ГЛАВА III.

Кинематика твердых систем.

1. Общие соображения.

1. Первая постановка — с помощью осей, заложенных в твердой системе. Изучив в предыдущей главе движения одной точки, мы перейдем теперь к кинематике *фигуры*, или системы точек; составляющие систему точки могут при этом входить в ее состав в ограниченном или неограниченном числе; в последнем случае они обыкновенно расположены по линии, поверхности или в сплошных частях пространства.

Прежде всего мы займемся движением *твердой системы*, т. е. фигуры, которая в продолжение движения сохраняет без изменения взаимные расстояния своих точек, попарно взятых. Такими мы представляем себе фигуры в элементарной геометрии, когда мысленно передвигаем их в пространстве с целью установить, налагается ли одна на другую или нет.

И здесь, как и в случае одной точки, мы отнесем движение данной твердой системы S к триэдру декартовых осей $\Omega\xi\eta\zeta$, который для удобства обозначения будем называть *неподвижным триэдром*, отнюдь не теряя при этом, однако, из виду относительного характера понятия о движении.

Чтобы учесть твердость системы S, рассмотрим второй триэдр $Oxyz$, правосторонний, как и $\Omega\xi\eta\zeta$, но неизменно связанный с системой S; этот последний триэдр мы будем называть *подвижным* (поскольку он движется вместе с системой S) или *телесным* как связанный с твердым телом. Из того факта, что триэдр $Oxyz$ образует вместе с S новую твердую систему, следует, что каждая точка P системы S (или даже просто связанная с S твердой связью), двигаясь относительно триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$, сохраняет во все время этого движения неизменные координаты x, y, z относительно подвижной системы.

Вследствие этого движение любой точки P системы S относительно $\Omega\xi\eta\zeta$ будет вполне охарактеризовано, если, с одной стороны, положение точки P в системе S будет определено ее координатами x, y, z относительно осей $Oxyz$, а с другой стороны, для каждого момента будет задано положение подвижного триэдра $Oxyz$ относительно неподвижного $\Omega\xi\eta\zeta$. Для этой же цели будет достаточно выразить в зависимости от времени положение начала подвижного триэдра O и его основные версоры $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, относя их движение к триэдру $\Omega\xi\eta\zeta$. В самом деле, движение произвольной точки P системы S может быть выражено при помощи геометрического тождества:

$$\overline{\Omega P} = \overline{\Omega O} + \overline{OP}.$$

Здесь вектор $\overline{\Omega O}$ определяет положение точки O относительно неподвижного триэдра, а вектор $\overline{OP}$ определяет положение точки P. Если оба вектора $\overline{\Omega O}$ и $\overline{OP}$ будут заданы в функции времени, то в каждый момент будет известен и радиус-вектор $\overline{\Omega P}$ точки P, а следовательно, и ее положение относительно неподвижного триэдра. Но, согласно тождеству (14) гл. I:

$$\overline{OP} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \tag{1}$$

Поэтому

$$\overline{\Omega P} = \overline{\Omega O} + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \tag{1'}$$

Здесь координаты x, y, z сохраняют во все время движения постоянные значения, а векторы $\overline{\Omega O}$, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ представляют собою функции времени; если эти функции будут заданы, то уравнение (1) выразит (геометрически) движение точки P.

Если введем координаты ξ, η, ζ точки P и α, β, γ точки O, а также компоненты $\alpha_h, \beta_h, \gamma_h$ $(h = 1, 2, 3)$ версоров $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ (совпадающие с их направляющими косинусами), то векторное уравнение (1) проектированием на неподвижные оси заменится тремя скалярными уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \\ \eta &= \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, \\ \zeta &= \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Это — *общие уравнения движения твердой системы*, так как они непосредственно выражают в функции времени координаты произвольной точки P системы S относительно неподвижного триэдра, коль скоро ее положение в системе S определено координатами x, y, z. В них входят, помимо постоянных координат x, y, z, 12 функций времени, именно α, β, γ, и девять направляющих косинусов $\alpha_h, \beta_h, \gamma_h$ $(h = 1, 2, 3)$; так как последние отвечают трем попарно ортогональным версорам, то они связаны (I, рубр. **10**) соотношениями:

$$\alpha_h^2 + \beta_h^2 + \gamma_h^2 = 1 \qquad (h = 1, 2, 3);$$

$$\alpha_h \alpha_k + \beta_h \beta_k + \gamma_h \gamma_k = 0 \quad (h \neq k = 1, 2, 3).$$

Как и в случае движения точки (II, рубр. 4), мы примем, что все функции $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_h, \beta_h, \gamma_h$ однозначны, конечны и непрерывны, а также, что они имеют производные, по крайней мере, первого и второго порядка во всем промежутке времени, в котором определено движение.

Здесь, наконец, будет еще полезно отметить, что уравнение (1') и эквивалентные ему уравнения (2) остаются в силе не только по отношению к каждой точке движущейся твердой системы S, но и для любой другой точки, хотя бы и не принадлежащей системе S, но неразрывно (твердой связью) с нею связанной[1]). Таким образом движением системы S фактически определяется движение целого сплошного пространства точек, связанных с S твердой связью. Мы приходим, таким образом, к представлению, что на неподвижное пространство, связанное с триэдром $\Omega\xi\eta\zeta$ (или на неподвижную неизменяемую среду), в каждый момент налагается неизменяемая среда („подвижное пространство“), связанная с системой S и движущаяся вместе с нею относительно среды $\Omega\xi\eta\zeta$. Поэтому часто говорят просто *о твердом движении* в смысле движения целого сплошного пространства (или сплошной неизменяемой среды), не упоминая при этом о той частной системе, которой эта среда, собственно, определяется.

2. Вторая постановка, непосредственно проистекающая из неизменяемости взаимных расстояний. В движущейся твердой системе расстояние между произвольными двумя точками P_1 и P_2 остается постоянным; вследствие этого в продолжение всего движения имеет место тождество:

$$(\overline{P_1P_2})^2 = r^2, \tag{3}$$

где r есть скаляр, не зависящий от времени. Диференцируя это соотношение по времени, получим:

$$\overline{P_1P_2} \cdot \dot{\overline{P_1P_2}} = 0. \tag{4}$$

Если O есть постоянная точка движущейся системы, то (I, рубр. 71):

$$\overline{P_1P_2} = \overline{OP_2} - \overline{OP_1};\quad \dot{\overline{P_1P_2}} = \dot{\overline{OP_2}} - \dot{\overline{OP_1}} = \frac{dP_2}{dt} - \frac{dP_1}{dt}.$$

Поэтому предыдущее тождество можно написать в таком виде:

$$\overline{P_1P_2}\,\frac{dP_2}{dt} = \overline{P_1P_2}\,\frac{dP_1}{dt}. \tag{5}$$

Если разделим в этом равенстве с обеих сторон вектор $\overline{P_1P_2}$ на r, то оно выразит, что компоненты скоростей $\dot{P}_1$ и $\dot{P}_2$ по прямой P_1P_2 равны между собою.

Но и, обратно, интегрирование приводит от уравнения (4) к соотношению (3) с постоянным значением скаляра r. Отсюда мы заключаем, что *твердые движения системы точек характеризуются тем обстоятельством, что в каждый момент скорости любых двух ее точек имеют одинаковые компоненты по прямой, соединяющей эти точки.*

---

[1]) То-есть сохраняющей постоянные расстояния от всех точек системы S. (*Ред.*)

Другими словами, разность (геометрическая) скоростей двух точек перпендикулярна к прямой, соединяющей эти точки; это и выражают равенством (5), если написать его в виде:

$$\overline{P_1P_2}\left(\frac{dP_2}{dt}-\frac{dP_1}{dt}\right)=0.$$

Поэтому, если, в частности, скорость какой-либо точки в некоторый момент равна нулю, то скорость всякой другой точки P_2 в тот же момент перпендикулярна к прямой P_1P_2 (или также равна нулю).

2. Поступательные движения.

3. Прежде чем обратиться к изучению твердого движения[1] в наиболее общем его виде, рассмотрим некоторые наиболее простые типы его. В первую очередь, предположим, что некоторое твердое движение происходит таким образом, что каждый вектор $\overline{P_1P_2}$, идущий от одной точки системы к другой, остается постоянным; это значит, он сохраняет не только свою длину, как при всяком твердом движении, но и свое направление и сторону обращения. Такое движение называется поступательным.

Выразив вектор системы $\overline{OP}$ в форме (1), мы видим, что в случае поступательного движения правая сторона равенства должна сохранять постоянное значение (должна представлять постоянный вектор, каковы бы ни были значения координат x, y, z). В частности, должны оставаться постоянными основные версоры $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ подвижных осей. Обратно, если это имеет место, т. е. если основные версоры $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ остаются во все время постоянными, то и всякий вектор системы $\overline{P_1P_2}$ остается постоянным, ибо

$$\overline{P_1P_2}=\overline{OP_2}-\overline{OP_1}=(x_2-x_1)\,\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\,\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\,\boldsymbol{k}.$$

Итак, уравнение (1′) *выражает поступательное движение в том, и только в том, случае, если во все время движения остаются постоянными основные версоры* $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

Чтобы получить уравнения твердого движения в декартовых координатах, предположим, что в начальный момент оси подвижного триэдра были взяты параллельными неподвижным осям и были обращены каждая соответственно в ту же сторону. Тогда векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, которые в нашем поступательном движении остаются постоянными, будут во все время движения иметь компоненты:

$$1,\ 0,\ 0;\quad 0,\ 1,\ 0;\quad 0,\ 0,\ 1;$$

это значит, в уравнениях (2):

$$\alpha_1=1,\ \beta_1=0,\ \gamma_1=0;\ \alpha_2=0,\ \beta_2=1,\ \gamma_2=0;\ \alpha_3=0,\ \beta_3=0,\ \gamma_3=1;$$

---

[1] Под твердым движением здесь и в дальнейшем подразумевается движение твердого тела.

уравнения принимают поэтому вид:

$$\xi = x + \alpha(t), \quad \eta = y + \beta(t), \quad \zeta = z + \gamma(t), \tag{6}$$

где α, β, γ, по существу, суть координаты совершенно произвольной точки движущейся системы (или точки, неизменно с нею связанной). Это значит: *поступательное твердое движение определяется движением одной точки системы.*

4. Тождество

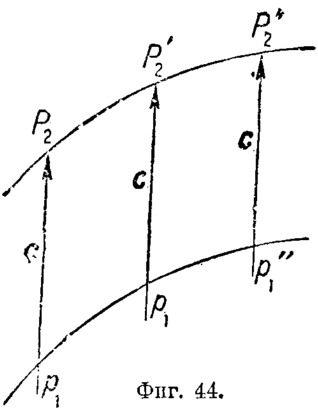
$$\overline{P_1P_2} = \overline{OP_2} - \overline{OP_1} = c, \tag{7}$$

где c — постоянный вектор, имеет место для любых двух точек P_1, P_2 во все время поступательного движения. Согласно этому, положение точки P_2 в любой момент можно получить, прибавляя постоянный вектор c к вектору $\overline{OP_1}$ (фиг. 44), т. е., если в любой момент перенести начало вектора c в точку, в которой в этот момент находится P_1, то конец его определит положение точки P_2. Из уравнения (7), таким образом, вытекает, что *в поступательном движении траектории отдельных точек одинаковы и одинаково расположены* (т. е. могут быть приведены в совмещение одна с другой параллельным перенесением) и что *точки пробегают эти траектории по одному и тому же закону.*

Это последнее утверждение можно доказать также, диференцируя уравнение (7) по t; мы получим:

$$\frac{d\overline{OP_2}}{dt} = \frac{d\overline{OP_1}}{dt} \text{ или } \dot{P}_2 = \dot{P}_1; \tag{8}$$

все точки системы имеют, таким образом, в любой момент движения, равные скорости.



Фиг. 44.

И, обратно, если в движущейся системе в любой момент движения все точки имеют одну и ту же скорость (конечно, в векторном значении слова), т. е. для любых двух ее точек P_1 и P_2 имеет место соотношение (8), то, интегрируя это уравнение, мы приходим к соотношению (7); движение будет поступательным.

Таким образом всякое поступательное движение характеризуется определенным вектором, представляющим собою функцию только от времени и выражающим в каждый момент общую скорость всех точек системы.

Этот вектор называется *скоростью поступательного движения* и в качестве его представителя можно принять скорость любой точки системы, например, скорость $\dot{O}$ начала координат подвижного триэдра; ее компоненты имеют значения $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$. Аналогично этому, диференцируя уравнение (8) относительно t, мы приходим к заключению, что ускорения всех точек системы в любой момент, в частности, равны ускорению $\ddot{O}$ (с координатами $\ddot{\alpha}, \ddot{\beta}, \ddot{\gamma}$) точки O. Вектор, таким образом определенный (и представляющий собою функцию только времени), называется *ускорением поступательного движения.*

Если скорость поступательного движения остается постоянной и, следовательно, ускорение равно нулю, то все точки системы движутся прямолинейно и равномерно (II, рубр. 16) и притом по параллельным траекториям с одинаковой (скалярной) скоростью; в этом случае движение называется *равномерным поступательным движением.*

3. Вращательные движения.

5. Другим важным типом твердого движения является вращательное движение. *Вращательным* называется такое твердое движение системы, при котором остаются неподвижными точки некоторой прямой, называемой *осью вращения.* Чтобы реализовать такого рода движение, очевидно, достаточно вследствие твердости системы, закрепить две точки оси. Если в подвижной системе S возьмем произвольную точку P вне оси вращения, то перпендикуляр PQ, опущенный из нее на ось, вследствие твердости системы будет во все время вращения сохранять свою длину и будет оставаться перпендикулярным к оси; это значит, всякая точка системы S, лежащая вне оси, будет двигаться в плоскости, перпендикулярной к оси, по окружности, имеющей центр Q на самой оси. Положение системы S, вращающейся вокруг оси z, определяется в каждый момент положением одной ее точки P (на соответствующей круговой траектории) или, что, по существу, то же, положением некоторой полуплоскости p, отходящей от оси и твердо связанной с системой S; положение же этой полуплоскости можно определять, указывая для каждого момента ее аномалию $\theta = \widehat{\pi p}$ относительно определенной полуплоскости π, также отходящей от оси z, но твердо связанной с неподвижным координатным триэдром. Чтобы присвоить этим аномалиям (измеряемым в радианах) знак, мы ориентируем ось вращения в определенную сторону и будем считать углы θ положительными в ту сторону, которая соответствует правостороннему вращению вокруг ориентированной оси.

Во время движения аномалия θ движущейся полуплоскости p представляет собой определенную функцию времени $\theta(t)$; как обыкновенно, мы будем считать эту функцию однозначной, непрерывной и диференцируемой (допускающей, по крайней мере, производные первого и второго порядка). И здесь,—как мы это уже делали в случае плоского движения, выраженного в полярных координатах,—чтобы не допустить привходящей разрывности функции $\theta(t)$, мы примем, что аномалия θ может непрерывно изменяться и за пределы интервала от 0 до 2π (которого, по существу, достаточно для определения всевозможных положений полуплоскости p).

Если в течение некоторого промежутка времени Δt, аномалия θ полуплоскости p изменяется на $\Delta\theta$, то все точки, очевидно, описывают в этот промежуток Δt на соответствующих системе S круговых траекториях дуги, которым соответствует при центре угол $\Delta\theta$; взяв поэтому

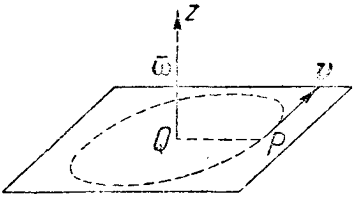
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta},$$

мы заключаем, что *во всякий момент движения все точки вращающейся твердой системы имеют ту же угловую скорость.*

При установленных положениях эта угловая скорость $\dot{\theta}$ (представляющая собой только функцию времени) своим знаком—положительным или отрицательным—определяет в каждый момент, является ли движение правосторонним или левосторонним (конечно, относительно ориентированной оси).

Своей угловой скоростью вращательное движение определяется (по крайней мере, до надлежащих начальных условий), если известна ось вращения. Угловая скорость, о которой здесь идет речь, представляет собою скалярную величину. Но, чтобы ее отобразить совместно с направлением оси, обыкновенно вводят вектор $\bar{\omega}$, имеющий во всякий момент t длину $\dot{\theta}(t)$ и направленный по оси вращения в ту ее сторону, по отношению к которой вращение является правосторонним. Этот вектор $\bar{\omega}$, длина которого обыкновенно меняется (в функции времени), но направление которого остается постоянным, называется *векторной угловой скоростью вращательного движения.* Когда говорят просто об угловой скорости вращательного движения, то имеют в виду именно эту *векторную* скорость. Скалярная же угловая скорость $\dot{\theta}$, очевидно, служит компонентой угловой скорости $\bar{\omega}$, по ориентированной оси вращения z. Если обозначим через $\boldsymbol{k}$ версор этой оси, то

$$\bar{\omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{k}. \tag{9}$$



Фиг. 45.

6. Вектор $\bar{\omega}$ позволяет просто выразить векторную скорость $\boldsymbol{v}$ любой точки P вращающейся системы (фиг. 45). Так как точка P движется по окружности в плоскости π, перпендикулярной к оси, вокруг точки Q (относительно проекции точки P на ось z) с угловой скоростью $\dot{\theta}$, то напряжение ее скорости равно $\dot{\theta} \cdot QP$ (II, рубр. **33**), она направлена по касательной к окружности, имеющей центром точку Q и радиус QP; эта касательная перпендикулярна как к $\overline{QP}$, так и к вектору $\bar{\omega}$. Сверх того, вектор $\boldsymbol{v}$, как установлено в предыдущей рубрике, имеет относительно $\bar{\omega}$ правостороннее направление; отсюда непосредственно получается для скорости произвольной точки P выражение:

$$\boldsymbol{v} = [\bar{\omega} \cdot \overline{QP}]$$

В этой формуле, кроме точки P, скорость которой мы желаем выразить, фигурирует еще ее проекция Q на ось z, которая, вообще, меняется вместе с P. Но эту точку Q можно элиминировать, вводя вместо нее произвольную *постоянную* точку Ω на оси вращения. Как бы точка Ω ни была выбрана,

$$\overline{QP} = \overline{Q\Omega} + \overline{\Omega P};$$

подставляя это выражение в предыдущую формулу и замечая, что векторное произведение параллельных векторов $\overline{\omega}$ и $\overline{Q\Omega}$ равно нулю, мы приходим к выводу, что скорость любой точки P вращающегося пространства выражается формулой:

$$v(t) = [\overline{\omega}(t)\overline{\Omega P}], \tag{10}$$

где Ω *есть постоянная точка, а* $\overline{\omega}$ — *вектор постоянного направления.*

7. Выражение (10) скорости является характерным для вращательного движения (поскольку выполнены условия, установленные для Ω и $\overline{\omega}$). В самом деле, если система движется таким образом, что скорость каждой точки выражается формулой (10), то для любых двух ее точек P_1 и P_2 будем иметь:

$$v_1 = [\overline{\omega}\,\overline{\Omega P_1}], \quad v_2 = [\overline{\omega}\,\overline{\Omega P_2}];$$

вычитая почленно первое равенство из второго, получим:

$$v_2 - v_1 = [\overline{\omega}\,\overline{P_1 P_2}]. \tag{11}$$

Но вектор $[\overline{\omega}\,\overline{P_1P_2}]$, по определению, перпендикулярен к P_1P_2; умножая поэтому обе части этого равенства скалярно на $\overline{P_1P_2}$, получим:

$$(v_2 - v_1)\,\overline{P_1P_2} = 0,$$

т. е.

$$[v_2\,\overline{P_1P_2}] = [v_1\,\overline{P_1P_2}];$$

это же соотношение, имеющее место для любых двух точек системы, как мы видели в рубр. 2, устанавливает, что движение твердое.

Но из соотношения (10) вытекает также, что это движение вращательное; в самом деле, оно обнаруживает, что все точки P, для которых вектор $\overline{\Omega P}$ параллелен постоянному направлению $\overline{\omega}$ (т. е. точки прямой, проходящей через Ω и параллельной вектору $\overline{\omega}$), имеют скорость, равную нулю, т. е. остаются неподвижными.

8. Выражение для ускорения произвольной точки P вращающейся твердой системы можно получить, как мы это и сделаем ниже, путем диференцирования по t характеристического выражения (10) скорости движения; но очень поучительно также получить ускорение, учитывая то обстоятельство, что каждая,

точка системы S совершает плоское круговое движение. Для этого достаточно припомнить (II, рубр. 26) общие выражения $\ddot{s}$ и $\frac{v^2}{r}$ тангенциальной и нормальной слагающих ускорения. Нормальная компонента, очевидно, совпадает с *центростремительным* ускорением — a_ρ. Принимая во внимание, что $\dot{s} = \rho\dot{\theta}$ и что ρ остается постоянным, сохраняя значение радиуса круговой траектории r, мы находим:

$$\ddot{s} = \rho\ddot{\theta}, \qquad a_\rho = -\rho\dot{\theta}^2.$$

Здесь $\ddot{s}$ есть слагающая ускорения $\boldsymbol{a}$ точки P, как обыкновенно, по тангенциальному версору $\boldsymbol{t}$ круговой траектории, ориентированному в сторону возрастающих аномалий. Версор $\boldsymbol{t}$ имеет направление скорости $\boldsymbol{v}$ точки P, но обращен в ту же сторону или в противоположную, смотря по тому, имеет ли $\dot{\theta}$ положительное или отрицательное значение. Скорость же $\boldsymbol{v}$, согласно формулам (9) и (10), мы можем представить в виде:

$$\boldsymbol{v} = \dot{\theta}\,[\boldsymbol{k}\,\overline{\Omega P}].$$

С другой стороны, так как скалярная скорость точки P имеет значение $\rho\dot{\theta}$, то $\boldsymbol{v} = \rho\dot{\theta}\boldsymbol{t}$, а поэтому

$$\boldsymbol{t} = \frac{1}{\rho}\left[\boldsymbol{k}\,\overline{\Omega P}\right].$$

Умножая обе части этого равенства на $\ddot{s} = \rho\ddot{\theta}$, мы получим для тангенциальной компоненты ускорения $\boldsymbol{a}$ выражение:

$$\dot{\theta}\,[\boldsymbol{k}\,\overline{\Omega P}],$$

или, принимая вновь во внимание соотношение (9):

$$[\dot{\omega}\,\overline{\Omega P}].$$

Что касается нормальной компоненты, то для ее вычисления нужно, прежде всего, выразить версор ориентированного направления QP; он равен $\frac{\overline{QP}}{\rho}$.

Умножая его на $a_\rho = -\rho\dot{\theta}^2$, получим искомую компоненту в форме:

$$-\dot{\theta}^2\,\overline{QP} = -\omega^2\overline{QP}.$$

Складывая теперь обе слагающие ускорения, мы получим искомое выражение ускорения произвольной точки вращающейся твердой системы:

$$\boldsymbol{a} = [\dot{\omega}\,\overline{QP}] - \omega^2\,\overline{QP}. \tag{12}$$

Эту же формулу, как уже указано выше, можно получить и непосредственно формальным путем, диференцируя формулу (10). В самом деле:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \left[\dot{\bar{\omega}}\ \overline{\Omega P}\right] + \left[\bar{\omega}\ \dot{\overline{\Omega P}}\right],$$

а так как $\dot{\overline{\Omega P}} = \boldsymbol{v}$, то

$$\boldsymbol{a} = [\dot{\bar{\omega}}\ \overline{\Omega P}] + [\bar{\omega}\,\boldsymbol{v}]. \tag{12'}$$

Так как вектор $\boldsymbol{v}$ выражается формулой (10), то здесь достаточно подставить это выражение во второй член формулы (12′) и воспользоваться разложением двойного векторного произведения (26) гл. I, чтобы получить соотношение (12). В самом деле, по формуле разложения:

$$[\bar{\omega}\,\boldsymbol{v}] = [\bar{\omega}\,[\bar{\omega}\,\overline{\Omega P}]] = \bar{\omega}\,(\bar{\omega}\,\overline{\Omega P}) - \overline{\Omega P}\cdot\omega^2.$$

С другой стороны, согласно формуле (9),

$$\bar{\omega}\,(\bar{\omega}\,\overline{\Omega P}) = \dot{\theta}^2\,\boldsymbol{k}\,(\boldsymbol{k}\,\overline{\Omega P}).$$

Но, с одной стороны, $\boldsymbol{k}\,\overline{\Omega P}$ есть численное значение проекции вектора $\overline{\Omega P}$ на ось $\boldsymbol{k}$, а $\boldsymbol{k}\,(\boldsymbol{k}\,\overline{\Omega P})$ есть сама проекция вектора $\overline{\Omega P}$ на ось $\boldsymbol{k}$, т. е. вектор $\overline{\Omega Q}$; с другой стороны, по той же формуле (9), $\dot{\theta}^2 = \omega^2$; а потому

$$[\bar{\omega}\,\boldsymbol{v}] = \omega^2\ \overline{\Omega Q} - \omega^2\ \overline{\Omega P} = \omega^2\,\overline{PQ} = -\omega^2\,\overline{OP}.$$

Полезно выполнить то же вычисление и иным путем. Векторы $\overline{PQ}$ $\bar{\omega}$ и $\boldsymbol{v}$ образуют ортогональный правосторонний триэдр. Поэтому вектор $[\bar{\omega}\,\boldsymbol{v}]$ имеет направление и сторону обращения вектора $\overline{PQ}$. С другой стороны, длина вектора $\boldsymbol{v}$ равна ωPQ, а потому длина вектора $[\bar{\omega}\,\boldsymbol{v}]$ равна $\omega^2 PQ$. Поэтому векторы $[\bar{\omega}\,\boldsymbol{v}]$ и $\omega^2\,\overline{PQ}$ имеют одинаковую длину, одно и то же направление и ту же сторону обращения. Вместе с тем,

$$[\bar{\omega}\,\boldsymbol{v}] = \omega^2\,\overline{PQ} = -\omega^2\,\overline{QP}.$$

Подставляя это в формулу (12′), получаем для $\boldsymbol{a}$ выражение (12).

Если угловая скорость ω постоянна, т. е. не только сохраняет постоянное направление, но имеет и постоянную длину, то каждая точка P системы совершает равномерное круговое движение (со скоростью v), которая от точки к точке меняется пропорционально расстоянию от оси; твердое движение называется, в этом случае, *равномерным вращением*. Ускорение в этом случае сводится к своей центростремительной слагающей:

$$\boldsymbol{a} = -\omega^2\,\overline{QP},$$

ибо в формуле (12) в этом случае $\dot{\omega} = 0$.

9. Чтобы из уравнений (2) получить уравнения вращательного движения в возможно более простой форме, целесообразно выбрать оси z и ζ неподвижного и подвижного триэдров так, чтобы обе они совпадали с осью вращения. Совместив, далее, точку Ω с O, выберем полуоси x и ζ так, чтобы они лежали соответственно в полуплоскостях p и π (первая подвижная, вторая неподвижная), которые мы взяли в рубр. 5 для определения соответствующей каждому моменту аномалии $\theta(t)$. Тогда очевидно:

$$\widehat{\xi x} = \theta(t), \quad \widehat{\xi y} = \theta(t) + \frac{\pi}{2}; \tag{13}$$

вместе с тем $\boldsymbol{k}$ есть постоянный вектор с компонентами

$$\alpha_3 = 0, \ \beta_3 = 0, \ \gamma_3 = 1;$$

версоры же $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ вследствие соотношений (13) будут иметь компоненты:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos\theta, & \beta_1 &= -\sin\theta, & \gamma_1 &= 0; \\ \alpha_2 &= \sin\theta, & \beta_2 &= \cos\theta, & \gamma_2 &= 0. \end{aligned}$$

А так как $\alpha = \beta = \gamma = 0$, то мы получим как частный случай общих уравнений (2) для всякого вращательного движения вокруг оси $\zeta = z$ следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x\cos\theta - y\sin\theta, \\ \eta &= x\sin\theta + y\cos\theta, \\ \zeta &= z, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

где, конечно, θ есть определенная функция времени. Диференцируя уравнения (14) дважды по времени, мы получим скалярные формулы, соответствующие соотношениям (10) и (12); точнее, мы получим уравнения, выражающие компоненты обеих частей этих равенств на оси $\Omega\xi\eta\zeta$.

В частности, если вращение происходит равномерно, то $\dot\theta = \pm\omega$, где ω есть постоянная, которую нужно взять со знаком $+$ или $-$, смотря по ориентации оси, т. е. в зависимости от того, является ли движение относительно положительной оси z правосторонним или левосторонним. При этих условиях, диференцируя уравнения (14), мы получим для компонент скорости и ускорения по неподвижным осям выражения:

$$\begin{aligned} \dot\xi &= \mp\omega\eta, & \dot\eta &= \pm\omega\xi, & \dot\zeta &= 0, \\ \ddot\xi &= -\omega^2\xi, & \ddot\eta &= -\omega^2\eta, & \ddot\zeta &= 0. \end{aligned}$$

Небесполезно отметить, что отсюда, как и непосредственно из формул (10) и (12), получаются для аналогичных компонент скорости и ускорения по подвижным осям выражения:

$$\begin{aligned} v_x &= \mp\omega y, & v_y &= \pm\omega x, & v_z &= 0, \\ a_x &= -\omega^2 x, & a_y &= -\omega^2 y, & a_z &= 0. \end{aligned}$$

4. Сложение движений.

10. Определение. Приведенный в рубр. 2 критерий дает возможность установить важное свойство твердых движений, к которому мы приходим, распространяя на системы точек понятие о составлении или сложении движений, установленное уже для одной движущейся точки (рубр. 5 предыдущей главы). Положим, что для одной и той же системы S точек установлены как возможные для нее в определенный промежуток времени движения M_1, M_2, M_3, ... (в конечном числе). Движением, *составленным из этих движений* или *сложенным из них* называется такое движение системы S, при котором каждая точка ее в любой момент t имеет скорость, равную сумме ее скоростей (результирующей скорости), составляющих движения M_1, M_2, M_3,...

Это определение влечет за собою следующую основную теорему. *Движение, составленное из нескольких твердых движений, также представляет собою твердое движение.* В самом деле, возьмем две произвольные точки системы P' и P'' и обозначим через v_1' и v_1'', v_2' и v_2'', v' и v_3,... скорости, которые эти точки должны иметь в произвольный момент t в соответствующих движениях M_1, M_2, M_3,...; тогда в составленном движении эти точки, по определению, будут иметь скорости:

$$v' = v_1' + v_2' + v_3' + \dots \quad \text{и} \quad v'' = v_1 + v_2'' + v_3'' + \dots$$

Так как, по твердости составляющих движений, скорости v_1' и v_1'', v_2' и v_2'', v_3' и v_3'' имеют одинаковые компоненты по прямой $P'P''$, то тем свойством будут обладать и скорости v' и v'' результирующего движения; поскольку же это имеет место для любой пары точек системы S и в любой момент движения, мы отсюда заключаем, что составленное движение будет твердым.

11. Сложение поступательных движений. Если несколько поступательных движений M_1, M_2,... соединяются в одно движение, как это указано в рубр. 3, то и составленное из них (результирующее) движение будет поступательным; в самом деле, поскольку в каждом из составляющих движений все точки имеют одну и ту же скорость, то и в составленном движении все точки в каждый момент будут иметь одну и ту же скорость, равную сумме скоростей составляющих движений.

И, обратно, каждое поступательное движение данной скорости $v(t)$ можно считать составленным из нескольких поступательных движений, или, как говорят, каждое поступательное движение можно *разложить* на несколько поступательных же движений; для этого достаточно каким угодно способом разложить вектор скорости $v(t)$ на несколько векторов (представляющих собою функции времени) и принять каждый из них за скорость некоторого поступательного движения.

Из этих бесчисленных возможных разложений мы отметим два следующих (аналогичных тем, которые мы рассматривали в II, рубр. 5):

1) разложение на прямолинейное поступательное движение по данному направлению и на плоское поступательное движение, перпендикулярное к этому направлению; это разложение получается путем разложения вектора $\overline{\tau}$ на два вектора по направлению заданной прямой и перпендикулярной к ней плоскости;

2) разложение на три прямолинейных движения (например, по направлениям неподвижных осей координат); за составляющие движения нужно принять те, которые имеют скоростями слагающие вектора $\overline{\tau}$ по этим направлениям.

12. Разложение вращательных движений. Слагая два вращательных движения, мы, по общей теореме рубр. **10**, получим твердое движение. Исследуем здесь тот случай, когда оси двух движений, которые мы желаем сложить, проходят обе через одну и ту же точку Ω, которая вследствие этого остается неподвижной в обоих движениях. Принимая эту точку за исходную, как в формулах (10) и (12), мы будем иметь следующие выражения для скоростей произвольной точки P в слагающих движениях:

$$v_1=[\overline{\omega}_1\,\overline{\Omega P}],\quad v_2=[\overline{\omega}_2\,\overline{\Omega P}],$$

где $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ — угловые скорости заданных вращательных движений; скорость же результирующего движения:

$$v=[(\overline{\omega}_1+\overline{\omega}_2)\,\overline{\Omega P}].$$

Это выражение скорости составленного движения формально аналогично выражению скорости вращательного движения, приведенному в рубр. 6; но оно, вообще, не удовлетворяет двум существенным условиям, указанным в этой рубрике. И в самом деле, хотя Ω и в этом случае представляет собою неподвижную точку, но вектор $\overline{\omega}_1+\overline{\omega}_2$, который должен был бы играть здесь роль угловой скорости, вообще не сохраняет постоянного направления в пространстве; это обусловливается тем, что слагающие векторы $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$, сохраняя каждый постоянное направление в пространстве, имеют, однако, переменные длины; вследствие этого сумма их сохраняет постоянное направление только в исключительных случаях. Поэтому результирующее движение не будет вращательным за исключением того случая, *когда сумма $\overline{\omega}_1+\overline{\omega}_2$ сохранит, как и слагающие векторы $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$, постоянное направление.*

Отметим, что последнее обстоятельство имеет место, когда оба вектора $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ остаются постоянными, т. е. когда оба слагающие движения равномерны, а также когда векторы $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_3$ имеют общее направление, т. е. когда оси обоих вращательных движений совпадают. Так как все это можно повторить и в случае, когда слагается несколько вращательных движений, оси которых сходятся в общей неподвижной точке Ω, то мы приходим к следующим заключениям.

Несколько равномерных движений, оси которых сходятся в общей точке Ω, *слагаются в одно равномерное движение, ось которого проходит через ту же точку* Ω.

Несколько вращательных движений (хотя бы и неравномерных), *происходящих вокруг общей оси, слагаются во вращательное движение вокруг той же оси.*

В обоих случаях угловая скорость результирующего движения представляет собою сумму угловых скоростей (векторных) обоих составляющих движений.

13. Разложение вращательных движений. Обратно, всякое вращательное движение можно бесчисленным множеством способов разложить на несколько вращательных движений. Для этого достаточно разложить вектор $\bar{\omega}$, выражающий угловую скорость данного движения, на несколько слагающих, имеющих каждая постоянное направление; эти слагающие нужно принять за угловые скорости слагающих движений, оси которых проходят через общую точку Ω на оси данного движения. В частности, выбрав точку Ω, можно разложить вектор $\bar{\omega}$ на две слагающие, из которых одна будет лежать на произвольной прямой, проходящей через точку Ω, а другая в плоскости, перпендикулярной этой оси; вращательное движение будет разложено на два составляющих вращательных движения со взаимно перпендикулярными осями. Аналогично вращательное движение можно разложить на три „попарно ортогональных“ вращательных движения, т. е. на три движения, оси которых попарно перпендикулярны друг к другу; для этого достаточно выбрать на оси данного движения точку Ω и разложить угловую скорость $\bar{\omega}$ на три слагающих по трем данным направлениям; если эти слагающие $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_3$ мы примем за угловые скорости вращательных движений вокруг соответствующих осей, то их сумма, составляющая вектор $\bar{\omega}$ постоянного направления, воспроизведет заданное вращательное движение.

5. Движения поступательно-вращательные.

14. *Поступательно-вращательным* называется такое твердое движение, которое составлено из поступательного движения и из вращательного движения вокруг постоянной оси. Если $\bar{\tau}(t)$ есть скорость поступательного движения, $\bar{\omega}(t)$ — угловая скорость вращательного движения и Ω — точка на оси последнего, то скорость произвольной точки P системы в поступательно-вращательном движении выразится через (рубр. 4, 6):

$$v=\bar{\tau}+[\bar{\omega}\,\overline{\Omega P}], \tag{15}$$

где — это важно напомнить — Ω есть неподвижная точка, векторы $\bar{\tau}$ и $\bar{\omega}$ зависят только от времени, и при этом $\bar{\omega}$ имеет *постоянное направление.*

Из формулы (15) можно получить другое выражение для скорости произвольной точки P, которое, как мы увидим, чрезвычайно полезно и поучительно в общей теории твердых движений.

Если возьмем произвольную точку O, неизменно связанную с нашей твердой системой, и обозначим ее скорость через v_0, то последняя, согласно формуле (15), выразится так:

$$v_0 = \bar{\tau} + [\bar{\omega}\,\overline{\Omega O}]. \tag{16}$$

Исключая $\bar{\tau}$ из соотношений (15) и (16), для чего достаточно почленно вычесть второе равенство из первого, и замечая, что

$$[\bar{\omega}\,\overline{\Omega P}] - [\bar{\omega}\,\overline{\Omega O}] = [\bar{\omega}\,(\overline{\Omega P} - \overline{\Omega O})] = [\bar{\omega}\,\overline{OP}],$$

мы получим:

$$v = v_0 + [\bar{\omega}\,\overline{OP}]. \tag{17}$$

Это выражение представляет явную аналогию с формулой (15); но оно существенно все же отличается от последней тем, что O не есть неподвижная точка, как Ω во вращательном движении, а произвольно взятая точка твердой системы. Отсюда следует, что разложение данного поступательно-вращательного движения, выражаемое соотношением (17), существенно отличается от того, которое, в соответствии с определением поступательно-вращательного движения, содержится в формуле (15). В самом деле, вектор v_0 зависит только от времени, а не от точки P; его можно рассматривать поэтому как скорость некоторого поступательного движения всей твердой системы. Но произведение $[\bar{\omega}\,\overline{OP}]$ не может быть интерпретируемо, как скорость вращательного движения вокруг неподвижной оси, потому что точка O не остается неподвижной, как Ω, а движется, как уже сказано, с нашей твердой системой. Но если мы себе представим триэдр, начало которого всегда совпадает с точкой O, а оси параллельны осям ξ, η, ζ, то такой триэдр, очевидно, совершает относительно неподвижного триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$ поступательное движение вместе с точкой O, т. е. со скоростью v_0. И вот, относительно этого вспомогательного триэдра и связанной с ним неизменяемой среды данная твердая система, действительно, совершает вращение с угловой скоростью $\bar{\omega}$, ибо в ней точка O остается неподвижной.

Таким образом равенство (17) выражает разложение данного движения на поступательное со скоростью v_0 и вращательное с угловой скоростью $\bar{\omega}$ *относительно оси, которая перемещается вместе с поступательным движением* v_0, или иначе относительно неизменяемой среды, которая совершает поступательное движение вместе с точкой O.

Такое разложение поступательно-вращательного движения мы будем называть *несобственным* в отличие от *собственного* разложения, выражаемого соотношением (15). Различие между собственным и несобственным разложением заключается, таким образом, в том, что при собственном разложении оба составляющие движения совершаются относительно неподвижного триэдра или неподвижной среды (пространства) $\Omega\xi\eta\zeta$, а при несобственном разложении переносное движение тоже совершается относительно неподвижной среды $\Omega\xi\eta\zeta$, вращательное же движение происходит относительно вспомогательной воображаемой среды, которая перемещается поступательным движением вместе с точкой O. И так как точку O можно выбирать в системе S совершенно произвольно, то таких несобственных разложений можно произвести бесконечное множество.

15. Обратно, положим, что некоторое движение допускает несобственное поступательно-вращательное движение, выражаемое соотношением (17), где v_0 и $\bar{\omega}$ суть векторы, зависящие только от времени, причем второй из них имеет постоянное направление. Отсюда вытекает, что движение можно рассматривать как поступательно-вращательное в собственном смысле слова, и такое разложение можно произвести бесчисленным множеством способов.

В самом деле, взяв *произвольную* постоянную точку Ω, рассмотрим вектор

$$\bar{\tau} = v_0 + [\bar{\omega}\,\overline{O\Omega}];$$

он будет зависеть только от времени. Если обе части этого равенства вычтем из соответствующих частей равенства (17), то придем к соотношению (15), выражающему собственное разложение нашего движения на поступательное и вращательное.

16. Равномерные или винтовые поступательно-вращательные движения. Между поступательно-вращательными движениями особенное значение имеют те, в которых оба составляющие движения (при собственном разложении) происходят равномерно; такое движение мы будем называть просто *равномерным поступательно-вращательным движением*; это название мы ниже оправдаем.

Эти движения, по определению, характеризуются постоянством двух векторов $\bar{\tau}$ и $\bar{\omega}$ относительно триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$; укажем уже здесь, что в этом случае, как мы убедимся в следующей главе (рубр. 8), во всяком несобственном разложении остаются также постоянными векторы v_0 и $\bar{\omega}$, из которых последний выражает угловую скорость относительно подвижного триэдра $Oxyz$. И, обратно, постоянство векторов v_0 и $\bar{\omega}$ влечет за собою постоянство векторов $\bar{\tau}$ и $\bar{\omega}$ в собственном разложении. Чтобы характеризовать состояние движения, мы докажем следующую основную теорему.

Для всякого равномерного поступательно-вращательного движения существует такое собственное разложение, в котором угловая скорость вращения параллельна скорости поступательного движения.

Мы, естественно, исключим случаи, когда $\bar{\tau} = 0$ (вращательное движение) или $\bar{\omega} = 0$ (поступательное движение) или, наконец, когда вектор $\bar{\omega}$ параллелен вектору $\bar{\tau}$, так как в этом последнем случае наше утверждение оправдывается само собой. Вектор $\bar{\tau}$ мы разложим на два слагающие вектора: V по постоянному направлению угловой скорости $\bar{\omega}$ и V' — в плоскости, перпендикулярной к этому направлению, так что

$$\bar{\tau} = V + V'; \tag{18}$$

V и V' суть постоянные векторы, как и $\bar{\tau}$, причем последний наверное отличен от нуля.

Прежде всего легко доказать, что вследствие взаимной перпендикулярности векторов V' и $\bar{\omega}$ существует такой постоянный вектор h, перпендикулярный к $\bar{\omega}$, что

$$V' = -[\bar{\omega} h]. \tag{19}$$

В самом деле, рассматривая соотношение (19) как векторное уравнение с неизвестным вектором h, помножим обе его части векторно на $\bar{\omega}$. Получим:

$$[\bar{\omega} V'] = -\left[\bar{\omega}[\bar{\omega} h]\right].$$

Разлагая здесь двойное векторное произведение во второй части равенства по формуле (26) гл. I, получим:

$$[\bar{\omega} V] = \omega^2 h - \bar{\omega}(h\bar{\omega}).$$

Но так как вектор h должен быть перпендикулярен к $\bar{\omega}'$, то скалярное произведение hV' равно нулю и потому

$$h = \frac{1}{\omega^2}[\bar{\omega} V']. \tag{19'}$$

Действительно, определенный этим путем вектор h перпендикулярен к $\bar{\omega}$; подставляя же его в уравнение (19), получим (по разложении двойного произведения):

$$V' = -\frac{1}{\omega^2}\left[\bar{\omega}[\bar{\omega} V']\right] = V' - \frac{\bar{\omega}}{\omega^2}(\bar{\omega} V');$$

а так как векторы $\bar{\omega}$ и V' взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение обращается в нуль, и равенство превращается в тождество. Вектор (19′) удовлетворяет требованию.

Установив это, подставим в формулу (15) вместо $\bar{\tau}$ сумму (18), а вместо V' выражение (19); мы получим:

$$v = V + [\bar{\omega}\,\overline{\Omega P}] - (\bar{\omega}\, h].$$

Если вектор h приложен в точке Ω, то конец его определит точку Ω_1, так что $h = \Omega\,\Omega_1$; так как Ω есть неподвижная точка, а h—постоянный вектор, то и Ω_1 есть неподвижная точка. Вместе с тем

$$v = V + [\bar{\omega}\,\overline{\Omega P}] - [\bar{\omega}\,\overline{\Omega\,\Omega_1}] = V + [\bar{\omega}\,\overline{\Omega_1 P}]. \tag{20}$$

Мы видим, таким образом, что данное поступательно-вращательное движение может быть разложено на равномерное поступательное движение со скоростью V и равномерно-вращательное движение с угловой скоростью $\bar{\omega}$, параллельной вектору V; ось вращения имеет, следовательно, общее направление векторов $\bar{\omega}$ и V и проходит через неподвижную точку Ω_1.

Отметим, что угловая скорость $\bar{\omega}$ составляющего вращательного движения остается та же, какая была при первоначальном разложении (15).

Кроме того, если вектор $\bar{\tau}$ перпендикулярен к $\bar{\omega}$, то в разложении (18) и (20) $V = 0$; поэтому: если *равномерное вращательное движение сложить с равномерным поступательным движением, перпендикулярным к оси вращения, то получается равномерное же вращательное движение с тою же угловой скоростью, ось которого параллельна первоначальной.*

17. Разложение (20), которое, как было доказано в предыдущей рубрике, можно выполнить для всякого равномерного поступательно-вращательного движения, дает возможность сейчас же выяснить его ход.

Если исключить случай $V = 0$ (равномерное вращательное движение), то формула (20) выражает скорость v каждой отдельной точки P в виде суммы двух векторов V и $[\bar{\omega}\,\overline{\Omega_1 P}]$; первый параллелен оси $\bar{\omega}$, второй перпендикулярен к ней; если поэтому через точку Ω_1 проведем прямую ζ, параллельную $\bar{\omega}$ (т. е. оси слагающего вращательного движения) и плоскость π, к ней перпендикулярную, то эти два вектора V и $[\bar{\omega}\,\overline{\Omega_1 P}]$ представляют скорости ортогональных проекций P_ζ и P_1 точки P соответственно на ось ζ и на плоскость π. Так как V есть постоянный вектор, то прямолинейное движение точки P_ζ происходит равномерно. Что касается точки P_1, то ее скорость $[\bar{\omega}\,\overline{\Omega_1 P}]$ можно представить в виде $[\bar{\omega}\,\overline{\Omega_1 P_1}]$; в самом деле,

$$\overline{\Omega_1 P} = \overline{\Omega_1 P_1} + \overline{P_1 P}, \quad [\bar{\omega}\,\overline{\Omega_1 P}] = [\bar{\omega}\,\overline{\Omega_1 P_1}] + [\bar{\omega}\,\overline{P_1 P}];$$

но последнее слагаемое равно нулю, так как вектор $\overline{P_1 P}$ параллелен $\bar{\omega}$. Из того же обстоятельства, что скорость точки P_1 выражается произведением $[\bar{\omega}\,\overline{\Omega_1 P_1}]$, следует (рубр. 7), что она совершает равномерное вращательное движение вокруг точки Ω_1; а отсюда вытекает, далее, что (II, рубр. 55) каждая точка P системы *совершает равномерное винтовое движение.*

Это винтовое движение будет правосторонним или левосторонним в зависимости от того, обращены ли параллельные векторы V и $\bar{\omega}$ в одну и ту же или в противоположные стороны; ход винтовой траектории, равный $2\pi\, V/\omega$ (II, рубр. 55), остается постоянным для всех точек твердой системы. Напряжение же скорости

$$\sqrt{V^2+\omega^2(P_\zeta P)^2},$$

оставаясь постоянным для каждой точки системы, меняется все же от точки к точке в зависимости от ее расстояния от оси.

В частности, те точки движущейся системы, которые в какой-либо определенный момент, например $t=0$, расположены на оси ζ, определяют в самой системе прямую, которая скользит по оси ζ с постоянной скоростью, обращенной в сторону вектора V.

18. Чтобы написать скалярные уравнения этого винтового движения, примем за подвижный триэдр $Oxyz$ какой угодно триэдр, связанный с твердой системой, в котором осью Z служит прямая, скользящая по неподвижной оси вращения и обращенная в сторону $\bar{\omega}$. За неподвижный же триэдр $\Omega\xi\eta\zeta$ примем тот, с которым совпадает триэдр $Oxyz$ в момент $t=0$. Тогда компонента вектора $\bar{\omega}$ по оси $\Omega\zeta$ выражается по величине и знаку скаляром ω; компонента же вектора V будет иметь значение $\pm V$ в зависимости от того, обращены ли векторы V и $\bar{\omega}$ в одну и ту же сторону, или в противоположные, т. е. в зависимости от того, идет ли движение по правостороннему или левостороннему винту.

Если снова возьмем проекции произвольной точки P нашей системы P_ζ на ось ζ и P_1 на плоскость $\xi\eta$, то точка P_ζ движется по оси ζ равномерно со скоростью $\pm V$ и так как при $t=0$ имеем $\zeta\equiv z$ (как и $\zeta\equiv x$, $\eta\equiv y$)[1], то уравнение движения точки P_1 будет:

$$\zeta=\pm Vt+z. \tag{21}$$

Что касается проекции P_1, то она совершает в плоскости $\xi\eta$ равномерное движение по окружности с угловой скоростью $\dot{\theta}=\omega$; поэтому аномалия θ оси Ox относительно $O\xi$, которая должна обращаться в нуль в момент $t=0$, выразится через $\theta=\omega t$. Мы получим, следовательно, уравнения движения точки P_1, полагая в первых двух уравнениях (14) рубр. 9 $\theta=\omega t$. Приобщая эти уравнения к полученному уже уравнению (21),

---

[1] Знаком $\equiv$ автор желает отметить, что эти равенства в момент $t=0$ имеют место тождественно для всех точек системы. (*Ред.*)

мы переходим к следующим уравнениям твердого винтового движения:

$$\xi = x\cos\omega t - y\sin\omega t,$$
$$\eta = x\sin\omega t + y\cos\omega t,$$
$$\zeta = \pm Vt + z;$$

при $t=0$ они естественно сводятся к уравнениям (14), если в последних положить $\theta = \omega t$.

6. Твердое движение общего вида.

19. Формулы Пуассона. Тщательно изучив наиболее замечательные твердые движения, мы возвратимся к общей проблеме, поставленной в § 1. Чтобы определить скорость произвольной точки P твердой системы, достаточно будет возвратиться к общему геометрическому уравнению:

$$\overline{OP} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

и диференцировать его по времени; это приводит нас к производным основных версоров $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ по времени. Эти производные связаны между собою тремя векторными уравнениями, которые мы намерены здесь доказать средствами векторного исчисления; это доказательство, по существу, воспроизводит рассуждения Пуассона[1]), который эти соотношения впервые установил. Два других доказательства мы вкратце укажем в упражнениях.

Для определенности начнем с производной $\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}$; так как ее компоненты по подвижным осям могут быть выражены в форме

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\boldsymbol{i},\quad \frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\boldsymbol{j},\quad \frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\boldsymbol{k},$$

то мы можем написать:

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\boldsymbol{i}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\boldsymbol{j}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\boldsymbol{k}\right)\boldsymbol{k}. \tag{22}$$

Из шести тождеств, связывающих единичные векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, попарно перпендикулярные между собой (I, рубр. 20):

$$\boldsymbol{ii} = 1,\qquad \boldsymbol{jj} = 1,\qquad \boldsymbol{kk} = 1,$$
$$\boldsymbol{jk} = 0,\qquad \boldsymbol{ki} = 0,\qquad \boldsymbol{ij} = 0,$$

---

[1]) Ср. *T. Boggio*, Sulla relazione fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi, Atti del R. Istituto Veneto, T. XIV, 1915, стр. 1795—1799. В этом мемуаре основными версорами $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ служат произвольные три некомпланарные вектора, связанные с движущейся системой. Доказательство, приведенное в тексте, принадлежит *Марколонго* (R. Marcolongo), Meccanica razionale, Vol. I, Ed. 3-a, Milano 1922.

мы получаем, диференцируя по t, тождества:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{di}{dt}i=0, \quad \frac{dj}{dt}j=0, \quad \frac{dk}{dt}k=0, \\ \frac{dj}{dt}k+\frac{dk}{dt}j=0, \quad \frac{dk}{dt}i+\frac{di}{dt}k=0, \quad \frac{di}{dt}j+\frac{dj}{dt}i=0. \end{array}\right\} \qquad (22')$$

Принимая во внимание первое и пятое из них, мы отсюда получим:

$$\frac{di}{dt}=\left(\frac{di}{dt}j\right)j-\left(\frac{dk}{dt}i\right)k.$$

Так как, с другой стороны, версоры i, j, k попарно взаимно перпендикулярны, то имеют еще место равенства:

$$j=[ki], \quad k=[ij]=-[ji].$$

Предыдущему уравнению можно поэтому придать вид:

$$\frac{di}{dt}=\left[\left\{\left(\frac{dk}{dt}i\right)j+\left(\frac{di}{dt}j\right)k\right\}i\right].$$

Если ко второй части прибавить член $\left[\left\{\left(\frac{dj}{dt}k\right)ii\right\}\right]$, равный нулю, так как он выражает векторное произведение двух векторов, параллельных i, то мы придадим предыдущему соотношению более симметричную форму:

$$\frac{di}{dt}=\left[\left\{\left(\frac{dj}{dt}k\right)i+\left(\frac{dk}{dt}i\right)j+\left(\frac{di}{dt}j\right)k\right\}i\right].$$

Это и есть первое из трех соотношений между производными основных версоров, которые мы имеем в виду вывести; если положим:

$$\bar{\omega}=\left(\frac{dj}{dt}k\right)i+\left(\frac{dk}{dt}i\right)j+\left(\frac{di}{dt}j\right)k, \qquad (23)$$

то его можно будет написать в виде:

$$\frac{di}{dt}=[\bar{\omega}i].$$

Для производных $\frac{dj}{dt}$ и $\frac{dk}{dt}$ имеют место аналогичные выражения, которые получаются круговым перемещением векторов i, j, k; так как, однако, выражение (23) вектора $\bar{\omega}$ при таком круговом перемещении версоров не изменяется вовсе, то все три соотношения совместно могут быть представлены в простой форме:

$$\frac{di}{dt}=[\bar{\omega}i], \quad \frac{dj}{dt}=[\bar{\omega}j], \quad \frac{dk}{dt}=[\bar{\omega}k]. \qquad (24)$$

В этом виде они известны под названием *формул Пуассона*[1], так как ему мы обязаны скалярными формулами, которые получаем, проектируя их почленно на оси координат.

Компоненты по подвижным осям вектора $\bar{\omega}$, важное кинематическое значение которого мы скоро увидим, обыкновенно обозначают через p, q, r; из формул (22′) и (23) находим:

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{d\boldsymbol{j}}{dt}\boldsymbol{k} = -\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}\boldsymbol{j},\\ q &= \frac{d\boldsymbol{k}}{dt}\boldsymbol{i} = -\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\boldsymbol{k},\\ r &= \frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\boldsymbol{j} = -\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}\boldsymbol{i}. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

В заключение обратим внимание еще на следующее обстоятельство. Под параметром t, от которого зависят версоры $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, мы разумели время, но в предыдущем выводе формул (23) и (24) мы этой интерпретацией параметра не пользовались. Поэтому соотношения (23) и (24) остаются в силе для любого ортогонального триэдра, *зависящего от произвольного параметра.*

20. Скорость любого твердого движения. Если уравнение (1), как мы это уже делали, напишем в виде

$$\overline{OP} = \overline{\Omega P} - \overline{\Omega O} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

продиференцируем его и воспользуемся формулой Пуассона, то получим:

$$\dot{\overline{\Omega P}} = \dot{\overline{\Omega O}} + [\bar{\omega}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})];$$

если поэтому примем во внимание, что производные

$$\dot{\overline{\Omega P}} = \frac{d\Omega P}{dt} \quad \text{и} \quad \dot{\overline{\Omega O}} = \frac{d\Omega O}{dt}$$

выражают скорости $\boldsymbol{v}(t)$ и $\boldsymbol{v}_0(t)$ точек P и O, то предыдущее выражение примет вид:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + [\bar{\omega}\,\overline{OP}]. \tag{26}$$

Мы получили, таким образом, выражение скорости любой точки движущейся твердой системы; нужно принять во внимание, что точка O также может быть выбрана в движущейся системе совершенно произвольно; что касается векторов $\boldsymbol{v}_0$ и $\bar{\omega}$, то первый из них представляет скорость точки O, второй же определяется равенством (24); таким образом, оба эти вектора представляют собою функции только от времени, которые в частных случаях могут оказаться постоянными.

---

[1] С. Д. Пуассон (Siméon Denis Poisson) родился в Питивиере (Pithiviers, Loiret) в 1781 г., умер в Париже в 1840 г., преподавал аналитическую механику в Сорбонне и сам очень активно способствовал развитию этой дисциплины. Упоминаемые в тексте формулы находятся в его классическом труде „Traité de mécanique“, Paris 1831.

Рассуждение, совершенно аналогичное тому, которое приведено в рубр. 7, устанавливает и обратное предложение: если система точек движется таким образом, что скорость каждой из них выражается формулой (26), где векторы $\boldsymbol{v}_0$ и $\overline{\omega}$ суть функции одного только времени, то взаимные расстояния точек остаются во время движения неизменными; мы имеем, следовательно, дело с твердым движением. Выражение (26) является, таким образом, характеристичным для твердого движения. Таким образом, по отношению к обычному неподвижному триэдру твердое движение определено (по крайней мере, до надлежащих начальных условий), если в движущейся системе совершенно произвольно выбрана принадлежащая ей точка O и установлено два зависящих только от времени вектора $\boldsymbol{v}_0$ и $\overline{\omega}$. Эти два вектора называются *характеристическими векторами* твердого движения по отношению к *полюсу* или *центру приведения*; вместе с тем *характеристичными* для движения (иногда и просто *характеристиками* твердого движения) называют компоненты этих двух векторов по подвижным осям координат.

В предыдущей рубрике мы ввели уже обозначения p, q, r для компонент (по подвижным осям) вектора $\overline{\omega}$; теперь обозначим компоненты вектора $\boldsymbol{v}_0$ через u, v, w; проектируя уравнение (25) почленно на подвижные оси, мы получим так называемые *эйлеровы уравнения*:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= u + qz - ry, \\ v_y &= v + rx - pz, \\ v_z &= w + py - qx. \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Компоненты u, v, w вектора $\boldsymbol{v}_0$, имеющего по неподвижным осям компоненты $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$, могут быть выражены формулами:

$$\left.\begin{aligned} u &= \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{i} = \dot{\alpha}\alpha_1 + \dot{\beta}\beta_1 + \dot{\gamma}\gamma_1, \\ v &= \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{j} = \dot{\alpha}\alpha_2 + \dot{\beta}\beta_2 + \dot{\gamma}\gamma_2, \\ w &= \boldsymbol{v}_0\boldsymbol{k} = \dot{\alpha}\alpha_3 + \dot{\beta}\beta_3 + \dot{\gamma}\gamma_3. \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

21. Мгновенное распределение скоростей и тангенциальное винтовое движение. Из двух характеристических векторов $\boldsymbol{v}_0$ и $\overline{\omega}$, твердого движения по отношению к данному полюсу (связанному с системой) первый, по самому своему определению, уже имеет точно установленное кинематическое значение; это скорость точки O. Кинематическая интерпретация второго вектора вытекает из следующих соображений. Если обозначим через $\boldsymbol{v}_0^*$ и $\overline{\omega}^*$ значения, которые принимают векторы $\boldsymbol{v}_0$ и $\overline{\omega}$ в определенный момент t^*, то соотношение (26) дает для скорости произвольной точки P в этот момент выражение:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0^* + [\overline{\omega}^* \, \overline{OP}].$$

Сопоставляя это с формулой (17) рубр. **14**, мы заключаем, что распределение скоростей различных точек системы S в момент t^* такое же, какое имело бы место, если бы тело совершало равномерное переносно-вращательное движение, т. е. винтовое движение; последняя формула выражала бы при этом разложение движения в несобственном значении слова на переносное со скоростью v_0^* и вращательное с угловой скоростью $\bar\omega^*$ вокруг оси, проходящей через точку O параллельно вектору $\bar\omega^*$ и переносящейся параллельно себе самой со скоростью $\bar v_0^*$.

Как векторы v и $\bar\omega$ вообще меняются с течением времени, так изменяется и это винтовое движение; в каждый момент оно дает место такому же распределению скоростей твердого движения. Поэтому его называют *тангенциальным винтовым движением* твердого движения в рассматриваемый момент. Называя вместе с Маджи[1]) мгновенное распределение скоростей *состоянием движения* (*atto di moto*), мы можем на основании предыдущих соображений сказать, что *всякое состояние твердого движения является винтовым*.

Из изложенного следует, что вектор $\bar\omega$ можно в каждый момент рассматривать, как угловую скорость соответствующего тангенциального движения; поэтому вектор $\bar\omega$ просто называют *угловой скоростью* твердого движения в данный момент. Прямая, проходящая через точку O параллельно вектору ω (т. е. ось слагающего вращения при несобственном разложении тангенциального винтового движения, отнесенного к точке O), называется *мгновенною осью вращения* относительно полюса O. Ось тангенциального винтового движения, которая в каждый момент параллельна вектору $\bar\omega$, называется просто *осью* или *центральной осью движения* в рассматриваемый момент[2]). Центральная ось движения, естественно, вообще меняет свое положение с течением времени как по отношению к подвижным, так и по отношению к неподвижным осям координат. По самому своему определению, она в каждый момент представляет геометрическое место точек, в которых скорость в этот момент параллельна мгновенной угловой скорости; поэтому на основе соотношений (27) ее уравнения по отношению к подвижным осям суть:

$$\frac{u+qz-ry}{p}=\frac{v+rx-pz}{q}=\frac{w+py-qx}{r}.$$

Центральная ось движения остается неопределенной только в те моменты, в которые состояние движения становится чисто переносным.

22. Мгновенное движение системы S, т. е. совокупность элементарных смещений $dP=v\,dt$, которые отдельные ее точки

---

[1]) *Maggi*, Geometria del movimento, Bologna 1927, гл. III.

[2]) Существование осей движения было в первый раз указано Юлием Моцци (Giulio Mozzi) в 1766 г.

совершают в интервале от t до $t+dt$, выражается на основе соотношения (26), если примем во внимание, что $v_0\,dt = d\overline{\Omega O}$ и через $\bar\psi$ обозначим бесконечно малый вектор $\bar\omega\,dt$, векторным уравнением

$$dP = d\overline{\Omega O} + [\bar\psi\,\overline{OP}];$$

оно показывает, как это смещение получается через сложение смещений $d\Omega O$ (очевидно, переносного, одинакового для всех точек системы) и $[\bar\psi\,\overline{OP}]$ (очевидно, вращательного, ибо оно равно нулю для всех точек прямой, проходящих через точку O параллельно направлению $\bar\psi = \bar\omega\,dt$, т. е. мгновенной оси вращения относительно точки O).

Скаляр $\psi = \omega\,dt$ дает в каждый момент величину слагающего элементарного вращения.

23. Изменение характеристических векторов при изменении полюса. Характеристические векторы движения v_0 и $\bar\omega$ определены в каждый момент по отношению к данному полюсу или центру приведения O; таким образом, для одного и того же твердого движения, соответственно ∞^3 возможным положением полюса, существует такое же многообразие в определении характеристических векторов. Их кинематическое значение дает возможность непосредственно показать, как изменяются эти векторы с изменением положения полюса. Вектор $\bar\omega$, определяющий в каждый момент угловую скорость соответствующего вращательного движения, носит внутренний характер по отношению к заданному движению; если, поэтому, обозначим через v'_0 и $\bar\omega'$ характеристические векторы движения, отнесенные к полюсу O', отличному от O, но, конечно, также неразрывно связанному с твердой системой S, то, прежде всего, ясно, что

$$\bar\omega' = \bar\omega.$$

Эта независимость характеристического вектора $\bar\omega$ от выбора полюса может быть установлена и непосредственно. С этой целью покажем прежде всего, что угловая скорость $\bar\omega$ не изменяется, когда мы изменяем направление подвижных осей при том же полюсе O. В самом деле, обозначим через $\bar\omega^*$ угловую скорость, вычисленную по отношению к новому координатному триэдру (с тем же началом O). Скорость произвольной точки P движущейся системы выразится в зависимости от того, отнесена ли система к одному или к другому триэдру формулами:

$$v_0 + [\bar\omega\,\overline{OP}] \quad \text{или} \quad v_0 + [\bar\omega^*\,\overline{OP}].$$

Приравнивая эти два выражения одного и того же вектора, получим тождество:

$$[\bar\omega\,\overline{OP}] = [\bar\omega^*\,\overline{OP}] \quad \text{или} \quad [(\bar\omega - \bar\omega^*)\,\overline{OP}] = 0.$$

А так как оно должно оставаться в силе для любого вектора $\overline{OP}$, то отсюда непосредственно вытекает (I, рубр. 23):

$$\overline{\omega}^* = \overline{\omega}.$$

Теперь перенесем полюс из точки O в O'. Чтобы показать, что и в этом случае вектор $\overline{\omega}$, выражаемый формулой (24), не изменится, возьмем сначала оси, параллельные осям прежнего триэдра; так как при этом не изменятся основные версоры, то не изменится и определяемый ими по формуле (23) вектор $\overline{\omega}$.

Иначе обстоит дело при сравнении первых характеристических векторов v_0 и v_0'; если вектор v_0' отнесен к точке O', т. е. выражает скорость точки O', то в силу соотношения (26):

$$v_0' = v_0 + [\overline{\omega}\,\overline{OO'}] = v_0 + [\overline{O'O}\,\overline{\omega}].$$

Припоминая выводы рубр. 39, гл. I, мы придем к заключению, что *при изменении полюса характеристические векторы* $\overline{\omega}$ *и* v_0 *твердого движения меняются совершенно так же, как меняются главный вектор и главный момент системы приложенных векторов при изменении центра приведения.*

Таким образом результаты, полученные в гл. I относительно приведения систем приложенных векторов, непосредственно дают соответствующие предложения относительно состояния движения твердых систем. Центральная ось системы векторов, как геометрическое место точек, в которых главный момент системы параллелен главному вектору, дает в этом случае ось тангенциального винтового движения, т. е. *ось твердого движения*, к которой мы, таким образом, пришли новым путем.

Поступательная скорость вдоль оси движения выражается в этом случае наименьшим моментом системы приложенных векторов (I, рубр. 43):

$$\frac{v_0\ \overline{\omega}}{\omega} = \frac{up + vq + wr}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}.$$

Наконец, исчезновение в определенный момент инвариантного трехчлена:

$$v_0\overline{\omega} = up + vq + wr = 0$$

выражает условие, необходимое и достаточное для того, чтобы обращалась в нуль либо угловая скорость, либо поступательная скорость по оси движения; иначе говоря, это условие определяет моменты, в которые движение становится либо чисто переносным, либо чисто вращательным.

24. Твердые движения с неподвижной точкой или параллельные неподвижной плоскости. Легко показать, что для того и другого типа движений инвариантный трехчлен $v_0\overline{\omega}$ обращается тождественно в нуль.

В самом деле, если при твердом движении системы остается неподвижной некоторая ее точка, то мы можем принять эту точку O за центр приведения; тогда $v_0 = 0$ и вместе с тем $\overline{v_0}\,\overline{\omega} = 0$. Угловую скорость $\overline{\omega}$ мы при этом, конечно, можем считать отличной от нуля, ибо в противном случае при $v_0 = 0$ мы имели бы состояние покоя; поэтому, в силу заключительного замечания предыдущей рубрики, мы можем сказать, что во все время движения оно является *чисто вращательным вокруг оси, проходящей через точку O* и меняющей свое положение от момента к моменту.

Во вторую очередь рассмотрим движение, параллельное некоторой неподвижной плоскости. Мы можем себе представить осуществление этого рода движения так, что некоторая плоскость p, неразрывно связанная с системой S, остается в неподвижной плоскости π. Если мы примем p и π за плоскости координат xy и $\xi\eta$, то версор $\boldsymbol{k}$ будет постоянным, так как он все время будет оставаться перпендикулярным к постоянной плоскости. Следовательно, в силу соотношений (25) рубр. **19**:

$$p = q = 0;$$

т. е. угловая скорость $\overline{\omega}$ также постоянно перпендикулярна к плоскости $\xi\eta$. Так как, с другой стороны, скорость полюса v_0, как и скорость любой другой точки движущейся системы, остается параллельной той же плоскости $\xi\eta$, то мы отсюда заключаем, что инвариантный трехчлен $\overline{v_0}\,\overline{\omega}$ равен нулю; а это означает, что состояние нашего движения в каждый момент является либо *чисто поступательным* (параллельным плоскости $\xi\eta$), либо чисто вращательным (вокруг оси, перпендикулярной к этой плоскости).

На этом последнем типе движений мы остановимся подробно позже, в гл. V.

25. Состояние движения, составленного из нескольких движений. В случае движения, составленного из нескольких движений, состояние движения определяется тем, что его скорость представляет собой сумму скоростей составляющих движений. При непосредственном изучении состояния движения, составленного из нескольких движений, важно, прежде всего, уяснить себе следующее очевидное положение. Если v_0' и $\overline{\omega}'$, v_0'' и $\overline{\omega}''$ суть характеристические векторы слагающих движений относительно одного и того же полюса O, так что скорости произвольной точки P выражаются формулами

$$v_0' + [\overline{\omega}'\,\overline{OP}] \quad \text{и} \quad v_0'' + [\overline{\omega}''\,\overline{OP}],$$

то скорость той же точки в сложном движении выражается формулой:

$$v_0' + v_0'' + [(\overline{\omega}' + \overline{\omega}'')\,\overline{OP}],$$

т. е. *характеристические векторы движения, составленного из нескольких движений, равны каждый сумме соответствующих векторов составляющих движений*, предполагая, конечно, что все движения отнесены к одному и тому же полюсу.

26. Чтобы дать интересный пример сложения движений, рассмотрим два вида тверцых движений с общей неподвижной точкой O; оба движения, таким образом, представляют собою вращения вокруг осей, проходящих через общую точку O. В обоих составляющих движениях первый характеристический вектор равен нулю; если поэтому обозначим через $\overline{\omega}'$ и $\overline{\omega}''$ соответствующие угловые скорости, то состояние составленного движения будет иметь относительно полюса O характеристические векторы $v_0 = 0$ и $\overline{\omega} = \overline{\omega}' + \overline{\omega}''$; иными словами, движение, *составленное из двух вращений вокруг осей, проходящих через общую точку, представляет собою вращение вокруг оси, проходящей через ту же точку; оно имеет угловую скорость, равную сумме угловых скоростей составляющих движений.*

Этот результат сопоставим с выводами рубр. 12 о сложении конечных вращений вокруг пересекающихся осей. В то время как там составленное движение оказывалось вращательным только в специальном случае вращений вокруг постоянных осей, мы здесь пришли к выводу, что в бесконечно малые промежутки времени движение, составленное из двух вращений (бесконечно малых) вокруг сходящихся осей, всегда представляет собою вращение вокруг оси, проходящей через ту же точку.

27. Аналогичный результат имеет место при сложении вращений вокруг параллельных осей.

Пусть $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ будут угловые скорости двух таких вращений, O_1 и O_2 — две точки на соответствующих осях r_1 и r_2. Предположим сначала, что векторы $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ не равно-противоположны (т. е. не обращены в противоположные стороны, имея общую длину); за полюс характеристических векторов обоих этих движений примем центр O двух параллельных векторов $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$, приложенных соответственно в точках O_1 и O_2. В этой точке O характеристические векторы слагающих движений будут (рубр. 23):

$$[\overline{OO_1}\overline{\omega}_1],\ \overline{\omega}_1 \text{ и } [\overline{OO_2}\overline{\omega}_2], \overline{\omega}_2;$$

таким образом, слагая эти движения, мы придем к новому движению, состояние которого определяется характеристическими векторами

$$[\overline{OO_1}\overline{\omega}_1] + [\overline{OO_2}\overline{\omega}_2] \text{ и } \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2.$$

Но так как O есть центр векторов $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$, приложенных в точках O_1 и O_2, то первый из характеристических векторов составленного движения равен нулю (I, рубр. 52, 53). Таким образом, *складывая два движения, носящие в определенный момент характер вращений вокруг параллельных осей r_1 и r_2, со скоростями $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$, не равно-противоположными, мы получим вращательное движение со скоростью $\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$, ось которого параллельна осям r_1 и r_2; по свойству центра двух параллельных приложенных векторов эта ось лежит в плоскости прямых r_1 и r_2 и делит* *расстояние между ними в отношении* ω_1 *и* ω_2, *притом внутреннее или внешнее в зависимости от того, обращены ли векторы* $\bar{\omega}_1$ *и* $\bar{\omega}_2$ *в одну и ту же сторону или в противоположные стороны.*

Обратимся теперь к тому случаю, когда векторы $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ равно-противоположны, т. е. $\bar{\omega}_1 + \omega_2 = 0$; приложенные в точках O_1 и O_2, они образуют, таким образом, пару. В этом случае примем за центр приведения одну из точек O_1 или O_2, — скажем, для определенности, O_1. Для выражения состояния каждого движения получим в этом случае характеристические векторы:

$$0\bar{\omega}_1 \text{ и } [\overline{O_1O_2}\bar{\omega}_2],\ \bar{\omega}_2;$$

характеристические векторы сложного движения будут:

$$[\overline{O_1O_2}\bar{\omega}_2],\quad \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2;$$

так как, однако, $\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 = 0$, то мы заключаем, что *составленное движение в этом случае будет чисто поступательным; оно направлено перпендикулярно к плоскости осей* r_1 *и* r_2 *слагающих движений, скорость же его равна моменту пары угловых скоростей* $\bar{\omega}_1$ *и* $\bar{\omega}_2$, *помещенных каждая на соответствующей оси.*

28. Распределение ускорений движущейся твердой системы. Векторное выражение этого распределения мы получим, диференцируя по t уравнение (26) рубр. 20, отнесенное к неподвижным осям. Мы придем тогда к формуле:

$$a = \dot{v}_0 +]\dot{\bar{\omega}}\overline{OP}] + [\bar{\omega}\ (v - v_0)]. \tag{29}$$

Здесь $\dot{v}_0$ есть ускорение точки O; мы его обозначим поэтому через a_0. Разность $v - v_0$ по той же формуле (26) равна $[\bar{\omega}\overline{OP}]$. В рубр. 8 мы уже рассматривали это двойное векторное произведение и пришли к заключению, что оно равно $-\omega^2\overline{QP}$, где Q есть проекция точки P на ось вращения. Это выражение нужно подставить вместо него и в формулу (29); нужно только иметь в виду, что под осью вращения здесь следует разуметь прямую, параллельную вектору ω, проходящую через точку O, т. е. мгновенную ось, соответствующую рассматриваемому моменту t.

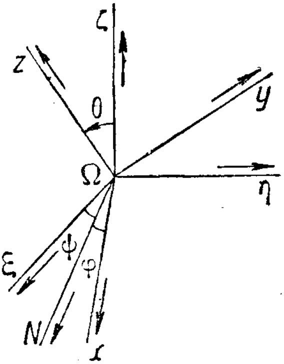
Выполняя подстановку, получим:

$$a = a_0 + [\bar{\omega}\overline{OP}] - \omega^2\overline{QP}. \tag{30}$$

Эта формула содержит выражение (12) рубр. 8 как частный случай. Первые два слагаемые правой части обусловливаются переменным характером характеристических векторов; третье же слагаемое зависит в каждый момент исключительно от тангенциального винтового движения; оно совпадает с ускорением, которое имело бы место в случае равномерного вращения вокруг мгновенной оси действительного вращения с угловой скоростью, которую действительно движение имеет в этот момент.

7. Эйлеровы углы.

29. Возвратимся к определению положения твердой системы S относительно установленного неподвижного триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$. Мы уже широко пользовались тем очевидным соображением, что для этого достаточно определить положение относительно $\Omega\xi\eta\zeta$ триэдра $Oxyz$, неразрывно связанного с системой S; и мы знаем, что положение триэдра $Oxyz$, действительно, определено, если установлены относительно $\Omega\xi\eta\zeta$ координаты начала O и три основные единичные вектора $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ или, что то же, соответствующие девять направляющих косинусов α_i, β_i, γ_i $(i=1,\ 2,\ 3)$; эти последние не независимы, а связаны известными шестью соотношениями (71), приведенными в рубр. **10** гл. I. Таким образом, в качестве независимых параметров нужно было бы принять, кроме координат α, β, γ, еще три из девяти косинусов α_i, β_i, γ_i, выбранные таким образом, чтобы остальные в силу упомянутых соотношений в них непосредственно выражались. Но отчасти из соображений геометрической наглядности фигуры, отчасти для удобства аналитических выводов оказывается более целесообразным пользоваться другими элементами.



Фиг. 46.

Поскольку начало подвижного триэдра $Oxyz$ мы сумеем выбрать, считаясь с тем, чтобы координаты α, β, γ точки O получили наиболее простое выражение, речь будет итти, собственно, о том, чтобы найти способ для удобного определения подвижных осей относительно триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$, т. е. положения относительно него другого триэдра Ωxyz, оси которого выходят из точки Ω, но параллельны подвижным осям xyz (фиг. 46).

Мы исключим сначала случай, когда плоскости xy и $\xi\eta$ совпадают, т. е. когда обе оси ζ и z принадлежат одной и той же прямой. При этом условии рассмотрим пересечение этих плоскостей xy и $\xi\eta$; прямая, по которой эти плоскости пересекаются, перпендикулярна к осям ζ и z, а поэтому перпендикулярна также и к плоскости $\Omega\zeta z$. Эта прямая, ориентированная таким образом, чтобы угол $\widehat{\zeta z}$ $(<\pi)$ ориентированных осей ζ и z представлялся по отношению к ней правосторонним (т. е. чтобы правосторонним было вращение, приводящее ось ζ в совмещение с z), называется *линией узлов* и обозначается через N. Угол $\widehat{\zeta z}$, который заключается, как уже было сказано, между O и π (а в рассматриваемых условиях отличен также от предельных значений O и π), называется *углом нутации* или просто *нутацией*; он обыкновенно обозначается через θ.

Под *углом прецессии* ψ разумеют аномалию $\widehat{\xi N}$ двух ориентированных прямых ξ и N (измеряемую в правую сторону по отношению к оси ζ); наконец, под *углом поворота* φ разумеют аномалию $\widehat{Nx}$ оси x относительно линии узлов (измеряемую, как обычно, справа налево относительно оси z). Два угла φ и ψ, которые оба имеют характер аномалии, измеряются каждый в пределах от 0 до 2π (с исключением верхнего предела).

Определенные таким образом три угла θ, φ и ψ называются эйлеровыми углами триэдра Ωxyz (или любого триэдра, ему параллельного и одинаково с ним ориентированного) относительно триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$. Легко убедиться, что и, обратно, если даны произвольно взятые значения углов θ, φ и ψ, но подчиненные условиям

$$\left.\begin{aligned} 0 < \theta < \pi, \\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \\ 0 \leqslant \psi < 2\pi, \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

то этим определяется положение триэдра Ωxyz относительно $\Omega\xi\eta\zeta$.

В самом деле, угол прецессии ψ определяет на плоскости $\xi\eta$ положение ориентированной линии узлов N; вслед за этим в плоскости, перпендикулярной к N в точке Ω, определяется положение оси z, которая образует с осью ζ угол нутации θ (отсчитываемый в сторону правостороннего вращения). Наконец, в плоскости, проходящей через точку Ω перпендикулярно к оси z (а поэтому содержащей прямую ΩN), ориентированная ось x однозначно определена своей аномалией φ относительно N. Ось y после этого определяется тем, что она должна образовать с осями x и z ортогональный правосторонний триэдр Ωxyz.

Итак, эйлеровы углы, взятые в соответствующих интервалах (31), представляют собою три, по существу своему, независимых параметра, пригодные для определения положения относительно триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$ другого триэдра Ωxyz с тем же началом; благодаря этому, эйлеровыми углами определяется положение любой твердой системы.

В случае, который мы исключили, плоскости $\xi\eta$ и xy совпадают; угол нутации θ равен 0 или 2π; но линия узлов остается неопределенной, вследствие чего неопределенными остаются и углы φ и ψ. Но сумма этих углов (в рассматриваемом случае компланарных) сохраняет определенное значение, ибо $\psi = \widehat{\xi N}$, $\varphi = \widehat{Nx}$,. а поэтому $\varphi + \psi = \widehat{\xi x}$; этой аномалией плоскости ζx относительно плоскости $\zeta\xi$ определяется положение триэдра Ωxyz относительно $\Omega\xi\eta\zeta$. Неопределенность углов φ и ψ может быть сопоставлена с неопределенностью аномалии, которая имеет место в плоскости при полярных координатах, когда $\rho = 0$.

Если оставим в стороне эти исключительные случаи, то эйлеровы углы твердой системы, движущейся относительно триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$, представляют собою, как и координаты α, β, γ начала подвижного триэдра $Oxyz$, определенные функции времени; так как движение происходит непрерывно, то и они не могут иметь никаких разрывов. Может только случиться, если твердо придерживаться пределов (31), что некоторые из эйлеровых углов в те или иные моменты внезапно должны будут сделать скачок от одного из крайних своих значений к другому, хотя это и не будет связано ни с каким разрывом в самом ходе движения. Но и здесь, как и в аналогичном случае плоских углов в полярных координатах (II, рубр. 14), эти искусственные разрывы устраняются путем отказа от тех или иных из ограничений (31); соответственные эйлеровы углы тогда изменяются непрерывно, хотя и за пределами узких основных интервалов; этим путем, однако (как мы это уже наблюдали относительно аномалии в плоскости), непрерывность восстанавливается ценою утраты однозначности соответствия между положением тела и эйлеровыми углами.

30. Чтобы пользоваться эйлеровыми углами в наших исследованиях, необходимо выразить в них девять косинусов α_i, β_i, γ_i. С этой целью отметим, что к триэдру Ωxyz, к которому относятся эйлеровы углы θ, φ, ψ, можно притти, выполняя над триэдром $\Omega\xi\eta\zeta$ следующие три вращения: 1) поворот на угол ψ вокруг оси ζ; это приведет к триэдру $\Omega\xi_1\eta_1\zeta$, в котором ось ξ_1 совпадет с линией узлов N; 2) поворот на угол θ вокруг оси $\xi_1 \equiv N$; это приведет к триэдру $\Omega\xi_1\eta_1 z$, в котором ось y_1 будет лежать в плоскости ζz так, что угол $\widehat{y_1 z}$ будет прямым, а потому угол $\widehat{\eta_1 y_1}$ будет равен θ; 3) поворот на угол φ вокруг оси z, который приведет ось $\xi_1 \equiv N$ к совпадению с осью x, а потому ось y_1 к совпадению с осью y. Эти три поворота выразятся (рубр. 9) соответственно следующими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \xi_1 \cos\psi - \eta_1 \sin\psi,\\
\eta &= \xi_1 \sin\psi + \eta_1 \cos\psi,\\
\zeta &= \zeta;\\
\xi_1 &= \xi_1,\\
\eta_1 &= y_1 \cos\theta - z \sin\theta,\\
\zeta_1 &= y_1 \sin\theta + z\cos\theta;\\
\xi_1 &= x \cos\varphi - y \sin\varphi,\\
y_1 &= x \sin\varphi + y \cos\varphi,\\
z &= z.
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Теперь достаточно исключить ξ_1, η_1, ζ_1 из этих уравнений, чтобы получить значения девяти косинусов α_i, β_i, γ_i. Для этого достаточно подставить во вторые части первой группы уравнений значения η_1 и ζ из второй группы, а потом — вместо ξ_1 и y_1

их значения, содержащиеся в третьей группе. В результате получим следующие выражения косинусов α_i, β_i, γ_i через θ, φ, ψ:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\,\sin\psi\,\cos\theta,\\
\alpha_2 &= -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\,\sin\psi\,\cos\theta,\\
\alpha_3 &= \sin\psi\,\sin\theta,\\
\beta_1 &= \cos\varphi\,\sin\psi + \sin\varphi\,\cos\psi\,\cos\theta,\\
\beta_2 &= -\sin\varphi\,\sin\psi + \cos\varphi\,\cos\psi\,\cos\theta,\\
\beta_3 &= -\cos\psi\,\sin\theta,\\
\gamma_1 &= \sin\varphi\,\sin\theta,\\
\gamma_2 &= \cos\varphi\,\sin\theta,\\
\gamma_3 &= \cos\theta.
\end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

31. Из вышеприведенных формул непосредственно получаются выражения в эйлеровых углах θ, φ, ψ компонент единичных векторов k, $\bar\varkappa$ и N осей z, ζ и линии узлов по подвижным и неподвижным осям. — Так, для вектора k эти компоненты по осям триэдров $\Omega\xi\eta\zeta$ и Ωxyz будут:

$$\alpha_3,\ \beta_3,\ \gamma_3 \ \text{ и } \ 0,\ 0,\ 1, \qquad (34)$$

а вектора $\bar\varkappa$:

$$0,\ 0,\ 1 \ \text{ и } \ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3. \qquad (35)$$

Что касается вектора N, то мы будем представлять себе его приложенным в точке Ω; тогда его свободный конец будет иметь относительно триэдра $\Omega\xi_1\eta_1\zeta$, к которому отнесена первая группа уравнений (32), координаты $\xi_1 = 1$, $\eta_1 = \zeta = 0$; поэтому его компоненты относительно триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$ имеют значения:

$$\cos\psi,\ \sin\psi,\ 0. \qquad (36)$$

Аналогично этому, относительно триэдра $\Omega\xi_1, y_1, z$, к которому отнесена третья группа уравнений (32), свободный конец вектора N имеет координаты $\xi_1 = 1$, $y_1 = z = 0$; поэтому достаточно подставить эти значения в третью группу уравнений, чтобы получить следующие значения компонент вектора относительно триэдра Ωxyz:

$$\cos\varphi,\ -\sin\varphi,\ 0. \qquad (37)$$

32. Теперь уже нетрудно найти выражение мгновенной угловой скорости, которая соответствует переходу твердого тела от положения, определяемого эйлеровыми углами θ, φ, ψ, к положению, определяемому углами $\theta + d\theta$, $\varphi + d\varphi$, $\psi + d\psi$. Из самого определения эйлеровых углов вытекает, что наращение $d\theta$ нутации соответствует элементарному повороту (справа налево) на угол $d\theta$ вокруг линии узлов; таким же образом наращения $d\varphi$ и $d\psi$ углов φ и ψ представляют собою элементарные повороты соответственно вокруг осей z и ζ. Так как речь идет о мгновенных движениях, то угловую скорость $\bar\omega$ получим, складывая скорости вышеуказанных трех вращений; таким образом

$$\bar\omega = \dot\theta N + \dot\varphi k + \dot\psi\bar\varkappa.$$

Отсюда, пользуясь выражениями (34)—(37), а также (33), мы получим компоненты p, q, r и π, χ, ρ угловой скорости $\overline{\omega}$ относительно триэдров Ωxyz и $\Omega\xi\eta\zeta$, именно:

$$\left.\begin{aligned} p &= \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\gamma_1, \\ q &= -\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\psi}\gamma_2, \\ r &= \dot{\psi}\gamma_3 + \dot{\varphi}; \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

$$\left.\begin{aligned} \pi &= \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\alpha_3, \\ \chi &= \dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\beta_3, \\ \rho &= \dot{\varphi}\gamma_3 + \dot{\psi}. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Если в движущемся твердом теле некоторая прямая в какой-либо из своих точек перпендикулярна к траектории этой точки, то она и во всякой другой своей точке направлена по нормали к траектории последней (следствие рубр. 2).

2. Сложение нескольких равномерных вращений вокруг параллельных осей. Угловые скорости $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_n$ этих вращений следует представить векторами, приложенными каждый в произвольной точке соответствующей оси вращения.

Тогда скорость $\boldsymbol{v}$ произвольной точки P тела в составленном движении представляет собою не что иное, как главный момент относительно точки P этой системы векторов. Показать, что составленное движение, если сумма угловых скоростей $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \ldots + \overline{\omega}_n$ отлична от нуля, представляет собою также вращение с угловой скоростью $\overline{\omega}$ (ср. рубр. 27, в которой рассмотрен случай двух составляющих вращений).

3. Если из точек движущейся твердой прямой провести векторы соответствующих скоростей, то концы этих векторов также будут лежать на прямой и составлять на ней ряд точек, подобный ряду исходных точек.

4. Чтобы доказать формулы Пуассона, проф. Бискончини[1] замечает, что так как производные $\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}$, $\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}$, $\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}$ обращаются в нуль или соответственно перпендикулярны к версорам $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, можно положить:

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = [\overline{\omega}_1\boldsymbol{j}], \quad \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = [\overline{\omega}_2\boldsymbol{j}], \quad \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = [\overline{\omega}_3\boldsymbol{k}],$$

причем векторы $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$ этим однозначно определяются при добавочном условии, что каждый из них должен быть перпендикулярен к соответствующему версору $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Но эти равенства останутся в силе, если вместо $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$ поставим векторы $\overline{\omega}_1 + \sigma_1\boldsymbol{i}$, $\overline{\omega}_2 + \sigma_2\boldsymbol{j}$, $\overline{\omega}_3 + \sigma_3\boldsymbol{k}$, каковы бы ни были скаляры σ_1, σ_2, σ_3. Основываясь на том, что версоры $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ перпендикулярны между собой и каждый из них перпендикулярен к своей производной, можно показать, что три скаляра σ_1, σ_2, σ_3 могут быть выбраны таким образом, что

$$\overline{\omega}_1 + \sigma_1\boldsymbol{i} = \overline{\omega}_2 + \sigma_2\boldsymbol{j} = \overline{\omega}_3 + \sigma_3\boldsymbol{k}.$$

Общее значение этих трех векторов представляет собою угловую скорость $\overline{\omega}$.

---

[1] *Bisconcini*, Bol. dell'Unione Mat. Italiana, Anno IV, 1925, pp. 5—7.

5. Производные трех основных версоров $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ не могут быть параллельны между собой, если они не обращаются все три в нуль. В самом деле, если бы такой параллелизм имел место, т. е. если бы существовали такие три скаляра σ_1, σ_2, σ_3 и версор $\boldsymbol{u}$, что

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}=\sigma_1\boldsymbol{u}, \quad \frac{d\boldsymbol{j}}{dt}=\sigma_2\boldsymbol{u}, \quad \frac{d\boldsymbol{k}}{dt}=\sigma_3\boldsymbol{u},$$

то производная всякого другого вектора, неразрывно связанного с твердой системой, также выражалась бы через $\sigma\boldsymbol{u}$. И это осталось бы в силе, если бы вместо $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ мы взяли какой угодно другой триэдр, конечно, также связанный с твердым телом. Но в таком случае мы могли бы этот вектор $\boldsymbol{u}$ принять за версор $\boldsymbol{k}$. Учитывая выражения производных $\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}$, $\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}$, $\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}$, которые мы таким образом получим, мы найдем, диференцируя соотношения:

$$\boldsymbol{ki}=0, \quad \boldsymbol{kj}=0, \quad \boldsymbol{k}^2=1,$$

что $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=0$, и придем, таким образом, к переносному движению.

Если исключим этот случай, то мы будем в праве принять, что из производных основных версоров по крайней мере два, скажем, $\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}$ и $\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}$, не параллельны и не равны нулю. Вместе с тем и вектор

$$\boldsymbol{p}=\left[\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}\right]$$

отличен от нуля. Но в таком случае нетрудно показать, что

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}=m\,[\boldsymbol{pi}], \quad \frac{d\boldsymbol{j}}{dt}=m'\,[\boldsymbol{pj}],$$

где m и m' — два надлежащих скаляра. Тождество

$$\boldsymbol{i}\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}+\boldsymbol{j}\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}=0$$

приводит к тому, что $m'=m$. Если теперь положим

$$\bar{\omega}=m\boldsymbol{p},$$

то окажется, что и производная $\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}$ может быть представлена в виде $[\bar{\omega}\boldsymbol{k}]$.

Весь этот результат, естественно, останется в силе и для поступательного движения, если положить для этого случая $\bar{\omega}=0$[1].

6. Показать, что в движущемся твердом теле геометрическое место точек, скорости которых в определенный момент имеют одно и то же напряжение, представляет собою круглый цилиндр, осью которого служит ось движения (ср. упражнение 8 гл. I).

Аналогично этому показать, что геометрическое место точек, скорости которых направлены в одну и ту же точку, представляет собою пространственную кривую третьего порядка. Направления этих скоростей образуют конус второго порядка с вершиной в точке P.

7. Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы в течение некоторого промежутка времени оставалось неизменным направление мгновенной оси вращения (рубр. 21), заключается в том, чтобы в этот промежуток времени обращалось в нуль векторное произведение $\left[\bar{\omega}\frac{d\bar{\omega}}{dt}\right]$.

---

[1] Ср. *A. Signorini*, Esercizi di meccanica razionale (литографированное издание), Palermo, Capozzi, pp. 80—81, а также *C. Poli*, Salla dimostrazione del teorema di Mozzi, Rend. Ist. Lombardo, Vol. LXI, 1928, pp. 389—390.

8. Наиболее общее состояние движения твердого тела в определенный момент всегда может быть рассматриваемо, как составленное из двух вращений, из которых одно происходит вокруг произвольно выбранной в этом теле оси, только не параллельной мгновенной оси и не перпендикулярной к скорости какой-либо лежащей на ней точки (ср. рубр. **25** и упражнение 13 гл. I).

9. Пусть $\Omega\xi\eta\zeta$ будет триэдр неподвижных осей, а C — траектория точки O, движение которой по этой кривой определяется уравнением $s = t$ (s—длина дуги кривой, отсчитываемая от определенной ее точки). Рассмотрим трижды ортогональный правосторонний триэдр $Oxyz$, в котором осью Ox служит касательная, обращенная в сторону движения, а осью Oy — главная нормаль, обращенная к центру кривизны кривой, соответствующему точке O. Если через c и τ обозначим первую и вторую кривизны кривой C в точке O, то всегда имеют место соотношения:

$$p = -\tau, \qquad q = 0, \qquad r = c$$

[нужно воспользоваться соотношением (23) и формулами Френе].

10. В движущейся твердой системе во всякий момент существует точка (называемая центром ускорений), в которой ускорение равно нулю. Предполагается, однако, что в этот момент векторное произведение $\left[\overline{\omega}\,\frac{d\overline{\omega}}{dt}\right]$ не обращается в нуль.