположные стороны; но они должны также иметь общую прямую действия, так как в противном случае их главный момент не обращался бы в нуль: это становится очевидным, если за центр приведения возьмем точку P, лежащую на одной из прямых действия.

Но всякая система, составленная из двух прямо противоположных векторов, при помощи второй элементарной операции (рубр. 47) приводится к одному нулевому вектору. Мы приходим, таким образом, к выводу, что всякая уравновешенная система приводится к *абсолютно нулевой системе*, т. е. не содержащей никаких векторов или, что сводится к тому же, состоящей исключительно из нулевых векторов.



Фиг. 22.

51. Взаимная приводимость двух эквивалентных систем. Теперь мы имеем уже возможность доказать (рубр. 47), что *каждая система* Σ_1 *может быть приведена к любой эквивалентной ей системе* Σ_2.

С этой целью рассмотрим систему Σ_2', составленную из приложенных векторов, прямо противоположных отдельным векторам системы Σ_2. Присоединяя к системе Σ_1 все векторы $\overline{AB}$ системы Σ_2 и соответствующие векторы $\overline{BA}$ системы Σ_2', мы убедимся, что система Σ_1 приводится к сложной системе, составленной из систем Σ_1, Σ_2, Σ_2'.

С другой стороны, каков бы ни был центр приведения, главный момент и главный вектор системы Σ_2', очевидно, равны и противоположны главному моменту и главному вектору системы Σ_2, а следовательно, и системы Σ_1. Вследствие этого векторы системы, составленной из систем Σ_1 и Σ_2', уравновешены; поэтому система Σ_1, Σ_2' может быть, как показано в рубр. 44, приведена к абсолютно нулевой системе. Отсюда следует, что система Σ_1, Σ_2, Σ_2' может быть приведена к одной системе Σ_2.

Таким образом, пользуясь исключительно элементарными операциями, можно перейти от системы Σ_1 к сложной системе Σ_1, Σ_2, Σ_2' и от нее к системе Σ_2.

52. Пары. *Парой* называется всякая система, составленная из двух *противоположных* приложенных векторов, т. е. параллельных, обращенных в противоположные стороны и равных по абсолютной величине (фиг. 22). Расстояние b между параллельными прямыми действия называется *плечом пары*. Иногда бывает полезно вводить еще понятие о *стороне обращения пары*, понимая под этим сторону вращения, которую одинаково определяют оба вектора в своей плоскости относительно произвольной точки O, лежащей между их прямыми действия.

Так как главный вектор всякой пары Г равен нулю, то главные моменты той же пары всегда выражаются эквиполлентными векторами, как бы мы ни выбирали центр приведения (рубр. 39).

Пусть $\overline{AB}$ и $\overline{A'B'}$ будут два вектора пары Г. Взяв за центр приведения точку приложения одного из двух векторов, например точку A', мы сейчас же увидим, что момент M пары Г совпадает с моментом второго вектора $\overline{AB}$; он имеет поэтому *длину, равную произведению из плеча пары b на общую длину обоих векторов*; *он перпендикулярен к плоскости пары и имеет относительно AB правостороннее направление* (рубр. 33).

Последнее обстоятельство относится к вектору M, приложенному в точке A'. По соображениям непрерывности вместо A' можно, очевидно, взять любую другую точку, расположенную относительно прямой AB с той же стороны, что и A', — в частности, любую точку P, лежащую внутри полосы, содержащейся между параллелями AB и $A'B'$. Вследствие этого сторону обращения момента M можно характеризовать, сохраняя симметрию относительно обоих векторов, если воспользоваться стороной обращения пары, которую они образуют. Это приведет к следующему предложению. *Для наблюдателя, стоящего ногами в точке O* (произвольно выбранной в полосе, ограниченной прямыми действия обоих векторов) *и обращенного головой в сторону момента M, обращение пары представляется правосторонним.*

53. Из того факта, что главный вектор пары всегда равен нулю, следует, что две пары эквивалентны в том и только в том случае, если для какого-либо центра приведения (а следовательно, и для любого центра) их моменты совпадают.

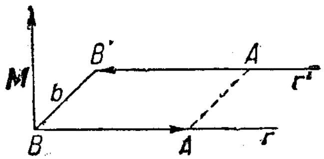
Теперь припомним (рубр. 46), что система с нулевым главным вектором может быть эквивалентна одному (нулевому) вектору только в том случае, если ее момент равен нулю (т. е. если составляющие ее векторы равны нулю или расположены на одной и той же прямой). Отсюда следует, что пара, момент которой отличен от нуля, никогда не может быть эквивалентной одному вектору.

54. Покажем теперь, что любой вектор M можно всегда и притом бесчисленным множеством способов рассматривать как момент некоторой пары Г, при этом бесполезно указывать полюс, так как (рубр. 52) момент пары не зависит от положения полюса.

Чтобы найти одну из таких пар, достаточно, например, взять плоскость π, перпендикулярную к вектору M, и на ней нанести две параллельные прямые r и r' (фиг. 23); если b есть расстояние между этими прямыми, то построим пару Г, приложив на прямых и r' два произвольных вектора $\overline{AB}$ и $\overline{A'B'}$, имеющих общую длину $\frac{M}{b}$ и обращенных таким образом, чтобы пара Г оказалась правосторонней по отношению к вектору M, приложенному в точке между параллелями r и r'.

55. Приводимость любой системы к одному вектору и одной паре. Из изложенного вытекает, что *любая система векторов эквивалентна другой системе, состоящей из одного вектора и одной пары.*

В самом деле, возьмем за центр приведения произвольную точку P и приложим в ней главный вектор R заданной системы, далее построим любую пару Г, имеющую своим моментом главный момент M заданной системы.



Фиг. 23.

Система, которая составлена из вектора R, приложенного в точке P, и из пары Г, эквивалентна данной системе. В самом деле, главным вектором ее служит R, а главным моментом — момент пары Г, т. е. M (ибо вектор R, приложенный в центре приведения P, не вносит никакой добавочной слагающей в состав главного момента системы).

56. В рубр. 46 было установлено, при каких условиях системы векторов эквивалентны одному вектору; теперь мы к этому можем прибавить, что система векторов эквивалентна одной паре в том и только в том случае, когда ее главный вектор равен нулю; в частности и эта пара может оказаться нулевой. Присоединяя этот результат к предыдущим, мы можем сделать следующий вывод.

Система, инвариантный трехчлен которой отличен от нуля (в каковом случае ни R, ни M не могут обратиться в нуль, ибо $T = MR$), *всегда эквивалентна одному вектору и одной паре.*

Система же, инвариантный трехчлен которой равен нулю, всегда приводится к более простой системе; эта последняя либо состоит из одного вектора, либо из одной пары, либо вовсе сводится к нулю. Первый случай имеет место, когда главный вектор системы R отличен от нуля (рубр. 46); второй — когда главный вектор R равен нулю, а главный момент M отличен от нуля; третий — когда совместно обращаются в нуль и R и M.

57. В качестве непосредственного приложения мы можем доказать, что следующие системы эквивалентны одному вектору или одной паре (или же, в частности, эквивалентны нулю):

1) *Плоские системы* (т. е. составленные из приложенных векторов, лежащих в одной и той же плоскости).

2) *Параллельные системы* (т. е. составленные из приложенных векторов, параллельных между собой).

Чтобы это доказать, достаточно обнаружить, что в этих случаях обращается в нуль инвариантный трехчлен.

Для плоской системы это обнаруживается, если мы выберем за центр приведения точку в ее плоскости. Моменты отдельных векторов в этом случае все перпендикулярны к той же плоскости, а потому к ней перпендикулярна и их сумма — главный момент системы (если он не обращается в нуль). Главный же вектор системы лежит в той же плоскости (или обращается в нуль). Поэтому скалярное произведение $T = MR$ обращается в нуль (рубр. 20).

В случае системы параллельных векторов, где бы ни был помещен центр приведения, главный момент M, очевидно, перпендикулярен к общему направлению векторов системы (или, в частности, обращается в нуль); главный же вектор, напротив, параллелен им; поэтому и в этом случае $MR = 0$.

Из предыдущей рубрики еще вытекает, что система, состоящая из любого числа каких угодно пар, эквивалентна одной паре, или, в частном случае, нулю, ибо главный вектор такой системы равен нулю.

58. Уравновешенные системы, составленные из двух или трех векторов. Рассмотрим теперь уравновешенные системы (рубр. 46), составленные из двух или трех векторов (само собою разумеется, не нулевых).

Для уравновешенных систем, составленных только из двух векторов, уже было показано (рубр. 50), что эти векторы должны быть прямо противоположными.

Для уравновешенных систем, составленных из трех векторов, можно показать, что такие векторы непременно расположены в одной плоскости и что их прямые действия либо встречаются в одной точке, либо параллельны между собой.

Пусть (A_1, v_1), (A_2, v_2), (A_3, v_3) будут эти три приложенные векторы, r_1, r_2, r_3 — их прямые действия. Если эти прямые совпадают, то требуемое свойство имеет место. Во всяком противном случае векторы можно перенести по прямой действия каждой из них таким образом, чтобы точки их приложения A_1, A_2, A_3 не лежали на одной прямой. Моменты векторов v_1 и v_2 относительно прямой A_1A_2 (ориентированной в ту или другую сторону — все равно) равны нулю (рубр. 37). Но сверх того должен быть равен нулю и главный момент системы (рубр. 46), поэтому момент вектора v_3 относительно той же прямой равен нулю, а потому вектор v_3 расположен в плоскости $A_1A_2A_3$ [1]).

Совершенно таким же образом докажем, что в той же плоскости должны лежать также и векторы v_1 и v_2. Таким образом, первая часть нашего утверждения вполне доказана.

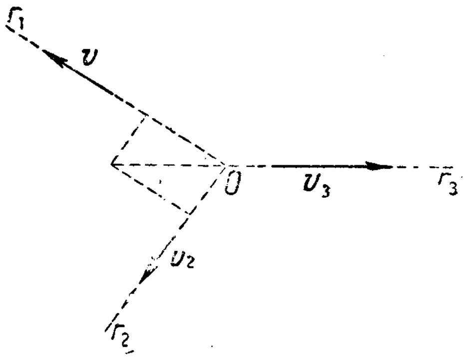
---

[1]) Если центр приведения P взят на прямой A_1A_2, то момент M_3 вектора v_3 перпендикулярен к прямой PA_3, а так как проекция этого момента на прямую A_1A_2 также равна нулю, то он перпендикулярен и к прямой A_1A_2; он перпендикулярен поэтому и к плоскости $A_1A_2A_3$; а так как вектор v_3 перпендикулярен к M_3, то он лежит в плоскости $A_1A_2A_3$. (*Ред.*)

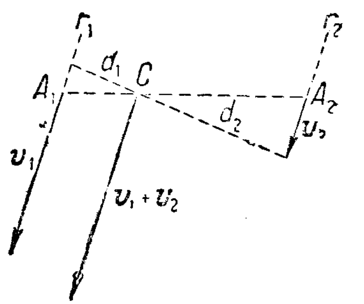
Обращаясь ко второй части, предположим сначала, что прямые r_1 и r_2 встречаются в точке O (фиг. 24). Перенесем два вектора v_1 и v_2 по прямым их действия так, чтобы оба они имели точкой приложения O; сложив после этого перенесения векторы, мы убедимся, что система v_1, v_2 эквивалентна одному вектору, приложенному в точке O. Этот вектор, заменяя собой систему v_1, v_2, от которой он произошел, должен составить вместе с v_3 уравновешенную систему, а для этого необходимо, чтобы он лежал с v_3 на одной прямой, т. е. чтобы прямая r_3 проходила через точку пересечения прямых r_1 и r_2.

Если, напротив, прямые r_1 и r_2 параллельны, то им должна быть параллельна и прямая r_3. В самом деле, если бы прямая r_3 пересекалась, скажем, с прямой r_1, то через точку их пересечения, согласно доказанному, должна была бы проходить и прямая r_2, что противоречит предположению.

В виде приложения вышеустановленного критерия укажем, что три вектора, приложенные в середине сторон треугольника (конечно, в его плоскости) и перпендикулярные к сторонам его в точках приложения, находятся в равновесии, если их длины пропорциональны соответствующим сторонам треугольника и если они все обращены либо внутрь треугольника, либо наружу.



Фиг. 24.



Фиг. 25.

7. Системы приложенных параллельных векторов.

59. В рубр. 57 мы видели, что всякая система приложенных параллельных векторов эквивалентна либо одному вектору, либо одной паре.

Чтобы этот результат уточнить, рассмотрим прежде всего систему двух векторов (A_1, v_1) и (A_2, v_2), *параллельных между собой, обращенных в одну и ту же сторону и приложенных соответственно в точках* A_1 *и* A_2 (фиг. 25).

Поскольку главный вектор системы (v_1, v_2) в этом случае отличен от нуля, она неизбежно эквивалентна (рубр. 56) одному вектору $v_1 + v_2$, приложенному в произвольной точке некоторой прямой, параллельной прямым действия r_1 и r_2 векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ и расположенной с ними в одной плоскости. Если прямые r_1 и r_2 совпадают, то с ними совпадает и прямая действия приложенного вектора $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$, эквивалентного нашей системе. Если мы этот последний случай исключим, то прямая действия вектора $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$ пересечет секущую A_1A_2 двух параллелей r_1 и r_2 в некоторой определенной точке C. Займемся разысканием этой точки. Вектор $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$, будучи приложен в точке C, имеет относительно нее нулевой момент; следовательно, главный момент системы относительно точки C также должен быть равен нулю; иными словами, моменты векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ относительно точки C должны иметь одну и ту же длину, но должны быть направлены в противоположные стороны. Так как оба момента перпендикулярны к плоскости векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, то последнее условие требует, чтобы по отношению к перпендикуляру к той же плоскости в точке C, в какую бы сторону он ни был обращен, векторы $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, в свою очередь, представлялись обращенными в противоположные стороны: один в правую, другой в левую; а это означает, что точка должна быть расположена между параллелями r_1 и r_2; точнее, она должна лежать внутри отрезка A_1A_2.

С другой стороны, если обозначим через d_1 и d_2 расстояния (нам еще неизвестные) точки C от прямых r_1 и r_2, то моменты векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ относительно C имеют длины d_1v_1 и d_2v_2; а так как эти длины должны быть равны, то

$$d_1v_1=d_2v_2;$$

или, иначе:

$$d_1:d_2=v_2:v_1.$$

Но так как в силу очевидного подобия треугольников

$$d_1:d_2=A_1C:CA_2,$$

то

$$A_1C:CA_2=v_2:v_1;$$

это значит: *система двух параллельных приложенных векторов, обращенных в одну сторону, эквивалентна одному вектору, равному их сумме; этот результирующий вектор приложен к точке, которая лежит внутри отрезка, соединяющего точки приложения рассматриваемых векторов, и делит этот отрезок на части, обратно пропорциональные длинам этих векторов.*

Отсюда следует, что точка C не зависит от направления двух векторов, а определяется точками их приложения и их длинами, — точнее, отношением их длин. Другими словами, точка C не изменится, если мы повернем векторы $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ вокруг точек их приложения (сохраняя их параллельность) и в то же время увеличим (или уменьшим) их длины в одном и том же отношении.

60. Теперь обратимся к системе $(A_1, \boldsymbol{v}_1)$ и $(A_2, \boldsymbol{v}_2)$, *составленной из двух параллельных приложенных векторов, но обращенных в противоположные стороны*; пусть A_1 и A_2 будут точки их приложения (фиг. 26). Если исключим уже рассмотренный случай пары (в частности, двух прямо противоположных векторов), то длины этих векторов будут различны; пусть, скажем, $v_1 > v_2$.

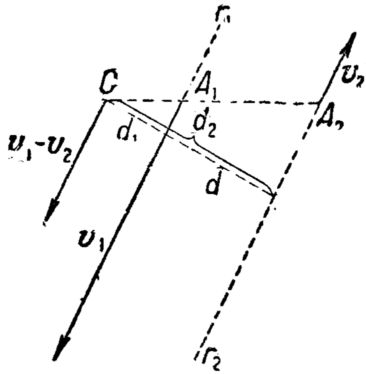
Если прямые действия r_1 и r_2 совпадают, то система, очевидно, эквивалентна одному вектору, который имеет ту же линию действия, обращен в сторону большего вектора $\boldsymbol{v}_1$ и имеет длину $v_1 - v_2$ (разность длин данных векторов).

Если прямые r_1 и r_2 различны, то прямая действия приложенного вектора $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, эквивалентного системе $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$, пересекает прямую A_1A_2 в некоторой точке C; длина вектора $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ в этом случае равна $v_1 - v_2$. Рассуждением, вполне аналогичным тому, которое приведено в предыдущей рубрике, мы обнаружим, что точка C должна быть расположена вне отрезка A_1A_2 и должна отстоять от прямых r_1 и r_2 на расстояния d_1 и d_2, при которых

$$d_1v_1 = d_2v_2, \text{ т. е. } d_1 : d_2 = v_2 : v_1.$$

Отсюда следует

$$A_1C : A_2C = v_2 : v_1.$$



Фиг. 26.

Так как, по предположению, $v_2 < v_1$, то таким же образом $A_1C < A_2C$; это значит — точка C упадет на продолжение отрезка A_1A_2 со стороны вектора $\boldsymbol{v}_1$, имеющего большую длину.

Все сказанное приводит к следующему выводу: *система, состоящая из двух параллельных векторов, которые имеют различные длины и обращены в противоположные стороны, эквивалентна одному вектору, равному сумме $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$; этот результирующий вектор приложен в точке, которая делит отрезок, соединяющий точки приложения данных векторов, внешне на части, обратно пропорциональные длинам двух векторов.*

И в этом случае положение точки C на прямой A_1A_2 зависит только от точек A_1 и A_2 и от отношения $\frac{v_2}{v_1}$; оно сохраняет свое положение, если оба вектора повернем на один и тот же угол или изменим их длины в одном и том же отношении.

Как в том случае, когда векторы обращены в одну и ту же сторону, так и в случае, когда они обращены в противоположные стороны, точка C называется *центром системы параллельных векторов* $(A_1, \boldsymbol{v}_1)$, $(A_2, \boldsymbol{v}_2)$.

61. Если обозначим через d ширину полосы r_1r_2, так что (при сделанном предположении $v_1 > v_2$) $d_2 = d + d_1$, то из соотношения $d_1v_1 = (d + d_1)v_2$ получим:

$$d_1 = \frac{dv_2}{v_1 - v_2}.$$

Если будем сохранять постоянным и расстояние d прямых действия и длину вектора $\boldsymbol{v}_2$, но в то же время будем уменьшать длину вектора $\boldsymbol{v}_1$ так, чтобы она стремилась к v_2, то d_1 будет неограниченно возрастать; это значит, центр двух параллельных векторов, стремящихся составить пару, неограниченно удаляется.

Поэтому пара (рассматриваемая как предельный случай системы двух параллельных векторов, направленных в противоположные стороны, когда их длины стремятся к совпадению) часто уподобляется бесконечно малым и в то же время бесконечно удаленным векторам.

62. В третью очередь рассмотрим систему Σ, состоящую из нескольких приложенных векторов $(A_1, \boldsymbol{v}_1)$, $(A_2, \boldsymbol{v}_2), \ldots, (A_n, \boldsymbol{v}_n)$, параллельных и обращенных в одну и ту же сторону; как обыкновенно, обозначим через v_i длину вектора $\boldsymbol{v}_i$ $(i=1, 2, 3, \ldots, n)$.

Из рубр. 59 следует, что векторы $(A_1, \boldsymbol{v}_1)$ и $(A_2, \boldsymbol{v}_2)$ можно заменить одним вектором $(C^{(1)}, \boldsymbol{R}_1)$, имеющим то же направление и ту же сторону обращения, что и данные векторы; далее, векторы $(C^{(1)}, \boldsymbol{R}_1)$ и $(A_3, \boldsymbol{v}_3)$ можно заменить вектором $\boldsymbol{R}_3$, имеющим то же самое направление. Следуя этому пути далее, мы придем к определенному приложенному вектору $(C, \boldsymbol{R})$ [для сохранения единства обозначений его следовало бы, собственно, обозначить через $(C^{(n-1)}, \boldsymbol{R}_{n-1})$], который эквивалентен данной системе векторов Σ, имеет общее с ними направление и обращен в ту же сторону. Из соображений той же рубрики 59 следует, что длина вектора R равна сумме длин данных векторов: $R=\sum_1^n {}_i v_i$. Ясно также, что линия действия вектора $\boldsymbol{R}$ проходит через точку C, которая может быть получена следующим образом: на отрезке A_1A_2 нужно взять точку $C^{(1)}$ таким образом, чтобы отношение отрезков $A_1C^{(1)}$ к $C^{(1)}A_2$ было равно $v_2:v_1$; далее, на отрезке $C^{(1)}A_3$ взять точку $C^{(2)}$ таким образом, чтобы отношение $\dfrac{C^{(1)}C^{(2)}}{C^{(2)}A_3}$ было равно $\dfrac{v_3}{v_1+v_2}$, и т. д.; наконец, на отрезке $C^{(n-2)}A_n$ нужно взять точку C так, чтобы

$$\frac{C^{(n-2)}C}{CA_n}=\frac{v_n}{v_1+v_2+\ldots+v_{n-1}}.$$

Из этого геометрического построения явствует, что положение точки C не изменится, если мы изменим общее направление всех векторов, сохраняя их начала и их длины (или — более общим образом — сохраняя отношение их длин).

Далее, если через x_i, y_i, z_i обозначим координаты точки A_i, то из элементарных соображений аналитической геометрии следует, что координаты x_0, y_0, z_0 точки C даны формулами:

$$x_0 = \frac{\sum_1^n {}_i v_i x_i}{R}, \quad y_0 = \frac{\sum_1^n {}_i v_i y_i}{R}, \quad z_0 = \frac{\sum_1^n {}_i v_i z_i}{R}. \tag{34}$$

Эти формулы обнаруживают, что мы придем к той же точке C, в каком бы порядке ни были взяты данные точки.

Полезно еще отметить, что формулы (42) можно объединить в одной векториальной формуле, вводя вместо координат точек A_i их радиусы-векторы относительно любого начала O, именно

$$\overline{OC} = \frac{\sum_1^n v_i \overline{OA_i}}{R}; \tag{34'}$$

это явно вытекает из того факта, что мы придем вновь к формулам (34), если возьмем компоненты радиусов-векторов $\overline{OA_i}$ и $\overline{OC}$ по осям координат.

63. Что система $\sum$ эквивалентна вектору $\boldsymbol{R} = \sum_1^n {}_i \boldsymbol{v}_i$, приложенному в точке C, можно доказать чисто аналитически следующим образом.

Обозначим через $\boldsymbol{k}$ общий версор всех данных векторов, т. е. единичный вектор, имеющий то же направление и ту же сторону обращения, что и данные векторы. Тогда (рубр. 17) $\boldsymbol{v}_i = v_i\boldsymbol{k}$ и

$$\sum_1^n {}_i \boldsymbol{v}_i = \sum_1^n {}_i v_i \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \sum_1^n v_i = \boldsymbol{k}R.$$

Теперь составим главный момент $\boldsymbol{M}$ системы относительно точки O. Каждый вектор даст для этого слагающую (рубр. 34):

$$[\overline{OA_i}\boldsymbol{v}_i] = v_i[\overline{OA_i}\,\boldsymbol{k}].$$

Суммируя эти равенства и опираясь на равенства (34'), мы получим:

$$\boldsymbol{M} = R\ [\overline{OC}\ \boldsymbol{k}] = [\overline{OC}\ R\boldsymbol{k}] = [\overline{OC}\ \boldsymbol{R}].$$

Отсюда ясно, что момент $\boldsymbol{M}$ системы $\sum$ (относительно точки O) совпадает с аналогичным моментом одного вектора $\boldsymbol{R}$, приложенного в точке C. Этот вектор, таким образом, эквивалентен системе $\sum$.

64. Рассмотрим, наконец, систему $\sum$, составленную из нескольких параллельных векторов, которые не все обращены в одну и ту же сторону; пусть $\sum_1$ и $\sum_2$ будут две системы, составленные из векторов системы $\sum$, обращенных в одну и другую стороны.

В силу того, что установлено в предыдущей рубрике, каждая из систем $\sum_1$ и $\sum_2$ может быть приведена к одному вектору; приведение системы сводит ее, таким образом, к двум векторам, обращенным в противоположные стороны,— случай, рассмотренный в рубр. 60.

Обозначим через v_i $(i=1, 2, 3, \ldots, p)$ длины векторов системы $\sum_1$, через w_j $(j=1, 2, 3, \ldots, q)$ длины векторов системы $\sum_2$; далее, положим:

$$R=\sum_1^p{}_i v_i, \quad S=\sum_1^q{}_i w_j.$$

Если $R=S$ система сводится к паре (а в частном случае просто к нулю).

Если же $R \neq S$, то система эквивалентна одному вектору, приложенному в некоторой точке C, положение которой зависит от длин векторов системы $\sum$, от положения точек их приложения, но не от общего их направления.

Во всех случаях точка C называется *центром* системы параллельных векторов.

8. Диференцирование переменного вектора.

65. Предположим, что каждому значению параметра t, содержащемуся в интервале между t_0 и t_1, соответствует вектор $\boldsymbol{v}$, однозначно определенный.

В соответствии с таким расширением понятия о функции (со скалярных величин на векторы) мы будем при этих условиях говорить, что вектор $\boldsymbol{v}$ представляет собою *функцию параметра* (или *независимой переменной*) t в интервале от t_0 до t_1, и будем писать $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)$. Такая векторная функция $\boldsymbol{v}(t)$ называется *конечной* в интервале от t_0 до t_1, если в этом интервале остается конечным модуль $v(t)$; она называется непрерывной при данном значении t, если каждому положительному числу ε, как бы мало оно ни было, соответствует охватывающая это значение окрестность, для каждого значения которой t' векторная разность $\boldsymbol{v}(t')-\boldsymbol{v}(t)$ становится по модулю меньше ε.

Выбрав между t и t_1 произвольный интервал от t до $t+\Delta t$, положим:

$$\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)$$

и рассмотрим вектор

$$\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t},$$

который мы будем называть *вектором среднего нарастания* функции $\boldsymbol{v}(t)$ в интервале от t до $t+\Delta t$. Сохраняя неизменным значение t, будем уменьшать значение Δt, неограниченно приближая его к нулю; если при этом вектор среднего нарастания стремится к определенному вектору (в том смысле, что либо длина его стремится к нулю, и тогда предельный вектор будет нулевым, либо же как длина, так и направление стремятся соответственно к определенным предельным значениям), то этот предел называется *производной векторной функции* $\boldsymbol{v}(t)$ для данного значения t параметра и обозначается через $\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt}$ или, проще, через $\dot{\boldsymbol{v}}(t)$.

Если при этом изменении вектор все время остается параллельным одной и той же прямой или одной и той же плоскости, то то же имеет место по отношению к разности $\Delta\boldsymbol{v}$, а потому и по отношению к вектору среднего нарастания; поэтому той же прямой или той же плоскости будет параллелен и предельный вектор $\dot{\boldsymbol{v}}(t)$.

Так как вектор $\dot{\boldsymbol{v}}(t)$, в свою очередь, представляет собой функцию от t, то можно определить производную от векторной функции $\dot{\boldsymbol{v}}(t)$; ее называют *второй производной* вектора $\boldsymbol{v}$ и обозначают символом $\frac{d^2\boldsymbol{v}}{dt^2}$ или $\ddot{\boldsymbol{v}}(t)$; таким же образом определяются производные более высоких порядков.

66. Из того факта, что вектор среднего нарастания $\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$ стремится к пределу $\boldsymbol{v}$, когда Δt стремится к нулю, следует, что разность

$$\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}-\dot{\boldsymbol{v}}=\bar{\varepsilon}$$

представляет собою *бесконечно-малую*, совместно со скаляром Δt в том смысле, что длина вектора $\bar{\varepsilon}$ становится бесконечно-малой вместе с Δt. Обобщая поэтому хорошо известную терминологию исчисления бесконечно-малых, мы можем сказать, что разность

$$\Delta\boldsymbol{v}-\dot{\boldsymbol{v}}\,\Delta t=\bar{\varepsilon}\,\Delta t$$

представляет собою относительно Δt бесконечно-малую порядка выше первого.

Подставляя вместо Δt, как в анализе, dt, мы будем также называть *диференциалом* (векторной) *функции* $\boldsymbol{v}(t)$ произведение $\dot{\boldsymbol{v}}\,dt$ и будем его обозначать через $d\boldsymbol{v}$; вместе с тем, мы можем высказать предложение, совершенно совпадающее с тем, которое имеет место для скалярных функций: наращение $\Delta\boldsymbol{v}$, которое получает $\boldsymbol{v}$ в элементарном интервале dt, отличается от $d\boldsymbol{v}$ на бесконечно-малую порядка выше первого.

67. Если мы отнесем вектор $\boldsymbol{v}(t)$ к декартовым осям $Oxyz$, то его компоненты X, Y, Z, очевидно, представляют собой функции t;

если, сверх того, векторная функция однозначна, конечна и непрерывна, то, очевидно, непрерывны и скалярные функции $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$, и обратно.

Вектор среднего нарастания функции $\boldsymbol{v}$ имеет компоненты:

$$\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}, \quad \frac{Y(t+\Delta t)-Y(t)}{\Delta t}, \quad \frac{Z(t+\Delta t)-Z(t)}{\Delta t},$$

т. е. средние нарастания соответствующих скалярных функций; отсюда следует, что существование производной $\dot{\boldsymbol{v}}(t)$ влечет за собой существование производных от компонент, и обратно. Таким образом вопрос о существовании векторных производных сводится к тому, допускают ли производные соответствующих порядков их скалярные компоненты X, Y, Z и т. д.

Предыдущие соображения доказывают, кроме того, что компоненты производной $\dot{\boldsymbol{v}}$ вектора $\boldsymbol{v}$ выражаются скалярными производными $\dot{X}$, $\dot{Y}$, $\dot{Z}$; компоненты производной второго порядка $\ddot{\boldsymbol{v}}$ выражаются через $\ddot{X}$, $\ddot{Y}$, $\ddot{Z}$ и т. д.

68. Из сказанного следует, что для векторного диференцирования имеют силу правила обыкновенного диференцирования. Например, производная постоянного вектора равна нулю; два вектора, имеющие равные производные, отличаются один от другого на постоянный вектор; производная суммы двух векторов равна сумме производных слагающих векторов; если вектор $\boldsymbol{v}$ представляет собою функцию переменной s, которая, в свою очередь, зависит от параметра t, то (правило диференцирования сложной функции)

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{v}}{ds}\,\frac{ds}{dt} \quad \text{и т. д.}$$

Если m означает скаляр, а $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ векторы, причем как m так и $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ зависят от параметра t, то по отношению к произведениям трех типов:

$$m\boldsymbol{v}_1, \quad \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2, \quad [\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2]$$

применимо то же правило диференцирования, которое имеет место по отношению к обыкновенному произведению; это значит, имеют место формулы:

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}_1)=\frac{dm}{dt}\boldsymbol{v}_1+m\frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt};$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2)=\frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt}\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_1\frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt};$$

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2]=\left[\frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt}\boldsymbol{v}_2\right]+\left[\boldsymbol{v}_1\frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt}\right].$$

Доказательство во всех этих случаях получается непосредственно; для первой и третьей формул достаточно обратиться к компонентам (рубр. 17 и 27) и показать, что соответствующие компоненты правой и левой частей, действительно, совпадают.

Для доказательства второй формулы достаточно развернуть левую часть согласно формуле (15) рубр. 20 и констатировать, что диференцирование дает тот же результат, что и в правой части[1]).

Интересное следствие правила диференцирования скалярного произведения получим, если положим $v_1 = v_2 = v$ и допустим что вектор v имеет постоянную длину; тогда постоянное значение имеет и произведение $v = v^2$, диференцируя которое получаем $v \frac{dv}{dt} = 0$; а это означает: *производная вектора v, который меняется (по направлению), сохраняя постоянную длину, перпендикулярна к вектору v или равна нулю.*

69. Предыдущие соображения показывают, как можно распространить на векторные функции формальные результаты диференциального исчисления.

Так, например, можно установить, как и в диференциальном исчислении, разложение, соответствующее строке Тэйлора, остановленное на произвольном члене (правда, при несколько менее определенном выражении остаточного члена).

В первую очередь имеет место так называемая теорема о среднем значении, которая остается в силе для любой векторной функции, конечной и непрерывной, вместе со своей первой производной в интервале (t, t_1). Соответствующая формула (которую можно также установить, применяя разложение Тэйлора к компонентам), гласит:

$$v(t_1) = v(t) + (t_1 - t)\,\{\dot{v}(t) + \bar{\varepsilon}\}, \tag{35}$$

где $\bar{\varepsilon}$ может быть в общем случае определено только[2]) как (векторная) функция от t_1 (и от t), конечная и непрерывная, стремящаяся к нулю вместе с разностью $t_1 - t$. При такой неопределенности функции $\bar{\varepsilon}$ соотношение (35) вносит нечто существенное только в том случае, когда t_1 стремится к t. С другой

---

[1]) Заметим, что в этом постоянном апеллировании к компонентам нет необходимости: каждая из этих формул может быть доказана непосредственно, совершенно аналогично тому, как соответствующее соотношение доказывается для скалярных функций. Так, если через f обозначим произведение $v_1 v_2$, то

$$f = v_1 v_2,\ f + \Delta f = (v_1 + \Delta v_1)\ (v_2 + \Delta v_2);$$

$$\Delta f = v_2\ \Delta v + v_1 \Delta v_2 + \Delta v_1\ \Delta v_2;$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{\Delta v_1}{\Delta t} v_2 + v_1 \frac{\Delta v_2}{\Delta t} + \frac{\Delta v_1}{\Delta t}\ \Delta v_2.$$

Отсюда, переходя к пределу, получим требуемое соотношение, конечно, в предположении, что отношения $\frac{\Delta v_1}{\Delta t}$ и $\frac{\Delta v_2}{\Delta t}$ стремятся к конечным пределам. (*Ред.*)

[2]) В отличие от приращения скалярной функции, где остаточный член может быть в аналогичном случае выражен произведением из $\frac{(t_1 - t)^2}{2}$ и значения второй производной при некотором промежуточном значении t. (*Ред.*)

стороны, разность $v(t_1) - v(t)$ есть не что иное, как наращение Δv; поэтому соотношение (35) не прибавляет ничего нового к тому, что было изложено в рубр. 66.

Если предположить, далее, что в том же интервале остается конечной и непрерывной и вторая производная $\ddot{v}$, то разложение можно продлить до второго члена, именно:

$$v(t_1) = v(t) + (t_1 - t)\,\dot{v}(t) + \frac{1}{2}(t_1 - t)^2\,\{\ddot{v}(t) + \bar{\varepsilon}\}, \tag{36}$$

где $\bar{\varepsilon}$ опять-таки стремится к нулю вместе с разностью $t_1 - t$.

Разумеется, это $\bar{\varepsilon}$, вообще говоря, отлично от того, которое фигурировало в (35).

70. Предположим, что каждой точке P некоторой кривой l соответствует некоторый вектор $v(P)$, однозначно в этой точке определенный. Мы имеем в этом случае *вектор, представляющий собою функцию точек кривой.* Но легко видеть, что это понятие не отличается существенно от понятия о векторе как функции параметра, которое установлено выше. В самом деле, представим себе, что точкам кривой l однозначно и непрерывно отнесены значения некоторого параметра, например длина s дуги кривой l (отсчитываемая от какой-либо постоянной ее точки в определенную сторону). Если вектор v представляет собою однозначную и непрерывную функцию точки P, то его можно рассматривать также как такую же функцию параметра s и обратно.

Наряду с функциями точек кривой часто приходится рассматривать также *функции точек поверхности или некоторой области пространства.* Мы получим, например, векторную функцию точек поверхности, если каждой ее точке отнесем вектор определенной длины (постоянной для всех точек или меняющейся от точки к точке), приложенный в точке P и направленный по нормали к поверхности в определенную сторону.

В физике мы особенно часто встречаем векторы, явно представляющие собою функции точек некоторой области в пространстве. Достаточно остановиться на понятии о силовом поле, которое мы считаем настолько известным из физики, что будем им свободно оперировать в дальнейшем. Другой пример представляет собою некоторая масса движущейся жидкости, если каждой точке области, в которой имеет место движение, отнесем вектор, выражающий направление и силу (напряжение) тока [1]).

Наконец, если дан приложенный вектор v и каждой точке P пространства отнесем вектор M, представляющий собою момент данного вектора v относительно точки P, то мы будем иметь векторную функцию M точек пространства.

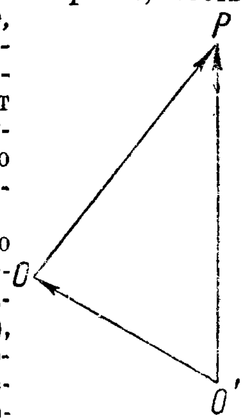
Подобно тому как векторы, представляющие собою функции точек кривой, можно рассматривать как геометрическое изобра-

[1]) Здесь можно представить себе, что жидкость занимает некоторую часть пространства, например наполняет неподвижный сосуд, а движение заключается в передвижении частиц жидкости внутри нее. (*Ред.*)

жение функции (векторной) одного параметра, так векторные функции точек поверхности или пространственной области можно рассматривать как *геометрические функции соответственно двух или трех параметров*. Естественно, обобщение этих идей приводит *к векторным функциям какого угодно числа параметров*; совершенно ясно, как в каждом таком случае нужно понимать непрерывность функции.

9. Диференцирование переменной точки.

71. Подобно тому как это сделано для векторов, мы предположим, что при тех или иных условиях каждому значению параметра t (содержащемуся в определенном интервале) соответствует некоторая точка P. Так, например, если s, как выше, означает длину дуги некоторой кривой, отсчитываемой от определенного начала, то каждому значению s отвечает определенная точка P кривой. В таких случаях мы будем, естественно, говорить, что *точка P представляет собою функцию параметра t* и будем ее обозначать через $P(t)$.



Фиг. 27.

Предположим теперь, что речь идет о *непрерывной функции* $P(t)$, т. е. что значениям t' параметра, достаточно близким к значению t, всегда соответствуют точки $P(t')$, сколь угодно близкие к $P(t)$. При этих условиях естественно перенести и на эти своеобразные функции понятие о диференцировании и о производных различных порядков. К этому приводят следующие соображения.

Выберем произвольно начало O; тогда радиус-вектор $\overline{OP}$ точки P представляет собою вместе с P функцию параметра t. Эта функция зависит, однако, не только от t, но и от положения начала O. Однако *производная радиуса-вектора* $\frac{d\overline{OP}}{dt}$ *от положения начала не зависит*. В самом деле, если выберем другое начало O' (фиг. 27), то

$$\overline{O'P} = \overline{O'O} + \overline{OP};$$

так как вектор $\overline{O'O}$ при изменении положения точки P остается постоянным, то (рубр. 68)

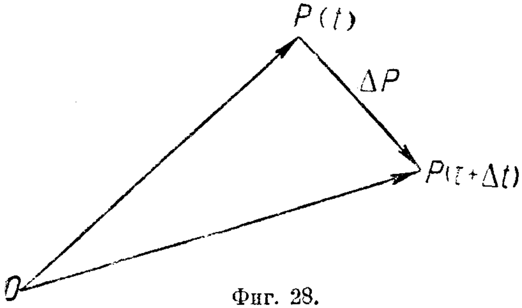
$$\frac{d\overline{O'P}}{dt} = \frac{d\overline{OP}}{dt}.$$

Производная $\frac{d\overline{OP}}{dt}$ определяется, таким образом, вполне функцией $P(t)$. Ее целесообразно рассматривать поэтому как *производную точки*, т. е. как производную функции $P(t)$; в письме:

$$P' = \frac{dP}{dt} = \frac{dP(t)}{dt} = \frac{d\overline{OP}}{dt} \tag{37}$$

72. Если точка P остается постоянной то постоянное значение сохраняет также и радиус-вектор $\overline{OP}$, а потому (рубр. 68) производная $\dot{P}$ в этом случае равна нулю.

Заметим, что при координации предыдущей рубрики независимым от выбора начала является не только производный вектор $\dot{\overline{OP}}$, но и наращение, которое этот вектор получает, когда мы переходим от значения параметра t к значению $t+\Delta t$.



Фиг. 28.

В самом деле, это наращение представляет собою вектор, идущий от точки $P(t)$ к точке $P(t+\Delta t)$ (фиг. 28), и, следовательно, сохраняет свое значение, как бы мы ни меняли начало O. Поэтому и это наращение можно рассматривать как наращение функции $P(t)$, что и выражается положением:

$$\Delta P = P(t+\Delta t) - P(t) = \overline{OP}(t+\Delta t) - \overline{OP}(t) = \overline{PP'}, \qquad (37')$$

где $P' = P(t+\Delta t)$. Можно сказать, именно то обстоятельство, что наращение $\Delta\overline{OP}$ не зависит от выбора начала O, влечет за собой независимость от начала производной $\dot{\overline{OP}}$; этим и оправдываются обозначения (37) и (37'). Существенно важно отдавать себе ясный отчет в том, что *как* ΔP, *так и* $\dot{P}$ *суть векторы*.

Вообще, когда t изменяется непрерывно, то точка $P(t)$ описывает непрерывную кривую l; наращение ΔP представляет собою вектор, изображаемый хордой этой кривой, идущей от точки $P(t)$ к точке $P(t+\Delta t)$. Поэтому предельный вектор $\dot{P}$ имеет направление касательной к кривой l в точке $P(t)$. Еще точнее, если как для кривой l, так и для соответственных касательных примем за положительную сторону обращения ту, в которую возрастают значения параметра t, то производная $\dot{P}(t)$ имеет то же направление и ту же сторону обращения, что и касательная в точке t.

Далее, как и в случае вектора (рубр. 66), введем *понятие диференциале переменной точки* $P(t)$, полагая

$$dP = \dot{P}\,dt.$$

При этом определении сохраняется и основное свойство диференциала; именно, наращение *функции* (*точки*) $\Delta P(t) = P(t+\Delta t) - P(t)$ *отличается от диференциала* $dP(t)$ *на бесконечно-малую порядка выше первого*. В соответствии с этим диференциал dP часто *называют элементарным смещением точки* P (относительно бесконечно малого интервала dt).

73. Относительно существования производной $\dot{P}(t)$ и аналитического выражения ее компонент имеют место соображения, совпадающие с теми, которые были развиты по отношению к векторам в рубр. 67. В самом деле, координаты

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

точки $P(t)$ представляют собою в то же время компоненты радиуса-вектора $\overline{OP}$. Поэтому для существования производной $\dot{P}(t)$ необходимо и достаточно, чтобы существовали производные $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{z}(t)$, которые и представляют собой компоненты производной $\dot{P}(t)$ по осям координат.

Отсюда вытекает, в частности, справедливость правила диференцирования сложной функции: *если P зависит от t через посредство другого параметра s, который, в свою очередь, представляет собою функцию от t, то*

$$\dot{P} = \frac{dP}{ds}\dot{s}.$$

Наконец, отметим еще, что, поскольку производная $\dot{P}(t)$ переменной точки $P(t)$ представляет собою вектор, зависящий от параметра t, можно рассматривать производную от $\dot{P}(t)$. Этот новый вектор называется *второй производной* точки $P(t)$ и обозначается через $\frac{d^2P}{dt^2}$ или через $\ddot{P}$; его компонентами служат вторые производные $\ddot{x}(t)$, $\ddot{y}(t)$, $\ddot{z}(t)$. Таким же образом определяются производные от $P(t)$ порядка выше второго.

74. Пусть $\overline{OP}$ будет переменный вектор, приложенный в постоянной точке O. Мы можем принять O за начало и смотреть на $\overline{OP}$ как на радиус-вектор переменной точки $P(t)$. Тогда

$$\dot{\overline{OP}}(t) = \dot{P}(t).$$

Иными словами, *производная переменного вектора $\overline{OP}$, выходящего из постоянной точки O, есть вектор, совпадающий с производной его свободного конца.* По существу, это лишь иначе формулированное определение производной переменной точки. То же относится, конечно, и к производным более высоких порядков.

Перефразировав рассуждения рубр. 69, касающиеся разложения (36) переменного вектора в строку Тэйлора, мы придем к такому же разложению переменной точки, именно:

$$\Delta P(t) = P(t_1) - P(t) = (t_1 - t)\dot{P}(t) + \frac{1}{2}(t_1 - t)^2\{\ddot{P}(t) + \bar{\varepsilon}\}, \tag{38}$$

где $\bar{\varepsilon}$ стремится к нулю вместе с разностью $t_1 - t$; как левая, так и правая части представляют собою векторы, зависящие от t.

75. Особого указания заслуживает случай, в котором параметр t совпадает с длиной дуги s, описанной переменной точкой P. Точнее, предположим, как в рубр. 70, что задана определенная кривая l и на ней отсчитываются длины s дуг, начиная от некоторой произвольно выбранной точки P_0; число s

считается положительным в одну сторону от P_0 и отрицательным в другую. Каждому значению s (в интервале, зависящем от участка кривой l, в пределах которого производится исследование), таким образом, отвечает определенная точка P кривой.

Остановимся на производной

$$t = \frac{dP}{ds}$$

этой точки, представляющей собою функцию дуги s. Мы уже знаем (рубр. 73), что эта производная представляет собою вектор, направленный по касательной к кривой в точке P и обращенный в сторону возрастающих значений криволинейной абсциссы s.

Но в данном случае имеет место особое обстоятельство, заключающееся в том, что длина вектора t всегда равна 1. Чтобы в этом убедиться, достаточно обратиться к определению вектора t, представляющего собою предел отношения наращений $\frac{\Delta P}{\Delta s}$. Длина вектора $\frac{\Delta P}{\Delta s}$ есть отношение длины хорды (длины вектора ΔP, см. рубр. 73) к длине дуги Δs. Как известно, это отношение имеет пределом 1; это и есть длина вектора t.

10. Интегрирование векторов.

76. Пусть v будет переменный вектор, представляющий собой непрерывную функцию параметра t в некотором интервале (t_0, t_1); пусть X, Y, Z будут соответствующие компоненты.

При этих условиях будут вполне определены интегралы:

$$\int_{t_0}^{t_1} X\,dt, \quad \int_{t_0}^{t_1} Y\,dt, \quad \int_{t_0}^{t_1} Z\,dt.$$

Вектор I, имеющий значения этих интегралов своими компонентами, называется *определенным интегралом вектора* v, взятым в интервале (t_0, t_1), и обозначается символом:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} v\,dt.$$

Очень легко показать, что определенный таким образом интеграл I можно, действительно, рассматривать как предел суммы (векториальной), которая получается, если разделим интервал (t_0, t_1) на элементы Δt и любое значение вектора v внутри каждого интервала Δt помножим на его длину Δt, а затем полученные таким образом произведения (векторы) сложим [1]).

[1]) Если мы составим компоненты каждого слагаемого, то они, очевидно, выразятся произведениями $X'\Delta t$, $Y'\Delta t$, $Z'\Delta t$, где X', Y', Z' суть компоненты взятого внутри интервала Δt вектора v. Поэтому вся векторная сумма $\sum v\Delta t$ будет иметь компонентами суммы

$$\sum X'\Delta t, \quad \sum Y'\Delta t, \quad \sum Z'\Delta t,$$

имеющие своими пределами приведенные в тексте интегралы, которыми определяются компоненты вектора I. (*Ред.*)

77. Если вместо постоянного интервала (t_0, t_1) возьмем интервал (t_0, t), в котором верхний предел t является переменным, то соответствующий интеграл:

$$\boldsymbol{I}(t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{v}\,dt, \tag{39}$$

есть вектор, представляющий собой функцию параметра t; эта функция, очевидно, имеет своей производной $\boldsymbol{v}(t)$; иными словами, из соотношения (39) следует:

$$\frac{d\boldsymbol{I}(t)}{dt}=\boldsymbol{v}(t).$$

Если представим себе, что вектор $\boldsymbol{I}(t)$ приложен в постоянной точке O, то свободный конец этого вектора есть точка $P(t)$, также представляющая собою функцию параметра t; эта функция имеет своей производной вектор $\boldsymbol{v}$ (рубр. 68).

78. Определение, данное в рубр. 76, допускает обобщение. Если вектор $\boldsymbol{v}$ представляет собою функцию точек некоторой области C (какой угодно — криволинейной, поверхностной, пространственной), то вектор, имеющий компонентами скалярные интегралы

$$\int_C X\,dC,\quad \int_C Y\,dC,\quad \int_C Z\,dC,$$

обозначается символом

$$\int_C \boldsymbol{v}\,dC$$

и называется интегралом от функции $\boldsymbol{v}$, взятым по области C.

Отметим, что и в этом случае остается в силе формула

$$\int \boldsymbol{v}\,dC=\lim\sum\boldsymbol{v}\,\Delta C,$$

как и в случае области одного измерения (рубр. 71).

11. Диференциальные свойства кривых. Формулы Френе. Круглые винты.

79. **Сферическая индикатриса касательных.** Положим, что нам дана, как в рубр. 75, некоторая дуга кривой l. Выберем произвольно начало O и каждой точке P этой дуги отнесем другую точку M, радиус-вектор которой $\overline{OM}=\boldsymbol{t}$; иными словами, из точки O проведем вектор, равный единичному касательному вектору $\boldsymbol{t}$ в точке P. Все эти точки M по самому своему построению будут расположены на сфере радиуса 1 с центром в точке O. В своей совокупности они образуют на сфере кривую (или дугу кривой) λ, которая называется *сферической индикатрисой* касательных рассматриваемой кривой l.

Если кривая l содержит как часть прямолинейный отрезок, то на всем его протяжении касательный вектор $\boldsymbol{t}$ имеет одно и то же направление; поэтому все точки M, соответствующие точкам такого отрезка, совпадают; иными словами, индикатриса прямолинейного отрезка вырождается в точку. Но если l есть действительная кривая, то вектор $\boldsymbol{t}$ меняется непрерывно, и точка M описывает на сфере действительную кривую λ. Если l есть плоская кривая, то таковой будет и индикатриса λ; ее плоскость параллельна плоскости кривой l; в самом деле, все касательные кривой l в рассматриваемом случае принадлежат плоскости этой кривой; все векторы $\boldsymbol{t}$, будучи перенесены в точку O, будут расположены в одной и той же плоскости, параллельной плоскости кривой l.

Сосредоточим теперь внимание на таком участке кривой l, где она представляет действительно кривую, где, следовательно, вектор $\boldsymbol{t}$ не остается постоянным; он представляет собой функцию длины дуги s нашей кривой; мы будем предполагать, что эта функция конечна, непрерывна и допускает требуемые исследованием производные.

80. Под *углом смежности*, соответствующим дуге PP_1 кривой l, разумеют угол, составленный касательными $\boldsymbol{t}$ и $\boldsymbol{t}_1$ в точках P и P_1 (предполагая, конечно, что они обращены в сторону, присвоенную самой кривой). Этот угол хорошо выявляется сферической индикатрисой. В самом деле, если M и M_1 суть изображения точек P и P_1 (концы векторов $\boldsymbol{t}$ и $\boldsymbol{t}_1$, перенесенных в точку O), то дуга χ большого круга, соединяющая на сфере изображения точки M и M_1, очевидно, измеряет (в радианах) угол касания. Она, таким образом, характеризует отклонение кривой l от прямолинейного хода на протяжении дуги PP_1. В соответствии с этим отклонение, отнесенное к единице длины дуги $PP_1 = |\Delta s|$, т. е. отношение

$$\frac{\chi}{|\Delta s|}, \tag{40}$$

называется средней кривизной дуги PP_1. Обратное отношение называется *средним радиусом кривизны* той же дуги; это, очевидно, радиус дуги круга, имеющей при длине $|\Delta s|$ угол касания, а следовательно, и угол при центре, равный χ. Окружность, таким образом, принимается здесь за типичную кривую, при помощи которой придается наглядность понятию о радиусе кривизны.

Предел, к которому стремится средняя кривизна дуги PP_1 (40), когда точка P_1 стремится к P, т. е. когда $\Delta s \to 0$, называется *кривизной* кривой l в точке P. Легко убедиться, что этот предел всегда существует, если только вектор $\boldsymbol{t}$ имеет производную по s; легко также найти для него довольно простое выражение.

В самом деле, по построению

$$\overline{OM} = t, \quad \overline{OM} = t_1,$$

поэтому разность $\Delta t = t_1 - t$ выражается вектором $\overline{MM}_1$, а длина хорды MM_1 совпадает с длиной $|\Delta t|$ вектора Δt. С другой стороны, предел отношения дуги большого круга χ к соответствующей хорде MM_1 равен 1. Так как при этом

$$\frac{\chi}{|\Delta s|} = \frac{|\Delta t|}{|\Delta s|} \cdot \frac{\chi}{|\Delta t|} = \left|\frac{\Delta t}{\Delta s}\right| \cdot \frac{\chi}{|\Delta t|},$$

то *предел отношения* $\frac{\chi}{|\Delta s|}$ *равен длине вектора* $\frac{dt}{ds}$. Если поэтому обозначим через c кривизну кривой l в точке P, то

$$c = \left|\frac{dt}{ds}\right|. \tag{41}$$

Так как c, как предел количества существенно положительного, по самому своему определению, $\geqslant 0$, то соотношение (41) эквивалентно равенству

$$c^2 = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2. \tag{41'}$$

Мы выше уже приняли (рубр. 79), что речь идет не о прямой, а о действительной кривой линии; мы можем поэтому исключить предположение, что на всей рассматриваемой кривой $\frac{dt}{ds} = 0$. Вместе с тем мы можем выделить точку, а с нею, в силу непрерывности векторной функции $\frac{dt}{ds}$, и окружающий эту точку интервал, в котором производная $\frac{dt}{ds}$ не обращается в нуль. В этом предположении c наверное больше нуля, а потому в каждой точке такого интервала имеет конечное значение также *радиус кривизны в точке* P:

$$r = \frac{1}{c}. \tag{42}$$

С другой стороны, так как t есть единичный вектор, то его производная $\frac{dt}{ds}$ имеет направление, к нему перпендикулярное (рубр. 62), а потому представляет собою вектор, нормальный к кривой l в точке P. Прямая, проходящая через точку P в направлении вектора $\frac{dt}{ds}$ и обращенная в ту же сторону, что и вектор $\frac{dt}{ds}$, называется *главной нормалью кривой* l в точке P. В случае плоской кривой главная нормаль всегда расположена в ее плоскости; в самом деле, в этом случае вектор t все время остается в плоскости кривой, а вместе с ним и его производная $\frac{dt}{ds}$.

Мы будем обычно обозначать через n версор вектора $\frac{dt}{ds}$, т. е. единичный вектор, который имеет направление и сторону обращения главной нормали. Так как длина вектора $\frac{dt}{ds}$ равна c, то

$$\frac{dt}{ds} = cn = \frac{1}{r}\, n. \tag{43}$$

Полезно отметить, что при изменении стороны обращения кривой l (т. е. стороны, в которую обращены дуги с положительным численным значением s) ds меняется на $-ds$, меняет сторону обращения вектор $t = \frac{dP}{ds}$; но вектор n не изменяется: в самом деле, он определяется вектором $\frac{dt}{ds}$, который сохраняет свое значение, ибо t и ds меняют знаки на обратные.

81. Соприкасающейся плоскостью кривой l в точке P называется плоскость, проходящая через точку P и через приложенные к ней векторы t и n. В случае плоской кривой она совпадает с ее плоскостью, но в случае так называемых кривых двоякой кривизны (см. ниже) она меняется от точки к точке В смежности с точкой P ее соприкасающаяся плоскость обладает свойством наибольшего приближения к кривой, откуда и проистекает ее название. Точнее, это свойство выражается следующим образом: *из всех плоскостей π, проходящих через точку P кривой l, соприкасающаяся плоскость в окрестности точки P наименее удаляется от кривой.*

Чтобы это доказать, возьмем произвольную точку P_1, весьма близкую к P_2, и прежде всего вычислим ее расстояние от произвольной плоскости π, проходящей через P. С этой целью обозначим через Q_1 проекцию точки P_1 на плоскость π и заметим, что отрезок P_1Q_1 можно рассматривать как проекцию хорды на нормаль к плоскости π. Если поэтому обозначим через v единичный вектор, параллельный этой нормали (обращенный в ту или другую сторону — все равно), то

$$P_1Q_1 = |\overline{PP}_1\, v|.$$

С другой стороны, поскольку точка P_1 весьма близка к P, разность $\Delta s = s_1 - s$ криволинейных абсцисс точек P и P_1 можно считать бесконечно малой. Если рассматривать точку P как функцию от s, т. е. положить $P = P(s)$, то $P_1 = P(s + \Delta s)$; поэтому формула Тэйлора (46), если положить в ней

$$t = s, \quad t_1 = s_1, \quad s_1 - s = \Delta s, \quad \dot{P} = \frac{dP}{ds} = t, \quad \ddot{P} = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{r}\, n,$$

дает:

$$\overline{PP}_1 = \Delta P = \Delta s t + \frac{1}{2r}\Delta s^2 (n + \bar{\varepsilon}); \tag{44}$$

отсюда мы получаем для расстояния P_1Q_1, не учитывая знака, следующее выражение:

$$\Delta s\,(tv + \frac{1}{2r}\Delta s^2 (nv) + \frac{1}{2}\Delta s^2\, (\bar{\varepsilon} v).$$

Оно состоит, как мы видим, из трех членов: первый представляет собой относительно Δs бесконечно-малую первого порядка, если только скалярное произведение tv не обращается в нуль; второй представляет собою бесконечно-малую второго порядка, если не обращается в нуль скалярное произведение nv; наконец, третий член во всяком случае представляет собою бесконечно-малую порядка выше второго, так как он содержит множителем помимо Δs^2 еще вектор $\bar{\varepsilon}$, который стремится к нулю вместе с Δs (рубр. 74). Чтобы расстояние P_1Q_1 стало для всех точек P_1 кривой l, весьма близких к P, сколько возможно малым, нужно, очевидно, стараться уничтожить слагаемые, имеющие, так сказать, преобладающее значение, т. е. слагаемые первого и второго порядка. Для этого необходимо и достаточно, чтобы обратились в нуль скалярные произведения tv и nv, т. е. чтобы вектор v был перпендикулярен к векторам n и t; а это означает, что плоскость π должна проходить через векторы t и n, приложенные в точке P, т. е. должна совпадать с плоскостью π.

82. Легко видеть, что соприкасающаяся плоскость обладает и другими свойствами, которые могут служить для ее определения. Так, например, если возьмем плоскость, проходящую через точку P и содержащую как касательную t, так и направление касательной t_1 в точке P_1, весьма близкой к P, а затем станем приближать точку P_1 к P, то рассматриваемая плоскость будет стремиться к соприкасающейся плоскости π. Чтобы в этом убедиться, достаточно принять во внимание, что плоскость, содержащая направления векторов t и t_1, содержит также направление вектора $\Delta t = t_1 - t$, а потому и направление вектора $\frac{\Delta t}{\Delta s}$. В пределе она станет поэтому параллельной векторам t и $\frac{dt}{ds}$, а потому неизбежно совпадет с соприкасающейся плоскостью в точке P.

Аналогично можно доказать, что соприкасающаяся плоскость может быть также рассматриваема, как предельное положение плоскостей, проходящих через t и смежную точку кривой P_1 (конечно, когда P_1 стремится к P); наконец, π есть также предельное положение плоскостей, проходящих через три точки кривой P_1, P_2, P_3, когда последние все стремятся к совпадению с P.

83. **Главный триэдр.** Перпендикуляр к соприкасающейся плоскости, ориентированный таким образом, чтобы он составил с направлениями t и n правосторонний триэдр (трижды ортогональный), называется *бинормалью* кривой в точке P. Если соответствующий единичный вектор (версор) обозначим через b, то триэдр tnb, составленный векторами t, n и b, выходящими из точки P, называется *главным триэдром* кривой в точке P. Из самого определения векторного произведения следует, что

$$b = [tn], \quad t = [nb], \quad n = [bt].$$

Из трех граней этого триэдра, одна (t, n) представляет собой соприкасающуюся плоскость; другую (n, b) образует *нормальная плоскость* к кривой в точке P; наконец, третья (b, t), т. е. плоскость, определяемая касательной и бинормалью к кривой, называется *спрямляющей плоскостью*. Основанием для такого названия служит то обстоятельство, что в ближайшей окрестности точки P проекцией кривой на эту плоскость является прямая, по крайней мере, если пренебречь бесконечно-малыми порядка выше второго; этой проекцией служит сама касательная t. Мы легко дадим себе в этом отчет, припомнив (рубр. 81), что кривая l вблизи точки P лежит в соприкасающейся плоскости (t, n), если не считать бесконечно малых отклонений порядка выше второго. Поэтому ее проекция на перпендикулярную плоскость (b, t) совпадает с линией пересечения обеих плоскостей, т. е. с касательной t в точке P.

Отметим еще, что в ближайшей окрестности точки P кривая целиком расположена с той стороны спрямляющей плоскости (b, t), в которую обращена главная нормаль n; иными словами, кривая повернута своей вогнутостью в сторону главной нормали. Чтобы это доказать, очевидно, достаточно констатировать, что для точки P_1, весьма близкой к P, вектор $\overline{PP_1}$ образует с версором главной нормали n острый угол, т. е. что скалярное произведение $\overline{PP_1}\, n$ имеет положительное значение. Но из соотношения (44) мы видим, что

$$\overline{PP_1}\, n = \Delta s \cdot t n + \frac{1}{2r}\Delta s^2 (n^2 + \bar{\varepsilon} n) = \frac{1}{2r}\Delta s^2 (1 + \bar{\varepsilon} n).$$

Так как вектор $\bar{\varepsilon}$ бесконечно мал (при бесконечно малом Δs), то для достаточно малых значений Δs единица в правой части превысит скалярное произведение $\bar{\varepsilon} n$, а потому все выражение получит положительное значение.

84. Производная вектора b. Этот единичный вектор, по определению, перпендикулярен к t и n; поэтому для плоской кривой, соприкасающаяся плоскость которой во всех точках совпадает с плоскостью кривой (рубр. 81), вектор b остается постоянным. Но вообще вектор b меняется от точки к точке, т. е. он представляет собою функцию от s, как и векторы t и n. Однако во всяком случае

$$b^2 = 1, \quad bt = 0.$$

Диференцируя эти равенства, получаем:

$$b\frac{db}{ds} = 0 \qquad \frac{db}{ds}\, t + b\frac{dt}{ds} = 0.$$

Первое из этих равенств обнаруживает, что вектор $\frac{db}{ds}$ перпендикулярен к b (как это уже было показано для всякого единичного вектора, рубр. 68); во втором же равенстве, ввиду соотношения (43), второе слагаемое левой части равно нулю; поэтому обращается в нуль также скалярное произведение $\frac{db}{ds}\, t$, т. е. вектор $\frac{db}{ds}$ перпендикулярен к t. Иными словами, вектор $\frac{db}{ds}$ одновременно перпендикулярен к векторам b и t, т. е. он параллелен вектору n. Таким образом мы во всех случаях можем положить:

$$\frac{db}{ds} = \tau n, \tag{45}$$

где τ есть число положительное, отрицательное или нуль.

85. Вторая кривизна или кручение кривой. Это число τ называется *второй кривизной или кручением* кривой в рассматриваемой точке P.

Случай $\tau = 0$ имеет место для плоских кривых, ибо для них вектор b, как уже было указано в предыдущей рубрике, сохраняет постоянное значение, а потому его производная равна нулю на всем протяжении кривой. Если же τ отлично от нуля, то его абсолютное значение дает наглядную меру отклонения кривой в рассматриваемой ее точке от плоского расположения. Чтобы это обнаружить, рассмотрим две произвольные точки P и P_1 кривой l. Изменение ориентации соприкасающейся плоскости при переходе от точки P к P_1 характеризуется углом θ этих двух плоскостей или, что то же, углом между нормалями к ним, т. е. между бинормалями кривой в точках P и P_1, или, наконец, между векторами b и b_1. Однако, чтобы характеризовать скорость, с которой изменяется соприкасающаяся плоскость вдоль кривой, нужно принять во внимание не только угол θ, но и длину $|\Delta s|$ дуги, содержащейся между точками, которые дают место этому угловому отклонению. Но отношение

$$\frac{\theta}{|\Delta s|},$$

приводящее это отклонение к единице пройденной дуги, делает сравнимым ход этого отклонения в различных точках кривой.

В непосредственной близости к точке P, с этой точки зрения, численной характеристикой изменения положения соприкасающейся плоскости служит предел отношения $\frac{\theta}{|\Delta s|}$, когда Δs стремится к нулю. Если представим себе сферическую индикатрису, которую чертит вектор b подобно индикатрисе касательных, рассмотренных в рубр. 79, то совершенно аналогичное рассуждение приведет нас к заключению, что предел приведенного отношения равен длине вектора $\frac{db}{ds}$ или, ввиду соотношения (45), абсолютному значению числа τ.

Но и знак числа τ, естественно, соответствует некоторой геометрической особенности в ходе кривой вблизи точки P. Мы дадим себе в этом ниже отчет помощью очень простого рассуждения. Здесь же заметим, что в соответствии с понятием о радиусе кривизны r кривой в данной ее точке P, представляющем величину, обратную кривизне c, вводят также понятие о *радиусе второй кривизны* T, полагая

$$T = \frac{1}{\tau}. \tag{46}$$

Но в отличие от радиуса первой кривизны, который всегда имеет положительное значение, радиус второй кривизны может от случая к случаю иметь то положительное, то отрицательное значение. Вводя в формулу (45) T вместо τ, мы можем последнюю написать в виде:

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \frac{1}{T}\boldsymbol{n}. \tag{46'}$$

86. Формулы Френе[1]. Во многих вопросах, относящихся к исследованию кривых, имеют очень важное значение производные трех векторов $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$, образующих основной триэдр. Для первого и третьего векторов мы уже получили весьма простые выражения (43) и (45) их производных, которые помимо самих векторов содержат еще только первую и вторую кривизну. Эти формулы легко дополнить аналогичным выражением для производной $\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}$. Достаточно взять вектор $\boldsymbol{n}$ в форме $[\boldsymbol{bt}]$ (рубр. 83) и это выражение непосредственно диференцировать. Мы получим:

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = \left[\boldsymbol{b}\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right] + \left[\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\,\boldsymbol{t}\right].$$

Заменяя здесь производные $\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}$ и $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ их выражениями (43) и (45) и имея, далее, в виду, что (рубр. 83)

$$[\boldsymbol{bn}] = -\boldsymbol{t} \text{ и } [\boldsymbol{nt}] = -\boldsymbol{b},$$

получим:

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -c\boldsymbol{t} - \tau\boldsymbol{b}.$$

Сопоставляя их с выражениями производных от $\boldsymbol{t}$ и $\boldsymbol{b}$, мы получим формулы Френе:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} &= c\,\boldsymbol{n}, \\ \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} &= -c\boldsymbol{t} - \tau\,\boldsymbol{b}, \\ \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} &= \tau\,\boldsymbol{n}. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Они были даны Френе, но не в векторных обозначениях, которые получили широкое распространение только в последние десятилетия.

---

[1] *Жан Френе* (Jean Frédéric Frenet), французский геометр, родился в г. Перигё (Perigeux Dordogne) в 1816 г., умер там же в 1900 г., был профессором Лионского университета. Формулы, носящие его имя, были им установлены в 1847 г. и опубликованы в 1852 г. в журнале „Journal de mathématiques pures et appliquées".

87. Знак второй кривизны. Мы видели выше (рубр. 81), что кривая в окрестности какой-нибудь точки P удаляется от соприкасающейся плоскости в точке P на расстояния, представляющие собою бесконечно-малые порядка выше второго. Чтобы поэтому сделать оценку этого удаления, не следует ограничиваться бесконечно-малыми второго порядка; необходимо принять в расчет еще непосредственно следующий член. Возвратимся поэтому к разложению Тэйлора, которым мы уже пользовались в рубр. 81, и выразим $P_1 = P(s + \Delta s)$ через $P(s)$ и производные этой функции до третьего порядка включительно. Мы получим:

$$\Delta P = \overline{PP_1} = \Delta s\, \dot P + \frac{1}{2} \Delta s^2\, \ddot P + \frac{1}{6}\, \Delta s^3 \{\dddot P + \bar\varepsilon\},$$

где вектор $\bar\varepsilon$ имеет, как обычно, бесконечно малое значение. Как и в рубр. 81, сделаем подстановки:

$$\dot P = t, \quad \ddot P = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{r}\, n,$$

а вместе с тем, следовательно,

$$\dddot P = \frac{d}{ds}\,(c\, n).$$

Выполняя здесь диференцирование и пользуясь последней формулой Френе [т. е. вторым из соотношений (47)], найдем:

$$\dddot P = \frac{dc}{ds}\, n - c\,(ct + \tau\, b),$$

откуда

$$\dddot P b = -c\tau.$$

Имея это в виду, умножим вектор $\overline{PP_1}$, скалярно на b; мы получим:

$$\overline{PP_1}\, b = -\frac{1}{6}\, \Delta s^3\, (c\tau - \bar\varepsilon b).$$

Мы, конечно, можем оставить в стороне плоские кривые и соответственно этому считать не только первую кривизну C, но и вторую τ отличными от нуля. При этих условиях член $c\tau$ для достаточно малых значений вектора $\bar\varepsilon$, несомненно, превысит (конечно, по абсолютной величине) скалярное произведение $\bar\varepsilon b$; вместе с тем знак скалярного произведения $\overline{PP_1}\ b$ совпадет со знаком произведения

$$-\frac{1}{6}\, \Delta s^3 c\tau,$$

который, в свою очередь, совпадает со знаком произведения $-\Delta s\tau$ (так как $\frac{1}{6} \Delta s^2 c$ есть число существенно положительное).

С другой стороны, знак скалярного произведения $\overline{PP_1}\ b$ определяет, находится ли точка P_1 с положительной стороны соприкасающейся плоскости или с отрицательной, если считать положительной ту, в которую обращен вектор b. Но знак этот, как показывает найденное выражение, изменяется вместе со знаком Δs. Отсюда первый вывод: кривая в точке P *пересекает* соприкасающуюся плоскость. Но в какую сторону? Чтобы это выяснить, проследим за ходом кривой вблизи P, пробегая ее в положительную ее сторону; тогда Δs до P будет иметь отрицательное значение, обратится в нуль в точке P и затем примет положительное значение.

Теперь ясно, что *при* $\tau > 0$ *кривая переходит с положительной стороны соприкасающейся плоскости на отрицательную* (так как $-\Delta s\tau$ в этом случае имеет знак, противоположный Δs), *а при* $\tau < 0$ *она направлена в обратную сторону.*

Следует отметить, что этот вывод имеет внутренний характер, так как он не зависит от стороны, в которую направление кривой считается положительным. В самом деле, если сторона обращения кривой меняется на противоположную, то вектор $\boldsymbol{n}$, как мы уже видели, по самому своему определению остается неизменным, вектор же $\boldsymbol{b}$ меняет сторону обращения на противоположную вместе с $\boldsymbol{t}$, так как триэдр $\boldsymbol{tnb}$ должен оставаться правосторонним. Мы имеем теперь возможность нагляднее выразить полученный результат. Представим себе наблюдателя, стоящего в точке P по направлению $\boldsymbol{t}$ и обращенного лицом к вектору $\boldsymbol{n}$; ($\boldsymbol{b}$, следовательно, остается слева от наблюдателя); по отношению к нему кривая в положительном своем направлении (первоначально произвольном), совпадающем со стороной обращения вектора $\boldsymbol{t}$, поднимается и в то же время проходит слева направо (сторона, противоположная обращению вектора $\boldsymbol{b}$), если τ имеет положительное значение; в противоположном случае она идет справа налево. Можно, таким образом, сказать, что *знак второй кривизны вскрывает, имеет ли кривая в этой точке левосторонний ход* ($\tau > 0$) *или правосторонний*($\tau < 0$).

88. **Круглые винты.** Под этим названием разумеют, как известно, кривые, проходящие на поверхности круглого цилиндра таким образом, что пересекают все образующие под постоянным углом. Если развернуть цилиндрическую поверхность на плоскость, то каждая винтовая линия, в силу вышеприведенного ее свойства, непременно расположится по прямой линии. Вследствие этого винтовые линии имеют и другое характеризующее их свойство, заключающееся в том, что дуга винта представляет на цилиндрической поверхности кратчайшее расстояние между двумя ее точками (*геодезическая* линия поверхности); в самом деле, при развертывании цилиндрической поверхности длины кривых не изменяются; вследствие этого высказанное утверждение вытекает из того факта, что винтовая линия развертывается по прямой.

Пусть теперь l будет винт, начерченный на круглом цилиндре радиуса R. На образующих цилиндра установим общую сторону их обращения и обозначим через $\boldsymbol{k}$ соответствующий версор (единичный вектор). Предположим далее, что мы имеем дело с *невыродившимся* винтом, т. е. что (наименьший) угол ϑ, который кривая на всем своем протяжении образует с вектором $\boldsymbol{k}$, не равен ни нулю (в каковом случае винт вырождается в прямую), ни $\frac{\pi}{2}$ (в каковом случае винт вырождается в окружность — в нормальное сечение цилиндра). В соответствии с этим мы можем выбрать за сторону возрастающих длин s (за сторону положительного обращения кривой) ту, которая дает названный угол ϑ $\left(0<\vartheta<\frac{\pi}{2}\right)$.

Положительная сторона винта определяет также сторону вращения вокруг оси цилиндра. Это вращение относительно вектора $\boldsymbol{k}$, приложенного на оси цилиндра, представится правосторонним или левосторонним. В соответствии с этим отличают *правосторонние* и *левосторонние* (короче, *правые* и *левые*) винты.

Вряд ли необходимо указывать, что подразделение винтов носит внутренний характер, т. е. что оно не зависит от стороны, которую мы принимаем за положительную на оси цилиндра. В самом деле, если мы обратим вектор $\boldsymbol{k}$, то вместе с этим обратится в противоположную сторону кривая l, а потому правосторонний или левосторонний характер кривой останется неизмененным.

89. Векторы $\boldsymbol{t}$ и $\boldsymbol{n}$ круглого винта и его кривизна. Согласно предыдущей рубрике, компонента $\boldsymbol{tk}$ вектора $\boldsymbol{t}$ в направлении $\boldsymbol{k}$ равна $\cos\vartheta$. Разность

$$\boldsymbol{t}-\cos\vartheta\boldsymbol{k}$$

представляет поэтому компоненту вектора $\boldsymbol{t}$ на плоскости, перпендикулярной к $\boldsymbol{k}$. Этому можно придать более наглядности, если представить себе пересечение этой плоскости с цилиндрической поверхностью; обозначим через l^* окружность сечения. На плоскость сечения винтовая линия l проектируется образующими цилиндрической поверхности; проекция совпадает поэтому с окружностью l^*. Векторы $\boldsymbol{t}$ дают проекции, касательные к окружности l^*, но длина проекции равна не 1, а $\sin\vartheta$ (так как острый угол между вектором $\boldsymbol{t}$ и плоскостью сечения равен $\frac{\pi}{2}-\vartheta$). Отсюда следует, что можно вектор

$$\boldsymbol{t}^*=\frac{\boldsymbol{t}-\cos\vartheta\boldsymbol{k}}{\sin\vartheta}$$

рассматривать как единичный касательный вектор к окружности l^* в точке P^*, представляющей проекцию точки P кривой l.

Далее, элемент длины ds^* окружности l^* можно также рассматривать как проекцию элемента ds дуги винта l; поэтому

$$ds^*=ds\sin\vartheta.$$

Диференцируя поэтому предыдущее равенство и имея в виду, что ϑ и $\boldsymbol{k}$ суть постоянные, получаем:

$$\frac{d\boldsymbol{t}^*}{ds^*}=\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}.$$

Эта формула устанавливает как главную нормаль к винтовой линии, так и ее первую кривизну. В самом деле, обозначим через N единичный вектор нормали к цилиндру, направленной к оси. Если припомним, что кривизна окружности радиуса R равна $\frac{1}{R}$, мы тотчас получим по первой из формул Френе (47):

$$\frac{dt^*}{ds^*} = \frac{1}{R} N.$$

Вместе с тем предыдущее соотношение принимает вид:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{\sin^2 \vartheta}{R} N.$$

Сопоставляя это соотношение с первой формулой Френе, мы приходим к следующему выражению:

$$\frac{1}{r} n = \frac{\sin^2 \vartheta}{R} N.$$

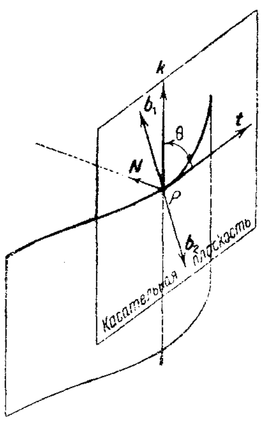
Итак:

1) *Главная нормаль к винтовой линии в любой ее точке совпадает с нормалью к цилиндрической поверхности и обращена к оси цилиндра.*

2) *Первая кривизна имеет во всех точках кривой одно и то же значение* $\frac{\sin^2 \vartheta}{R}$, *а потому соответствующий радиус кривизны равен* $\frac{R}{\sin^2 \vartheta}$.

90. Вектор b и вторая кривизна. По определению:

$$b = [tn].$$



Фиг. 29.

Отсюда следует, что в рассматриваемом случае вектор b перпендикулярен к N, т. е. лежит в касательной плоскости к цилиндрической поверхности в точке P, а в ней он направлен перпендикулярно к t. Остается установить сторону его обращения; желательно привести это в связь с направлением образующей цилиндра в точке P (которая целиком расположена в касательной плоскости в точке P), а еще лучше с единичным вектором k. Наша задача заключается, таким образом, в том, чтобы выяснить, образует ли вектор b с k острый или тупой угол: этим устанавливается сторона обращения вектора b; на фиг. 29 вектор b обращен в сторону b_1, если $\widehat{bk} < \frac{\pi}{2}$, и в сторону $\boldsymbol{b}_2$, если $\widehat{\boldsymbol{bk}} > \frac{\pi}{2}$. При этом легко видеть, что угол $\widehat{\boldsymbol{bk}}$ будет острым или тупым, смотря по тому, имеем ли мы дело с правосторонним или левосторонним винтом.

Так как $\boldsymbol{kt} = \cos\vartheta$ (см. предыдущую рубрику), то вследствие перпендикулярности векторов $\boldsymbol{t}$ и $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{kb} = \pm \sin\vartheta.$$

Соответственно тому, что было сейчас указано, верхний знак имеет место в случае правостороннего, а нижний в случае левостороннего винта. Диференцируя по s оба соотношения:

$$\boldsymbol{kt} = \cos\vartheta, \quad \boldsymbol{kb} = \pm \sin\vartheta \tag{48}$$

и пользуясь формулами Френе, получим:

$$\boldsymbol{kn} = 0, \quad \boldsymbol{k}(c\boldsymbol{t} + \tau\boldsymbol{b}) = 0.$$

Последнее же в силу тех же соотношений (48) дает:

$$c\cos\vartheta \pm \tau\sin\vartheta = 0.$$

Подставляя сюда вместо c его значение $\frac{\sin^2\vartheta}{R}$ и определяя τ, получим:

$$\tau = \mp \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{R}. \tag{49}$$

Таково выражение для второй кривизны, в котором должен быть взят верхний знак для правостороннего, а нижний для левостороннего винта. Ясно, что она имеет постоянное значение во всех точках винта. Отсюда, в частности, следует, что установленные знаки второй кривизны вполне соответствуют правилу, данному в рубр. 87 для определения знака второй кривизны на любой кривой.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Длина суммы $\boldsymbol{R}$ нескольких векторов $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ определяется формулой:

$$R^2 = \sum_{1}^{n}{}_k v_k^2 + 2\sum_{ij} v_i v_j \cos \widehat{\boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_j},$$

где суммование во втором члене правой части распространяется на все возможные сочетания индексов 1, 2, ..., n по два.

2. Для каких угодно трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ имеет место тождество:

$$\big[\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bc}]\big] + \big[\boldsymbol{b}\,[\boldsymbol{ca}]\big] + \big[\boldsymbol{c}\,[\boldsymbol{ab}]\big] = 0.$$

3. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ будут три некомпланарные вектора. Произвольный вектор $\boldsymbol{v}$, как известно, можно разложить по прямым действия этих трех векторов; так что

$$\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} + \nu\boldsymbol{c},$$

где λ, μ, ν — вполне определенные численные коэфициенты.

Показать, что
$$\lambda = \frac{v\,[bc]}{a\,[bc]},$$
выражения же для μ и ν получаются отсюда путем круговых перемещений векторов a, b, c.

4. Обозначим через M момент приложенного вектора v относительно точки P, а через Q основание перпендикуляра, опущенного из точки P на прямую действия вектора v. Показать, что
$$\overline{PQ} = \frac{1}{v^2}[vM].$$

5. Каждому вектору $v = Xi + Yi$ плоскости Oxy отнесем комплексное число
$$z = X + iY \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Показать, что векторное умножение вектора k на вектор v эквивалентно умножению числа z на i.

Замечание. В этом упражнении установлено одноодноозначное соответствие между векторами плоскости и комплексными числами; показано, что умножение комплексного числа на мнимую единицу i эквивалентно умножению соответствующего вектора (слева) на версор k, т. е. повороту на 90°. Аналогично этому всякая аналитическая операция $f(z)$, применение которой к комплексному числу z дает в результате число z_1, может быть рассматриваема как оператор над векторами плоскости, относящий вектору z вектор z_1.

6. Показать, что умножение комплексного числа на $e^{\vartheta i}$ интерпретируется как поворот соответствующего вектора на угол ϑ.

7. Показать, что геометрическое место точки P, определяемое уравнением
$$\overline{OP} = re^{\vartheta i},$$
где O есть постоянная точка, r — постоянное положительное число, а аргумент ϑ меняется от 0 до 2π, есть окружность, имеющая центр в точке O и радиус r.

Доказать также более общее предложение: если $\rho = \rho(\vartheta)$ есть уравнение некоторой кривой в полярных координатах, то геометрическое уравнение:
$$\overline{OP} = \rho\, e^{\vartheta i}$$
дает параметрическое выражение той же кривой.

8. Показать, что для всех точек, принадлежащих поверхности цилиндра, осью которого служит центральная ось системы приложенных векторов, главный момент системы всегда лежит в касательной плоскости к цилиндру, имеет постоянную длину и образует с осью постоянный угол.

9. Показать, что для системы векторов, инвариантный трехчлен которой отличен от нуля, всегда можно найти центры приведения, по отношению к которым главный момент имеет заданное направление; геометрическое место этих точек есть прямая, параллельная центральной оси системы.

10. *Клаузиус*[1]) называет вириалом системы Σ приложенных векторов $[A_i, v_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)]$ относительно произвольной точки P скаляр
$$V = \sum_{1}^{n}{}_{i}\, \overline{PA_i}\, v_i.$$

---

[1]) Рудольф Клаузиус (Rudolf Clausius) родился в Кеслине, в Померании, в 1822 г., умер в Бонне в 1888 г., был профессором физики в университетах Цюриха, Вюрцбурга и Бонна. Классическое значение имеют его исследования в области механической теории теплоты, а также в области термодинамики в наиболее широком ее понимании; эти сочинения составляют два тома. Его формулировка основных законов электродинамики в свое время также привлекла внимание исследователей.

Когда полюс P меняется, то закон изменения вириала остается тот же, что и для главного момента (рубр. **39**), с тою лишь разницей, что векторное произведение заменяется скалярным. Таким образом для любого другого полюса P' имеем:

$$V' = \sum_{1}^{n}{}_i \overline{P'A_i} v_i = \sum_{1}^{n}{}_i \left\{ \overline{PA_i} + \overline{P'P} \right\} v_i = V + \overline{P'P}\, R;$$

или в словах: новый вириал равен первоначальному, увеличенному на вириал относительно нового полюса главного вектора системы, приложенного в первоначальном полюсе.

В частности, при $R = 0$, $V' = V$; это значит, для системы, главный вектор которой равен нулю, вириал представляет собою внутренний элемент системы, т. е. не зависит от полюса.

Доказать (например, на основании последнего предложения), что две системы, имеющие общий главный вектор, имеют также общий вириал по отношению к любому полюсу, если их вириалы совпадают при одном определенном полюсе.

11. Показать, что четыре вектора $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$, $\overline{PD}$, приложенные в точке P пересечения взаимно перпендикулярных хорд AB и CD некоторой окружности, образуют систему, эквивалентную одному вектору, который приложен в центре окружности O и равен $2\overline{PO}$[1]).

12. Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы система векторов была эквивалентна нулю, может быть сведено к тому, чтобы главный ее момент обращался в нуль для трех точек, не расположенных на одной прямой.

13. Любая система векторов эквивалентна двум векторам, из которых один может быть помещен на произвольно выбранной прямой с тем только ограничением, чтобы она не была параллельна главному вектору системы и чтобы взятый относительно нее (осевой) момент системы был отличен от нуля.

14. Абсолютная величина инвариантного трехчлена системы двух векторов равна шестикратному объему тетраэдра, построенного на этих двух векторах и на векторе, соединяющем точки их приложения.

15. Общий перпендикуляр двух векторов встречает под прямым углом центральную ось образуемой ими системы.

16. Всякая система векторов эквивалентна шести векторам, направленным по ребрам произвольно выбранного тетраэдра.

17. Система трех векторов, расположенных в одной плоскости, эквивалентна трем векторам, направленным по сторонам треугольника, произвольно выбранного в той же плоскости.

18. Обобщить на выпуклый многоугольник заключительное замечание рубр. **58**, именно, доказать следующую теорему: плоская система n векторов, перпендикулярных к сторонам выпуклого n-угольника в их серединах, находится в равновесии, если длины векторов пропорциональны соответствующим сторонам и если они все обращены внутрь многоугольника (или все наружу).

19. Система векторов, перпендикулярных к граням тетраэдра в их центрах (описанных окружностей), находится в равновесии, если длины векторов пропорциональны площадям соответствующих граней и если все они обращены внутрь тетраэдра (или все наружу).

20. На основе определения *вириала*, данного в упражнении **10**, показать, что *центр* системы параллельных приложенных векторов (рубр. **62** и **64**), главный вектор которой отличен от нуля, можно характеризовать как ту точку центральной оси, по отношению к которой вириал обращается в нуль.

Исходя отсюда, можно распространить на любую систему приложенных векторов (т. е., вообще, не параллельных), главный вектор которой отличен от нуля, понятие *о центре* системы; достаточно определить центр как ту точку центральной оси, по отношению к которой вириал обращается в нуль[2]).

Показать, что центр системы этим определяется однозначно.

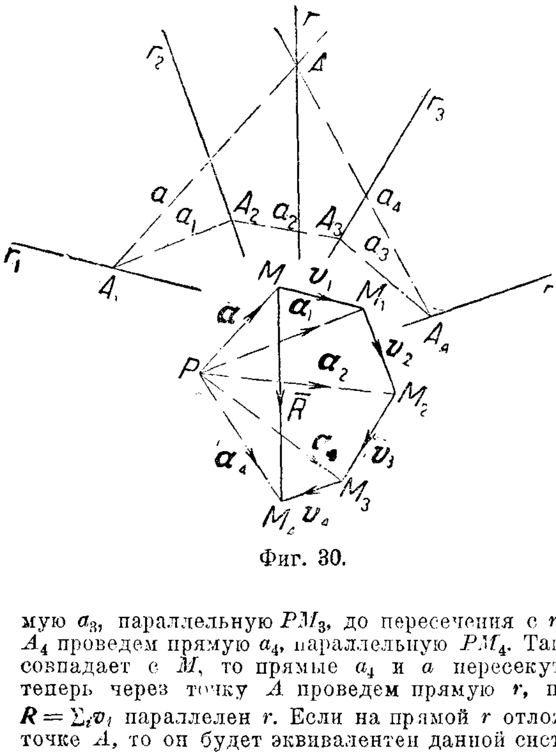
---

[1]) Он может быть приложен и в точке P. (*Ред.*)

[2]) См. *Г. Колосов*, „Comptes Rendus", т. 185, 1928, стр. 1012—1014.

21. Основное построение графической статики[1]. Дана плоская система Σ приложенных векторов; построить (рубр. 57) приложенный вектор или пару, к которым приводится система в зависимости от того, отличен ли ее главный вектор от нуля или равен нулю. В частности, распознать, не уравновешена ли система.

Для простоты рассмотрим систему, состоящую из четырех приложенных векторов $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ (фиг. 30); пусть r_1, r_2, r_3, r_4 будут их прямые действия. Полигонируем эти векторы, исходя из точки M, так что отрезки $MM_1, M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4$ будут соответственно эквиполлентны этим векторам. Предположим сначала, что эта ломаная не замыкается. Фиксируем в плоскости произвольную точку P (полюс), не расположенную ни на одной из сторон ломаной, и обозначим через $\bar{\alpha}, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3, \bar{\alpha}_4$ соответственно векторы $\overline{PM}, \overline{PM_1}, \overline{PM_2}, \overline{PM_3}, \overline{PM_4}$; проведем также произвольную прямую a, параллельную вектору $\overline{PM}$; она пересечет прямую r_1 в определенной точке A_1, так как прямая PM пересекает вектор $\overline{MM_1}$, параллельный r_1. Далее, через точку A_1 проведем прямую a_1, параллельную PM_1, до пересечения с r_2 в точке A_2; из точки A_2 проведем прямую a_2, параллельную MP_2, до пересечения с r_3 в точке A_3; из точки A_3 проведем прямую a_3, параллельную PM_3, до пересечения с r_4 в точке A_4; наконец, из точки A_4 проведем прямую a_4, параллельную PM_4. Так как точка M_4, по условию, не совпадает с M, то прямые a_4 и a пересекутся в некоторой точке A. Если теперь через точку A проведем прямую r, параллельную MM_4, то вектор $\boldsymbol{R} = \Sigma_i \boldsymbol{v}_i$ параллелен r. Если на прямой r отложим вектор $\boldsymbol{R}$, приложив его в точке A, то он будет эквивалентен данной системе Σ. В самом деле, так как



Фиг. 30.

$$\overline{PM} + \overline{MM_1} = \overline{PM_1},$$

то и аналогично

система	($\bar{\alpha}$	на a	и	$\boldsymbol{v}_1$	на r_1)	эквивалентна	$\bar{\alpha}_1$	на a_1
„	($\bar{\alpha}_1$	„ a_1	„	$\boldsymbol{v}_2$	„ r_2)	„	$\bar{\alpha}_2$	„ a_2
„	($\bar{\alpha}_2$	„ a_2	„	$\boldsymbol{v}_3$	„ r_3)	„	$\bar{\alpha}_3$	„ a_3
„	($\bar{\alpha}_3$	„ a_3	„	$\boldsymbol{v}_4$	„ r_4)	„	$\bar{\alpha}_4$	„ a_4.

Складывая эти соотношения почленно и устранив в обеих частях общие векторы, получим:

система ($\bar{\alpha}$ на a, Σ) эквивалентна $\bar{\alpha}_4$ на a_4,

а потому

система Σ эквивалентна системе ($\bar{\alpha}_4$ на a_4, $-\bar{\alpha}$ на a).

---

[1] Ср. *G. Bisconcini*, „Esercizi e complementi die meccanica razionale“, Milano, Lib. ed. Politechnica, 1927, стр. 20—21.

Так как векторы $\overline{a}_4$ и $-\overline{a}$ мы можем считать приложенными в точке A, а в то же время $\overline{a}_4 - \overline{a} = \boldsymbol{R}$, то последнее соотношение устанавливает, что система Σ эквивалентна вектору $\boldsymbol{R}$ на прямой r.

Если полигон данных векторов замыкается, так что точка M_4 совпадает с M и, следовательно, прямая PM_4 совпадает с PM, то прямые a и a_4 имеют одно и то же направление. Если они параллельны, то система Σ эквивалентна *паре* ($\overline{a}$ на a_4 и $-\overline{a}$ на a); если же они совпадают, то система уравновешена.

Ломаную, составленную прямыми a, a_1, a_2, a_3, a_4, называют *веревочным многоугольником*. Мы приходим, таким образом, к следующему заключению. Если полигон, составленный из векторов системы, открыт, то система эквивалентна одному вектору; если полигон векторов замыкается, но упомянутый веревочный многоугольник остается открытым, то система эквивалентна паре; если, наконец, оба рассмотренные многоугольника оказываются замкнутыми, то мы имеем дело с уравновешенной системой.

22. Соответственные стороны двух веревочных многоугольников, отвечающих одной и той же плоской системе векторов, но построенных при различных полюсах, пересекаются на прямой, параллельной той, которая соединяет два полюса[1]).

23. Чтобы система двух векторов была эквивалентна одному вектору, необходимо и достаточно, чтобы оба вектора лежали в одной и той же плоскости, но не были друг другу противоположны.

24. Исследуем *плоскую* кривую, опираясь на соображения § 11.

a) Выбрав произвольно точку O (полюс), будем обозначать через $\overline{\rho}$ радиус-вектор точки P кривой, через ρ — его длину. Тогда:

$$\frac{d\overline{\rho}}{ds} = \boldsymbol{t}, \quad \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \frac{1}{r}\boldsymbol{n}, \quad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -\frac{1}{r}\boldsymbol{t},$$

где r есть радиус кривизны кривой в точке P. Показать, что последнее соотношение можно вывести из предыдущего, не пользуясь общими формулами Френе.

b) Предположим, что кривая в окрестности точки P обращена к точке O вогнутостью, т. е. что векторы $\overline{\rho}$ и $\boldsymbol{n}$ образуют тупой угол. В таком случае длина P перпендикуляра, опущенного из точки O на касательную к кривой в точке P, равна $-\overline{\rho}\,\boldsymbol{n}$. Показать, что дифференцирование соотношения $P = -\overline{\rho}\,\boldsymbol{n}$ приводит к известному выражению радиуса кривизны:

$$r = \rho\,\frac{d\rho}{dp}.$$

25. Как известно, под *окружностью кривизны* данной кривой l в некоторой ее точке P разумеют (предельную) окружность, определяемую точкой P и двумя другими бесконечно близкими к P точками кривой (или, если угодно, окружность, касающуюся кривой в точке P и проходящую еще через точку, бесконечно близкую к P). Положение центра C этой окружности определяется равенством

$$\overline{PC} = r\boldsymbol{n}.$$

Определяя аналогично соприкасающуюся сферу, показать, что ее центр C' падает в точку, определяемую равенством

$$\overline{PC'} = r\boldsymbol{n} - \tau\frac{dr}{ds}\boldsymbol{b}.$$

26. Как для круглого цилиндра (ср. рубр. 88—90), так и для любого другого цилиндра винтовой линией называется кривая, пересекающая все образующие под одним и тем же углом.

Показать, что для всякой винтовой линии отношение двух кривизн сохраняет постоянное значение, и, обратно, если на кривой линии отношение двух кривизн сохраняет постоянное значение, то она представляет собою цилиндрический винт (круглый, если обе кривизны сохраняют постоянные значения порознь).

---

[1]) Для доказательства как этого, так и других свойств веревочных многоугольников см. приведенное выше сочинение *Bisconcini*, стр. 23 и сл. Ср. также *Guidi*, Lezioni sulla Scienza delle costruzioni, Parte I, Statiça grafica, X изд. (Гвиди, Лекции по строительному делу, ч. I, Графическая статика), Torino, Bona 1925,