ГЛАВА IV.

Относительные движения и их приложение к твердым движениям.

1. Общие положения.

1. В двух предыдущих главах мы изучали движение точки или системы точек относительно определенного триэдра отсчета. Если движение относится к другому триэдру, то его характеристические черты вообще меняются; совершенно ясно, насколько важно определить, в какой зависимости находятся кинематические особенности движения от системы отсчета.

Случай, когда новый триэдр остается неподвижным относительно первоначального, мы уже рассмотрели в § 3 гл. II. Совершенно ясно, однако, что при таком чисто геометрическом изменении осей координат скорость и ускорение каждой отдельной точки остаются внутренне неизменными, так как соответствующие компоненты их изменяются когредиентно с координатами движущейся точки [1]).

Иначе складываются обстоятельства в кинематически более важном случае, когда новый триэдр находится в движении относительно первоначального; этот случай мы и намерены здесь изучить. Мы начнем с одной точки P, движущейся относительно триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$; если возьмем другой триэдр $Oxyz$, движущийся относительно первого, то точка P будет, вообще говоря, дви-

---

[1]) Понятие о когредиентных преобразованиях уже было установлено в рубр. **1** гл. III вскользь. Очень важно точно себе его уяснить. Если мы переходим от триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$ к триэдру с параллельными осями, но с другим началом, то компоненты скорости и ускорения не меняются вовсе, поскольку проекции вектора на параллельные оси равны. Если же мы переходим от триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$ к триэдру $Oxyz$ по схеме, выражаемой таблицей рубр. **10** гл. I, то

$$x = \alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta, \quad y = \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2\zeta, \quad z = \alpha_3\xi + \beta_3\eta + \gamma_3\zeta;$$

эти линейные уравнения выражают преобразование координат. Если $\Xi \mathrm{H} \mathrm{Z}$ суть компоненты некоторого вектора, отнесенного к первому триэдру, а x, y, z его компоненты относительно второго триэдра, то

$$x = \alpha_1\Xi + \beta_1\mathrm{H} + \gamma_1\mathrm{Z}, \quad y = \alpha_2\Xi + \beta_2\mathrm{H} + \gamma_3\mathrm{Z}, \quad z = \alpha_3\Xi + \beta_3\mathrm{H} + \gamma_3\mathrm{Z}.$$

Преобразование компонент вектора выражается теми же линейными уравнениями, что и преобразование координат. Это и разумеют, когда говорят, что компоненты вектора преобразовываются когредиентно декартовым координатам точки. (*Ред.*)

гаться также и относительно второго триэдра. Задача заключается в том, чтоб установить соотношения, которые имеют место в каждый момент между кинематически характерными чертами одновременных движений точки P относительно этих триэдров. Другими словами, можно сказать, что задача заключается в установлении зависимости между характерными чертами движения точки, как оно представляется двум наблюдателям, движущимся друг относительно друга.

Для удобства речи мы будем называть *неподвижным* триэдр $\Omega\xi\eta\zeta$ и *подвижным* второй триэдр $Oxyz$. В том же условном смысле будем называть *абсолютным* движение точки P относительно неподвижного триэдра и *относительным* ее движение относительно подвижного триэдра; наконец, *переносным движением* будем называть твердое движение подвижного триэдра $Oxyz$ и всех неразрывно связанных с ним точек относительно неподвижного триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$.

Если через ξ, η, ζ и x, y, z обозначим координаты точки P относительно соответственных триэдров, то с ходом движения как те, так и другие координаты будут изменяться в функции времени. Пусть

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t) \tag{1}$$

будут уравнения относительного движения точки P. Положим, что переносное движение задано векторами $\overline{O\Omega}(t)$, $\boldsymbol{i}(t)$, $\boldsymbol{j}(t)$, $\boldsymbol{k}(t)$, выраженными в функции времени; $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, как обыкновенно, обозначают основные версоры подвижного триэдра $Oxyz$. При этих условиях абсолютное движение точки P выражается геометрическим уравнением:

$$\overline{\Omega P} = \overline{\Omega O} + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \tag{2}$$

где x, y, z представляют собою функции (1). Заметим, что это уравнение совпадало бы с уравнением (1) § 1 предыдущей главы, если бы точка P оставалась неподвижной относительно триэдра $Oxyz$, т. е. если бы относительное движение сводилось к состоянию покоя, так что координаты x, y, z сохраняли бы постоянные значения.

Проектируя обе части уравнения (2) на неподвижные оси, мы получим уравнения абсолютного движения; формально они будут совпадать с уравнениями (2) § 1 предыдущей главы; но они будут все же существенно от них отличаться, и именно тем, что x, y, z здесь будут не постоянные, а функции времени (1).

Мы имеем, таким образом, возможность получить выражение абсолютного движения, коль скоро заданы относительное и переносное движения. Обратно, достаточно в геометрическом уравнении (2) или в соответствующих скалярных уравнениях обратить роли двух триэдров, чтобы получить относительное движение, коль скоро заданы переносное и абсолютное движения.

2. Скорости абсолютная, относительная и переносная.

2. В соответствии с терминологией, установленной в предыдущем параграфе, мы будем отличать скорости и ускорения точки P относительно неподвижного триэдра и относительно подвижного; первые мы будем называть *абсолютными*, вторые *относительными* и будем их обозначать соответственно через $\boldsymbol{v}_a$ и $\boldsymbol{a}_a$, $\boldsymbol{v}_r$ и $\boldsymbol{a}_r$ [1]).

Векторы $\boldsymbol{v}_a$ и $\boldsymbol{a}_a$, по определению, представляют собою производные $\frac{d\overline{OP}}{dt}$, $\frac{d^2\overline{OP}}{dt^2}$ или, короче, $\frac{dP}{dt}$ и $\frac{d^2P}{dt^2}$, где точка P рассматривается как функция времени, конечно, относительно неподвижного триэдра; относительная скорость $\boldsymbol{v}_r$ и относительное ускорение $\boldsymbol{a}_r$ зависят от того, как изменяется с течением времени положение точки P относительно подвижного триэдра; их компоненты выражаются производными первого и второго порядка:

$$\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}\ \text{и}\ \ddot{x},\ \ddot{y},\ \ddot{z}$$

от функций (1).

В этих условиях, диференцируя уравнение (2) почленно по t, мы получим для абсолютной скорости движения точки P выражение:

$$\frac{d\overline{\Omega P}}{dt}=\frac{d\overline{\Omega O}}{dt}+x\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}+y\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}+z\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}+\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k}.$$

В соответствии со знакоположением рубр. 71 гл. I это равенство можно написать в форме:

$$\frac{dP}{dt}=\frac{dO}{dt}+x\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}+y\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}+z\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}+\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k}. \tag{3}$$

В правой части этого равенства трехчлен $\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k}$ представляет собою относительную скорость точки P; четырехчлен же

$$\frac{dO}{dt}+x\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}+y\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}+z\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} \tag{4}$$

выражает в каждый момент скорость той точки P неизменяемой среды $Oxyz$, с которой в этот момент совпадает рассматриваемая точка P; точнее, это есть скорость точки P в ее движении относительно неподвижного триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$. Это становится особенно ясным из соотношения (3), если мы себе представим, что в момент t точка P внезапно останавливается в своем движении относительно $Oxyz$ и, таким образом, с этого момента просто увлекается этим триэдром в его переносном движении; тогда относительная скорость $\boldsymbol{v}_r$ обращается в нуль, и правая часть равенства (3) сводится только к четырехчлену (4). Это выра-

[1]) Индекс r взят от термина relativo, который можно считать международным наименованием относительного (релятивного) движения.

жение (4) мы будем называть *переносной скоростью* (мгновенного положения точки P в рассматриваемый момент) и будем ее обозначать через $\boldsymbol{v}_\tau$; мы можем тогда соотношение (3) представить в виде:

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_\tau; \tag{5}$$

таким образом *в каждый момент движения абсолютная скорость точки равна сумме относительной ее скорости и скорости переноса* (в тот же момент).

Этот результат совершенно соответствует наглядному представлению, которое мы имеем, например, в случае, когда пассажир ходит по коридору движущегося вагона; совершенно естественно в этом случае вычислить скорость пассажира относительно окружающей местности, как результирующую (векторную сумму) его скорости относительно поезда, и одновременной скорости самого поезда.

Вследствие этого наглядного своего характера предыдущая теорема одно время рассматривалась как постулат; она и по настоящее время сохраняет название *принципа относительных движений* или *параллелограма скоростей*. В действительности же, как видим, мы имеем здесь дело с логическим следствием общих предпосылок, отнюдь не требующим какого-либо нового постулата.

3. Теорема Кориолиса.

3. Повторное диференцирование соотношения (3) по времени дает для абсолютного ускорения выражение:

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{d^2O}{dt^2} + x\frac{d^2\boldsymbol{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\boldsymbol{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\boldsymbol{k}}{dt^2} + \\ + \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} + \ddot{z}\boldsymbol{k} + 2\left(\dot{x}\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\boldsymbol{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\boldsymbol{k}}{dt^2}\right). \tag{6}$$

В правой части этого выражения трехчлен

$$\ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} + \ddot{z}\boldsymbol{k}$$

выражает ускорение a_r, а четырехчлен

$$\frac{d^2O}{dt^2} + x\frac{d^2\boldsymbol{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\boldsymbol{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\boldsymbol{k}}{dt^2}$$

представляет собою *переносное ускорение* в том же смысле, в каком мы установили этот термин в применении к скорости; переносное ускорение мы будем обозначать через a_τ. Остается еще удвоенный вектор

$$\dot{x}\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\boldsymbol{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}, \tag{7}$$

зависящий как от относительного, так и от переносного движения; слагающую ускорения, выражаемую этим вектором, называют *дополнительным ускорением* или *составным центростремительным ускорением*. Если обозначим его через a_c, то мы можем написать:

$$a_a = a_r + a_\tau + 2a_c, \tag{8}$$

или, в словах (теорема Кориолиса)[1]: *абсолютное ускорение в каждый момент представляет собою сумму относительного ускорения, ускорения переноса и двойного дополнительного ускорения.*

Дополнительное ускорение не имеет непосредственного кинематического значения, но оно получает наглядное выражение, пригодное для приложений, если введем угловую скорость $\bar{\omega}$ (твердого) движения переноса. На основе формулы Пуассона (рубр. **19** предыдущей главы) выражение (7) ускорения a можно написать в виде:

$$[\bar{\omega}(\dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k})],$$

или, иначе

$$a_c = [\bar{\omega}\, v_r]$$

Так как вектор $\bar{\omega}$ в каждый момент определяет направление оси движения триэдра $Oxyz$, то это выражение обнаруживает, что дополнительное ускорение всегда перпендикулярно к оси переносного движения и к относительной скорости; оно обращается в нуль 1) когда относительная скорость становится параллельной оси переносного движения; 2) когда $v_r = 0$ (момент остановки относительного движения; 3) когда $\bar{\omega} = 0$ (т. е. состояние переносного движения становится чисто поступательным).

4. Частные случаи переносного движения. a) Если переносное движение *поступательное*, то все точки, неразрывно связанные с подвижным триэдром $Oxyz$, в каждый момент имеют одну и ту же скорость и одно и то же ускорение (рубр. 4 предыдущей главы); скорость и ускорение представляют собою два вектора, зависящие только от времени; они могут быть отождествлены со скоростью $v_0(t)$ и с ускорением $\bar{a}_0(t)$ начальной точки P. Так как в этом случае угловая скорость $\bar{\omega}$ подвижного триэдра постоянно равна нулю, то и дополнительное ускорение обращается тождественно в нуль; поэтому соотношения (5) и (8) дают:

$$v_a = v_r + v_0, \quad a_a = a_r + a_0;$$

векторы, входящие в правые части, зависят исключительно от времени.

---

[1]) Густав Кориолис (Gustave Gaspard Coriolis) родился в Париже в **1792** г., умер там же в 1843 г. Его выразительная формулировка этого предложения содержится в „Журнале политехнической школы" („Journal de l'École Polytechnique" 1836 г.). Кориолис состоял директором (собственно, заведующим учебной частью) этой школы.

b) Во-вторых, предположим, что перенос представляет собою *равномерное вращение* с угловой скоростью $\overline{\omega}$.

Если за начало O подвижного триэдра примем какую-либо (неподвижную) точку оси и, как мы это обыкновенно делаем, обозначим через Q ортогональную проекцию точки P на ось, то скорость и ускорение переносного движения выразятся формулами (рубр. 5 и 8 предыдущей главы):

$$\boldsymbol{v}_\tau = [\overline{\omega}\,\overline{OP}], \quad \boldsymbol{a}_\tau = -\omega^2\overline{QP},$$

поэтому для абсолютного движения *на основании соотношений* (5) и (8) получим:

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_r + [\overline{\omega}\,\overline{OP}], \quad \boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_r - \omega^2\overline{QP} + 2\,[\overline{\omega}\,\boldsymbol{v}_r]. \tag{9}$$

Если за ось z подвижного триэдра примем ось вращения, ориентированную в сторону угловой скорости, то предыдущие формулы дадут следующие выражения для компонент векторов $\boldsymbol{v}_a$ и $\boldsymbol{a}_a$ по подвижным осям:

$$\begin{aligned} v_{a|x} &= \dot{x} - \omega y; & a_{a|x} &= \ddot{x} - \omega^2 x - 2\omega\dot{y};\\ v_{a|y} &= \dot{y} + \omega x; & a_{a|y} &= \ddot{y} - \omega^2 y + 2\omega\dot{x};\\ v_{a|z} &= \dot{z}; & a_{a|z} &= \ddot{z}. \end{aligned}$$

c) Наконец, если переносное движение есть *равномерное* винтовое движение и начало подвижного триэдра взято на относительной оси движения, то мы будем иметь:

$$\boldsymbol{v}_\tau = \boldsymbol{v}_0 + [\overline{\omega}\,\overline{OP}], \quad \boldsymbol{a}_\tau = -\omega^2\overline{QP};$$

здесь (постоянная) скорость $\boldsymbol{v}_0$ точки O будет иметь то же направление, что и угловая скорость; мы получаем поэтому для абсолютной скорости выражение:

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_r + [\overline{\omega}\,\overline{OP}]; \tag{10}$$

для абсолютного же ускорения остается в силе выражение (9), полученное выше для случая равномерно вращательного переносного движения. Это становится совершенно ясным, если примем во внимание, что скорость (10) отличается только постоянным слагаемым $\boldsymbol{v}_0$ от выражения (9), соответствующего случаю „b“.

4. Движение твердой системы относительно двух других систем, движущихся одна относительно другой.

5. Понятия об абсолютном, относительном и переносном движении, установленные в предыдущих параграфах для случая одной движущейся точки, непосредственно распространяются на какие угодно системы точек, в том числе и на твердые системы. Во всех случаях для любой точки в каждый момент движения остаются в силе принцип относительных движений (рубр. 2), правило Кориолиса (рубр. 3) и совокупность соотношений (5) и (8), имеющих место для всех точек системы; этого достаточно для установления распределения скоростей и ускорений.

Мы ограничимся случаем, когда некоторая *твердая система* совершает движение относительно двух триэдров, движущихся друг по отношению к другу.

По принципу относительных движений абсолютная скорость каждой отдельной точки P системы S получается в каждый момент сложением скоростей v_r и v_τ совершенно так же, как и при сложении данных двух движений (III, рубр. 3). При всем том нельзя смешивать эти два случая: в движении, составленном из двух движений, скорость точки P представляет собою сумму скоростей, которыми она в один и тот же момент обладает в одном и в другом движении; здесь же относительная скорость v_r также соответствует действительному движению точки P; но скорость переноса v_τ отражает движение не самой точки P, а той точки триэдра $Oxyz$, с которой точка P совпадает в этот момент. Разница между этими двумя случаями становится совершенно ясной, если остановимся на произвольном поступательно-вращательном движении; такое движение мы можем рассматривать либо как сложное движение, либо же как движение, обусловленное переносом.

В самом деле, формула (15) рубр. 14, гл. III

$$v = \tau + [\overline{\omega}\,\overline{\Omega P}]$$

выражает просто разложение движения на поступательное и вращательное; второе же выражение мы будем рассматривать как *несобственное* разложение движения, именно:

$$v = v_0 + [\overline{\omega}\,\overline{OP}];$$

оно может быть истолковано, как выражение абсолютных скоростей точек твердой системы, которая совершает вращательное движение относительно триэдра $Oxyz$ с угловой скоростью $\overline{\omega}$; ось этого вращения в триэдре $Oxyz$ проходит через точку O параллельно вектору $\overline{\omega}$; среда $Oxyz$, в свою очередь, движется относительно триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$ поступательно со скоростью v_0 (переносное движение).

6. Предыдущее соображение относится, собственно, к конечному промежутку времени; но если мы здесь ограничимся рассмотрением одного момента t, то основное соотношение (5) показывает, что *всякое состояние абсолютного движения можно получить, слагая скорости двух одновременных движений* — относительного и переносного; вместе с тем здесь находят себе приложение различные соображения, развитые в рубр. 25—27 предыдущей главы, относительно состояния движения, составленного из двух движений.

Так, например, если как относительное (твердое) движение, так и переносное параллельны неподвижной плоскости, т. е. если соответствующие угловые скорости $\bar{\omega}_r$ и $\bar{\omega}_\tau$ параллельны и сохраняют постоянное направление, то мы можем заключить, путем сложения этих движений, что и абсолютное движение параллельно той же неподвижной плоскости. Его угловая скорость выражается суммой $\bar{\omega}_r + \bar{\omega}_\tau$; если исключим возможный случай поступательного движения, то ось абсолютного движения в каждый момент лежит в плоскости двух осей — относительного и переносного движения — и делит расстояние между ними в обратном отношении численных значений ω_r и ω_τ, притом внутренне или внешне в зависимости от того, обращены ли угловые скорости в одну и ту же сторону или в противоположные стороны.

5. Приложения.

7. Результаты, к которым мы пришли в предыдущих параграфах, находят широкие и изящные приложения в исследовании проблем кинематики, так как весьма многие из них могут быть приведены к проблемам относительного движения в том смысле, как этот термин установлен в настоящей главе. В этом параграфе и двух следующих мы дадим примеры такого рода соображений.

8. **Взаимные движения.** Если даны две твердые системы Σ и S, находящиеся в движении одна относительно другой, то мы будем отличать движение M системы S относительно Σ и *взаимное с ним* движение M^* системы Σ относительно S; вместе с тем мы будем обозначать через v и v^* скорости, которые одна и та же точка P будет иметь в один и тот же (произвольный) момент соответственно в движениях M и M^*; иначе говоря, под v мы будем разуметь скорость точки P, которую мы себе будем представлять неразрывно связанной с системой S, в ее движении M относительно Σ; под v^* мы будем разуметь скорость точки, совпадающей в этот же момент с P в системе Σ в ее движении M^* относительно S.

Чтобы установить соотношение, связывающее скорости v и v^*, будем рассматривать движение M системы S относительно Σ как переносное, а взаимное с ним движение системы Σ относительно S как относительное. Совершенно ясно, что абсолютное движение системы Σ относительно себя самой, которое таким образом устанавливается, будет состоянием покоя; принимая поэтому во внимание, что абсолютная скорость v_a при этих условиях равна нулю в любой момент и в любой точке, мы получим из уравнения (5):

$$v^* = -v \tag{11}$$

9. Отсюда непосредственно вытекает, что *для двух взаимных движений при общем полюсе соответственные характеристические векторы в один и тот же момент взаимно противоположны.*

В самом деле, если через v_0, $\bar{\omega}$ и $v_0{}^*$, $\bar{\omega}^*$ обозначим эти характеристические векторы, отнесенные к полюсу O (т. е. скорости точки O и выходящие из O угловые скорости двух движений), то соотношение (11) дает непосредственно:

$$v_0{}^* = -v_0, \tag{12}$$

так как v_0 и $v_0{}^*$ представляют собой скорости той же точки O в этих взаимных движениях. Что касается угловых скоростей, то нужно припомнить, что по основной формуле (10) рубр. 9 предыдущей главы скорости v и v^* произвольно взятой общей точки выражаются так:

$$v = v_0 + [\bar{\omega}\overline{OP}], \quad v^* = v_0{}^* + [\bar{\omega}^*\overline{OP}].$$

Подставляя эти выражения в формулу (11), получим:

$$v_0 + v_0{}^* + [(\bar{\omega} + \bar{\omega}^*)\,\overline{OP}] = 0.$$

Учитывая же равенство (12), придем к тождеству:

$$[(\bar{\omega} + \bar{\omega}^*)\,\overline{OP}] = 0;$$

а так как тождество это должно иметь место для любой точки, то мы получаем непосредственно:

$$\bar{\omega}^* = -\bar{\omega}.$$

10. Диференцирование векторов, отнесенных к подвижным осям. Если вектор $v\,(t)$, представляющий собой функцию времени (или какого-либо другого параметра), отнесен к определенному триэдру $\Omega\xi\eta\zeta$, то его производная определяется, как вектор, компонентами которого служат производные компонент v_ξ, v_η, v_ζ вектора v; мы знаем, что эта производная не меняется, если мы заменяем триэдр $\Omega\xi\eta\zeta$ другим неподвижным относительно него триэдром $Oxyz$. Эта производная, однако, вообще изменяется, если мы отнесем вектор $v\,(t)$ к другому триэдру, движущемуся относительно первого. Мы постараемся здесь установить, в какой зависимости находится эта производная от характера движения этих средин друг относительно друга [1]).

---

[1]) Содержание задачи можно наглядно себе уяснить из следующих соображений. Представим себе наблюдателя, пребывающего в среде $Oxyz$ и наблюдающего в ней в каждый момент определенный вектор $v\,(t)$; это может быть, например, скорость некоторой точки P, движущейся относительно среды $Oxyz$. Наблюдатель в моменты t и $t + \Delta t$ составляет векторы:

$$v\,(t + \Delta t) - v\,(t) \quad \text{и} \quad \frac{v\,(t + \Delta t) - v\,(t)}{\Delta t}$$

и предельным переходом определяет производную, которая в тексте обозначена через $\dfrac{dv}{dt}$ или $\dot{v}$.

В среде $\Omega\xi\eta\zeta$, относительно которой движется триэдр $Oxyz$, находится другой наблюдатель. Вектор $v\,(t)$ в каждый момент отпечатлевается

Обозначим через $\frac{d_a v}{dt}$ производную (абсолютную) вектора v относительно триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$, который мы и здесь для краткости речи будем называть *неподвижным*; а через $\frac{dv}{dt}$ или $\dot{v}$ будем обозначать (относительную) производную вектора v по отношению к подвижному триэдру $Oxyz$. Введем теперь вспомогательный триэдр $Ox_1y_1z_1$, имеющий то же начало, что и триэдр $Oxyz$, но оси, параллельные осям *неподвижного* триэдра и обращенные каждая в ту же сторону. Каково бы ни было движение точки O относительно среды $\Omega\xi\eta\zeta$, компоненты вектора v по осям $\Omega\xi\eta\zeta$ и $Ox_1y_1z_1$ будут в каждый момент соответственно совпадать; поэтому производные вектора v относительно этих двух триэдров не будут различаться между собой. Иными словами, при вычислении производной $\frac{d_a v}{dt}$ мы можем относить ее не к триэдру $\Omega\xi\eta\zeta$, а к вспомогательному триэдру $Ox_1y_1z_1$.

Если теперь представим себе вектор v приложенным в точке O то его свободный конец P будет, вообще говоря, совершать движение как относительно триэдра $Ox_1y_1z_1$, так и относительно $Oxyz$; при этом движение относительно триэдра $Ox_1y_1z_1$ можно будет рассматривать, как абсолютное — образуемое переносным движением системы $Oxyz$ относительно триэдра $Ox_1y_1z_1$ (который мы здесь будем считать неподвижным) и относительным движением точки P по отношению к $Oxyz$. Так как координатами точки P относительно триэдров $Ox_1y_1z_1$ и $Oxyz$ соответственно служат v_ξ, v_η, v_ζ и v_x, v_y, v_z, то два вектора $\frac{d_a v}{dt}$ и $\frac{dv}{dt}$ представляют собою не что иное, как абсолютную и относительную скорость точки P. Обозначим, как обыкновенно, через $\overline{\omega}$ угловую скорость

в среде $\Omega\xi\eta\zeta$ в виде некоторого вектора $v^*(t)$, который и видит второй наблюдатель; он составляет векторы:

$$v^*(t+\Delta t) - v^*(t)$$

и

$$\frac{v^*(t+\Delta t) - v^*(t)}{\Delta t}$$

и по ним получает производную $v^*(t)$, которая в тексте отмечена через $\frac{d_a v}{dt}$. Задача заключается в том, чтобы установить зависимость между этими двумя производными по заданному движению среды $Oxyz$ относительно $\Omega\xi\eta\zeta$. Что эти производные вообще различны, ясно из следующего простого примера. Положим, что вектор v остается в среде $Oxyz$ постоянным; тогда производная $\dot{v}$ равна нулю. Положим, что среда $Oxyz$ вращается относительно $\Omega\xi\eta\zeta$ вокруг некоторой оси. Вектор $v(t)$ будет отпечатлеваться на $\Omega\xi\eta\zeta$ рядом векторов, расположенных по конической поверхности; наблюдателю, находящемуся в этой среде, он уже не будет казаться постоянным, и производная $\frac{d_a v}{dt}$ будет поэтому отлична от нуля. (*Ред.*)

триэдра $Oxyz$ относительно $Ox_1y_1z_1$, или, что то же, относительно $\Omega\xi\eta\zeta$. Тогда скорость переносного движения точки P выразится формулой:

$$v_\tau = [\overline{\omega}\overline{OP}] = [\overline{\omega}\overline{r}],$$

так как начальные точки обоих триэдров все время совпадают. Применяя поэтому принцип относительных движений (рубр. 2), мы получим следующее соотношение между скоростями обоих движений:

$$\frac{d_a v}{dt} = \frac{dv}{dt} + [\overline{\omega} v]. \tag{13}$$

Отсюда ясно, что обе производные постоянно совпадают только в том случае, когда обращается в нуль векторное произведение $[\overline{\omega} v]$, т. е. либо когда скорость v параллельна оси вращения подвижного триэдра, либо же когда $\overline{\omega} = 0$, т. е. подвижной триэдр совершает чисто поступательное движение.

К соотношению (13) можно притти еще иным путем. Рассматривая вектор (переменный) v как ориентированный отрезок $\overline{QP}$ (это всегда возможно сделать бесчисленным множеством способов), диференцируем его относительно триэдров $\Omega\xi\eta\zeta$ и $Oxyz$; мы получаем:

$$\frac{d_a v}{dt} = \frac{d_a \overline{QP}}{dt} = \frac{d_a P}{dt} - \frac{d_a Q}{dt}, \qquad \dot{v} = \dot{P} - \dot{Q};$$

а затем почленным вычитанием найдем:

$$\frac{d_a v}{dt} - v = \left(\frac{d_a P}{dt} - \dot{P}\right) - \left(\frac{d_a Q}{dt} - \dot{Q}\right).$$

Каждый из двух членов правой части, заключенных в скобки, представляет собою разность абсолютной и относительной скорости одной и той же точки, а потому совпадает с переносной скоростью этой точки. Поэтому правая часть приводится к

$$[\overline{\omega}\overline{OP}] - [\overline{\omega}\overline{OQ}] = [\overline{\omega}\overline{QP}] = [\overline{\omega} v],$$

и мы, таким образом, вновь приходим к формуле (13).

11. Из формулы (13) непосредственно вытекают некоторые замечательные кинематические следствия. Применяя, прежде всего, эту формулу к угловой скорости, получаем:

$$\frac{d_a \overline{\omega}}{dt} = \frac{d\overline{\omega}}{dt}; \tag{14}$$

это значит: *при движении твердой системы угловая ее скорость имеет ту же производную как относительно неподвижного триэдра, так и относительно триэдра, неразрывно связанного с этой системой.*

Принимая поэтому во внимание тождество $\overline{\omega} = \omega \operatorname{vers} \omega$ и замечая, что производная скаляра, очевидно, не зависит от триэдра, к которому мы ее относим, мы получаем из соотношения (14):

$$\frac{d_a \operatorname{vers} \overline{\omega}}{dt} = \frac{d \operatorname{vers} \overline{\omega}}{dt};$$

отсюда видно, что обе эти производные обращаются в нуль совместно; это значит: *если во все время движения твердой системы ось движения имеет в этой системе неизменное направление, то она сохраняет неизменное направление также в пространстве, и обратно.*

12. Наконец, формула (13) рубр. 10 дает еще возможность доказать теорему, которую мы уже формулировали и применили в рубр. 16 предыдущей главы: *всякое равномерное винтовое движение имеет при любом центре приведения постоянные характеристические векторы относительно подвижных осей.*

В самом деле, обозначим, как обыкновенно, через $\overline{\tau}$ и $\overline{\omega}$ — составляющие скорости поступательно вращательного движения, а через v_0 и $\overline{\omega}$ — соответствующие характеристические векторы (относительно любого полюса O); как видно из формулы (14), всякий раз, когда угловая скорость $\overline{\omega}$ представляет собою постоянный вектор относительно неподвижного триэдра, она остается постоянной также относительно подвижного триэдра, — и обратно.

Что касается, далее, векторов $\overline{\tau}$ и v_0, то, прежде всего, согласно соотношению (16) предыдущей главы

$$v_0 = \overline{\tau} + [\overline{\omega}\,\overline{\Omega O}].$$

Диференцируя это равенство по t относительно неподвижного триэдра в предположении постоянного $\overline{\omega}$, получим:

$$\frac{d_a v_0}{dt} = \frac{d_a \overline{\tau}}{dt} + \left[\overline{\omega}\ \frac{d_a O}{dt}\right] = \frac{d_a \tau}{dt} + [\overline{\omega} v_0].$$

Применяя, с другой стороны, к v_0 соотношение (13), найдем:

$$\frac{d_a v_0}{dt} = \frac{d v_0}{dt} + [\overline{\omega}\, v_0];$$

сопоставляя это с предыдущим соотношением, получаем окончательно:

$$\frac{d v_0}{dt} = \frac{d_a \overline{\tau}}{dt}.$$

Это значит: если угловая скорость $\overline{\omega}$ сохраняет постоянное (векторное) значение (как обнаружено в предыдущей рубрике, безразлично, является ли она постоянной относительно подвижного или неподвижного триэдра), производные вектора v_0 относительно подвижных осей и вектора $\overline{\tau}$ относительно неподвижных осей совпадают; таким образом, если один из этих векторов обращается в нуль, то уничтожается и другой вектор.

6. Образование твердого движения при помощи аксоидов.

13. Возвратимся теперь к твердому движению, заданному своей *геометрической* характеристикой, т. е. последовательностью положений, занимаемых подвижной системой, независимо от хода движения во времени; это даст нам возможность еще раз воспользоваться теорией относительного движения, как вспомогательным средством при изучении движения.

Положим, что в некотором данном интервале времени задано движение твердой системы S относительно среды $\Omega\xi\eta\zeta$. Может оказаться, что угловая скорость $\overline{\omega}$ системы S обращается в нуль в некоторые моменты движения или даже в некоторые сплошные промежутки времени. Во всяком случае весь интервал движения может быть разбит на промежутки, в каждом из которых угловая скорость $\overline{\omega}$ либо постоянно равна нулю, либо же все время отлична от нуля (за исключением, конечно, моментов, отделяющих один промежуток от другого). В промежутке первого рода твердое движение является поступательным (III, рубр. 4); все точки системы S описывают конгруентные и параллельные траектории по одному и тому же закону; этим путем геометрический ход движения сразу приведен в ясность.

Во вторую очередь рассмотрим промежуток времени, в течение которого угловая скорость все время остается отличной от нуля; в этом случае, как мы знаем, в подвижной системе S в каждый момент такого промежутка существует определенная *ось движения* m; это есть ось того винтового движения, которое в этот момент является тангенциальным по отношению к рассматриваемому твердому движению; если $\boldsymbol{v}_0$ и $\overline{\omega}$ представляют собою характеристические векторы движения (относительно произвольного полюса O), то твердое движение можно в этот момент рассматривать, как состоящее из вращательного движения с угловой скоростью $\overline{\omega}$ вокруг оси m и из поступательного движения со скоростью

$$\frac{1}{\omega}\,(\boldsymbol{v}_0\overline{\omega})$$

вдоль той же оси; в соответствии с этим элементарное смещение системы за бесконечно малый промежуток времени dt можно рассматривать как составленное из бесконечно малого поворота $\omega\,dt$ вокруг оси m и бесконечно малого поступательного смещения вдоль этой оси. Может случиться, что ось движения сохраняет в системе S постоянное направление, т. е. остается неизменной относительно триэдра $Oxyz$, неразрывно связанного с системой S; мы уже знаем, что в этом случае ось сохраняет также неизменное направление относительно триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$ или, как обычно говорят, относительно пространства (рубр. **11**); мы имеем, таким образом, дело с поступательно-вращательным движением.

Если исключим эти совершенно частные случаи, то ось движения будет менять свое положение от момента к моменту как относительно подвижного триэдра $Oxyz$, так и относительно неподвижного $\Omega\xi\eta\zeta$: геометрические места, образуемые этими последовательными положениями оси в одной и другой средах (или, что то же, в пространстве и в подвижной системе), представляют собою две линейчатые поверхности Λ и L, которые мы будем называть *неподвижным аксоидом* и *подвижным аксоидом*, поскольку они соответственно неразрывно связаны с триэдрами, которые мы называли неподвижным и подвижным.

В каждый момент оба аксоида Λ и L имеют общую образующую, представляющую в этот момент ось движения; мы постараемся здесь доказать, что в этот момент оба аксоида *соприкасаются* вдоль общей образующей, т. е. в каждой ее точке имеют общую касательную плоскость.

С этой целью представим себе на подвижном аксоиде L произвольную кривую l, пересекающую последовательные его образующие. Вместе с тем, рассмотрим на аксоиде L движение точки P, которая на нем (или, что то же, в системе S) совершает движение таким образом, что в каждый момент находится в пересечении кривой l с соответствующей этому моменту осью движения, т. е. общей в этот момент образующей аксоидов L и Λ.

В результате этого своего (относительного) движения по отношению в среде S, соединенного с твердым движением этой среды относительно триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$ (переносного движения), точка P совершает движение (абсолютное) относительно среды $\Omega\xi\eta\zeta$ и описывает в ней некоторую траекторию; так как точка P в каждый момент находится на соответствующей оси движения, то эта траектория лежит на неподвижном аксоиде Λ (и пересекает на нем каждую образующую в одной точке). Поэтому скорости v_a и v_r точки P (абсолютная и относительная) в каждый момент касаются кривых λ и l, а следовательно, и аксоидов Λ и L.

Теперь обратимся к переносной скорости v_τ, т. е. к скорости той точки среды S, с которой P в этот момент совпадает. Припомним, что точка P в каждый момент лежит на оси движения, поэтому v_τ представляет собою ту компоненту скорости тангенциального винтового движения, которая соответствует переносу вдоль оси; следовательно, она в каждый момент направлена по общей образующей обоих аксоидов. Теперь достаточно обратиться к основному соотношению

$$v_a = v_r + v_\tau$$

(рубр. 2), чтобы отсюда заключить, что плоскость двух скоростей v_τ и v_r, касающаяся в точке P аксоида L (поскольку она содержит образующую, проходящую через точку P, и касается лежащей на L кривой l), совпадает с плоскостью скоростей v_τ и v_a, которая (по совершенно аналогичным соображениям) касается аксоида Λ. А так как то же рассуждение можно провести по отношению к любой точке общей образующей двух аксоидов, то отсюда ясно, что они вдоль этой образующей соприкасаются, Из всего этого мы заключаем, что *твердое движение системы происходит таким образом, как будто аксоид L, неразрывно связанный с системой S, катится по неподвижному аксоиду Λ, касаясь его в каждый момент по оси движения.*

Но важно заметить, что, вообще говоря, это качение сопровождается от момента к моменту элементарным скольжением вдоль образующей соприкосновения; в самом деле, как уже было указано с самого начала этого рассуждения, элементарное смещение системы S в каждый момент состоит из бесконечно малого вращения вокруг мгновенной оси и бесконечно малого переноса вдоль этой оси.

Этого элементарного скольжения нет в том и, только в том, случае, когда твердое движение представляет собою чистое вращение, т. е. когда инвариантный трехчлен обоих характеристических векторов (по отношению к любому полюсу) обращается в нуль (рубр. 23 предыдущей главы). Это значит, когда

$$v_0 \bar{\omega} = 0, \tag{15}$$

причем угловая скорость $\bar{\omega}$ не сводится к нулю.

Мы видели (рубр. 24 предыдущей главы), что соотношение (15) всегда имеет место для твердых движений около неподвижной точки или параллельно данной плоскости. Движения последнего типа обстоятельно рассмотрены в следующей главе; здесь же остановимся на движении твердой системы около неподвижной точки.

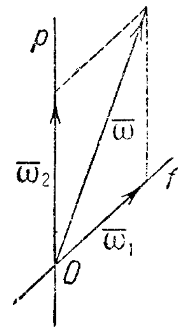
7. Движение твердой системы около неподвижной точки. Правильная прецессия.

14. Если при движении твердой системы остается неподвижной некоторая точка O (см. рубр. 24 предыдущей главы), то состояние движения представляет собою во всякий момент вращение вокруг некоторой оси, проходящей через точку O; оба аксоида L и Λ представляют собою в этом случае конические поверхности с вершинами в точке O (*конусы Пуансо*), которые соприкасаются друг с другом в каждый момент по общей образующей, меняющей свое положение как на одном, так и на другом конусе (ось движения). Так как в этом случае скольжение по оси отсутствует, то *всякое движение твердой системы вокруг неподвижной точки O происходит таким образом, как будто некоторый конус, неразрывно связанный с данной системой и имеющий вершину в точке O, катится без скольжения по неподвижному конусу с той же вершиной.*

15. Замечательный пример твердых движений около неподвижной точки представляют так называемые *правильные прецессии*. В связи с учением об относительном движении они могут быть определены следующим образом. Представим себе твердую систему S, равномерно вращающуюся вокруг неразрывно с нею связанной оси f; положим, далее, что эта ось пересекает некоторую неподвижную ось в постоянной точке и равномерно вращается вокруг последней. Абсолютное движение, составленное из равномерного переносного вращения прямой f вокруг неподвижной оси p и относительного движения системы S, равномерно вращающейся вокруг f, называется правильным *прецессионным движением*, или *правильной прецессией*; неподвижная ось p называется *осью прецессии*; ось f, остающаяся неподвижной в твердой системе — *осью системы*; неподвижная же точка O, в которой пересекаются обе оси, — *полюсом прецессии*.

Прецессия, очевидно, определена, если заданы (в пространстве и в твердой системе) полюс O и угловые скорости составляющих движений — одна постоянная в пространстве, другая постоянная в твердой системе. Если $\overline{\omega}_1$ есть угловая скорость вращения системы вокруг прямой f (фиг. 47), а $\overline{\omega}_2$ — угловая скорость вращения оси вокруг неподвижной прямой p, то угловая скорость абсолютного вращения, т. е. правильного прецессионного движения, $\overline{\omega}$ во всякий момент выражается суммой:

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2; \tag{16}$$



Фиг. 47.

таким образом, *во всяком правильном прецессионном движении угловая скорость в каждый момент представляет собою сумму двух векторов постоянной длины, один из которых сохраняет постоянное положение в пространстве, а другой — в твердой системе.*

Обратно, легко убедиться, что это свойство вполне характеризует среди движений, сохраняющих постоянную точку, те, которые мы называли правильными прецессиями; оно может быть поэтому рассматриваемо как новое их определение. В самом деле, положим, что некоторая система совершает движение около неподвижной точки с угловой скоростью $\overline{\omega}$, которая в каждый момент представляет собою сумму двух векторов $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$, имеющих постоянные длины и удовлетворяющих формулированным выше условиям. Если при этом прямые действия этих векторов f и p проходят через точку O и вторая из них занимает постоянное положение в пространстве, то твердое движение системы можно представить себе составленным из двух равномерных вращений вокруг осей f и p с угловыми скоростями соответственно $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$.

16. При правильной прецессии построенный на векторах $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ параллелограм с вершиной в точке O также равномерно вращается вокруг своей стороны, расположенной на прямой p; вследствие постоянства длин ω_1 и ω_2 он сохраняет также свою форму; вследствие этого, в частности, остается постоянным скалярное произведение

$$\overline{\omega}_1 \overline{\omega}_2 .$$

Иными словами, диагональ этого параллелограма, дающая в каждый момент прямую действия угловой скорости $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$ прецессии, т. е. соответствующую ось движения, во все время движения сохраняет постоянные углы как с прямой p, так и с f; отсюда вытекает: *при правильной прецессии оба аксоида представляют собою круглые конусы* (*Пуансо*).

17. Правильные прецессии, при которых постоянный скаляр $\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2$ отличен от нуля, называются *прогрессивными* или *регрессивными* в зависимости от того, имеет ли эта постоянная положительное или отрицательное значение, т. е. образуют ли угловые скорости $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$ острый или тупой угол.

В первом случае каждая угловая скорость обращена в ту же сторону, что и проекция на нее второй угловой скорости; во втором случае они обращены в противоположные стороны. Этим и объясняется название *прогрессивной* и *регрессивной* прецессии.

Выбрав на каждой из двух осей p и f (прецессии и системы) по произволу сторону обращения и обозначив соответствующие единичные векторы через $\overline{\varkappa}$ и $\boldsymbol{k}$, будем иметь:

$$\overline{\omega}_1 = \mu\boldsymbol{k}, \quad \overline{\omega}_2 = \nu\overline{\varkappa},$$

где μ и ν суть скаляры; каждый из этих скаляров имеет положительное или отрицательное значение в зависимости от того, происходит ли соответствующее вращение в правую или в левую сторону относительно ориентированной оси вращения. Отсюда следует, что $\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2 = \mu\nu\cos\theta_0$, где θ_0 означает угол между версорами $\overline{\varkappa}$ и $\boldsymbol{k}$; знак произведения этих трех множителей устанавливает, к какому из двух видов принадлежит данное прецессионное движение.

В случае $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, который мы заранее исключили, настоящий критерий неприложим, и прецессию можно по произволу считать прогрессивной или регрессивной.

18. Другую классификацию правильных прецессий получаем, сличая относительное расположение двух круглых конусов Пуансо. Если представлять себе эти конусы образованными целыми прямыми, то здесь, очевидно, возможно только три случая (если, конечно, исключить случай, когда один из двух конусов вырождается в плоскость): либо каждый конус расположен вне другого, либо подвижной конус расположен внутри неподвижного, либо неподвижный конус расположен внутри подвижного (фиг. 48).

Мы не будем входить в рассмотрение критериев, отличающих эти случаи один от другого, и ограничимся выводом уравнений движения в эйлеровых углах (III, рубр. 29—31). За начало примем полюс прецессии, за оси ζ и z неподвижного и подвижного триэдров примем ориентированные оси p и f, угол между которыми равен θ_0; тогда $\psi = \widehat{\xi N}$ даст аномалию линии узлов N на плоскости, перпендикулярной в точке O к оси $\zeta \equiv p$, а $\varphi = \widehat{Nx}$

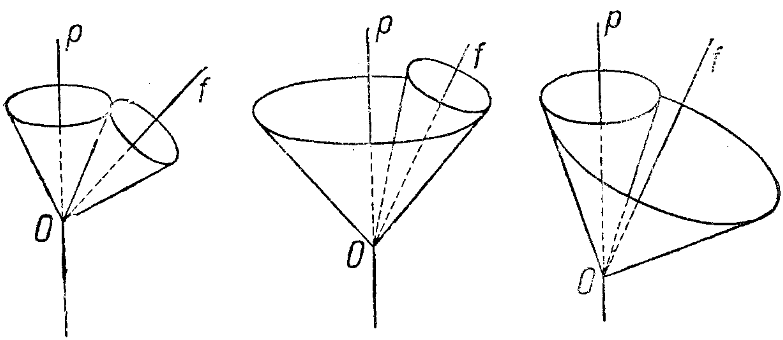
даст аномалию оси x на плоскости, перпендикулярной в точке O к оси $z \equiv f$; таким образом, будем иметь:

$$\dot{\varphi} = \mu, \quad \dot{\psi} = \nu. \tag{17}$$

Интегрируя эти уравнения, мы получим уравнения правильной прецессии:

$$\theta = \theta_0, \quad \varphi = \mu t + \varphi_0, \quad \psi = \nu t + \psi_0, \tag{18}$$

где $\theta_0, \varphi_0, \psi_0$ суть эйлеровы углы при начальном положении твердой системы. Совершенно ясно, что и, обратно, три уравнения (18) всегда выражают правильное прецессионное движение, для которого $O\zeta$ есть ось прецессии, а Oz — ось системы.



Фиг. 48.

19. Правильная прецессия земли. Замечательный пример правильной прецессии представляет движение земли около своего центра O; более того, именно от этого частного случая ведет свое название прецессия. Из элементарной космографии известно, что земля равномерно вращается вокруг своей полярной оси f в левую сторону (против часовой стрелки, т. е. с запада на восток через юг, противоположно видимому движению солнца), совершая полный оборот в течение суток (звездных). Но полярная ось земли f не сохраняет неизменным своего направления относительно неподвижных звезд; напротив того, она, в свою очередь, равномерно вращается (хотя и чрезвычайно медленно) вокруг некоторой прямой постоянного направления p, проходящей через центр земли; эта прямая характеризуется тем, что она перпендикулярна к плоскости эклиптики (т. е. эллиптической орбиты, описываемой землей по законам Кеплера в своем вращении вокруг солнца). Постоянный угол (наименьший) двух прямых (еще не ориентированных) f и p составляет около $23°,5$. Представим себе ось f ориентированной от центра земли к северному полюсу B, а ось p ориентированной таким образом, чтобы она составляла упомянутый выше *острый угол* с полупрямой OB. Наиболее древние астрономические наблюдения при сопоставлении их с наблюдениями последних столетий обнаружили, что земная ось OB вращается вокруг оси p (ориентированной по установленному выше соглашению) в сторону движения часовой стрелки (т. е. с востока на запад), совершая полный оборот в период приблизительно в 26 000 лет (звездных), который получил название *платонического года*. Правильная прецессия этим определена.

Видимое вращение земли вокруг оси OB представляется правосторонним, вращение прямой f вокруг p — левосторонним, так что прецессия является регрессивной. Кроме того, если за единицу времени примем звездные сутки, так что платонический год будет содержать этих суток $366 \cdot 26\,000$, т. е., округляя цифры, $360 \cdot 25\,000 = 9 \cdot 10^6$ дней, то в качестве компонент μ и ν скоростей $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ при установленной ориентации осей f и p мы получим значения:

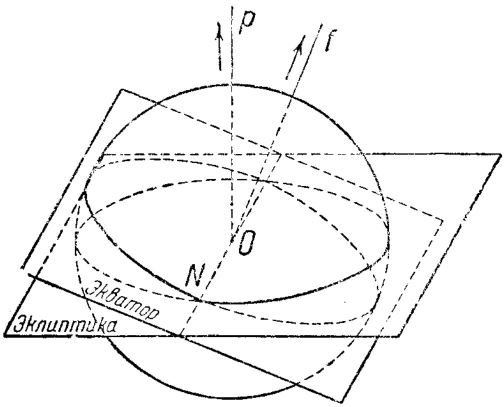
$$\mu = 2\pi, \quad \nu = -\frac{2\pi}{9 \cdot 10^6}. \tag{19}$$

Отсюда ясно, что отношение $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ абсолютных значений этих двух угловых скоростей чрезвычайно мало: оно составляет число порядка 10^{-7}.

Складывая $\overline{\omega}_1 = \mu\overline{k}$ и $\overline{\omega}_2 = \nu\overline{\varkappa}$, мы получаем в качестве прямой действия угловой скорости $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$, т. е. в качестве оси прецессионного движения ориентированную прямую m, расположенную вне угла $\widehat{fp}$ и наклоненную к f под чрезвычайно малым углом в $0{,}00867''$ (упражнение 7 в конце главы); таким образом, подвижной конус Пуансо, имеющий чрезвычайно малое отверстие, катится по внутренней поверхности неподвижного конуса, отверстие которого несколько превышает $23^\circ{,}5$. Вследствие крайней незначительности $|\nu|$ по сравнению с μ, т. е. вследствие медленности переносного движения по сравнению с собственным движением, можно в первом приближении движение земли рассматривать как простое вращение вокруг полярной оси, считая последнюю неподвижной в пространстве; так это обыкновенно и делается; и действительно, в течение большого числа лет и даже столетий вращение прямой f вокруг оси p остается почти совершенно незаметным. Но с течением тысячелетий это отклонение становится доступным астрономическим наблюдениям. Так, например, некоторые созвездия, видимые в настоящее время только в южном полушарии, в отдаленные времена (примерно около 3000 лет назад) были видны в средиземной полосе, как это обнаруживают различные места из библейских и гомеровских сказаний.

20. Предварение равноденствий. Изложенные свойства прецессионного движения непосредственно приводят к объяснению этого астрономического явления.

Как указано в предыдущей рубрике, эклиптика представляет собою не что иное, как плоскость, в которой происходит видимое с земли годовое движение солнца (кеплерово, а в более грубом приближении — круговое), от которого зависит смена времен года. Рассмотрим вместе с ней плоскость земного экватора (т. е. *неподвижную* плоскость, проходящую через центр земли O перпендикулярно к полярной оси OB); пусть N будет ее пересечение с плоскостью эклиптики (фиг. 49). Солнце в этом своем движении, левостороннем относительно ориентированной оси p (см. выше), один раз в год пересекает положительную полупрямую N. Этот момент и представляет собою момент *весеннего равноденствия*; пересечение прямой N с противоположной стороны происходит в момент осеннего равноденствия. Сообразно этому вся прямая N называется *равноденственной прямой*; если угодно, ее можно рассматривать, как линию узлов в системе отсчета, установленной в рубр. 18 при помощи эйлеровых углов.



Фиг. 49

Второе из уравнений (18) обнаруживает, что равноденственная прямая вращается в плоскости эклиптики с угловой скоростью $\dot{\psi} = \nu$; второе равенство (19) показывает, что это движение происходит чрезвычайно медленно, так что в течение ряда лет эта прямая может считаться неподвижной. Но в течение веков движение прямой N становится заметным. Так как $\nu < 0$, то это движение направлено влево по отношению к оси эклиптики p и оси мира f (обращенной к северному полюсу земли), т. е. происходит по часовой стрелке; это приводит к предварению, или прецессии равноденствий, вследствие которых в промежуток, составляющий, примерно, 13 000 звездных лет (половина платонического года), происходит полное обращение температурных условий, характеризующих времена года в данном месте земли.

8. Определение твердого движения по данным его характеристикам.

21. Если задано твердое движение, то мы всегда умеем при помощи одних только диференциальных операций (последовательным диференцированием) разыскать два вектора $\boldsymbol{v}_0$ и $\boldsymbol{\omega}$, зависящие только от времени (которые мы назвали *характеристическими* векторами или просто *характеристиками* движения); они дают возможность явным образом выразить состояние движения в каждый момент (III, рубр. 20). Здесь, в дополнение к кинематике твердых тел, мы займемся обратной задачей—

установить движение твердой системы, если его характеристические векторы заданы в функции времени.

Эта проблема представляется в двух различных видах, смотря по тому, заданы ли векторы v_0 и $\overline{\omega}$ (в функции времени) относительно неподвижных осей $\Omega\xi\eta\zeta$ или относительно подвижных осей $Oxyz$. В обоих случаях задача заключается в том, чтобы по этим заданиям притти обратно к четырем геометрическим функциям $O(t)$, $\boldsymbol{i}(t)$, $\boldsymbol{j}(t)$, $\boldsymbol{k}(t)$ (положение начала и основные версоры подвижного триэдра), которыми, как мы видели при изложении кинематики твердых тел (III, рубр. 1), определяется твердое движение.

Здесь мы займемся сначала тем случаем, когда характеристические векторы v_0 и $\overline{\omega}$ заданы по отношению к подвижному триэдру; формально это означает, что нам известны в функции времени компоненты u, v, w и p, q, r.

На первый взгляд могло бы казаться более естественным начать изложение с того случая, когда характеристики заданы по отношению к неподвижному триэдру; но в действительности очень часто именно система отсчета, неразрывно связанная с твердым телом, дает возможность лучше и быстрее охватить ход движения.

22. В первую очередь, мы займемся частным случаем, когда данное твердое тело движется около неподвижной точки. Эту точку мы примем за общее начало $\Omega \equiv O$ обоих триэдров; все сводится, таким образом, к определению взаимного расположения этих двух триэдров. Расположение это, как только что было указано, определяется тремя основными версорами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ подвижных осей; но, естественно, мы можем представить себе также заданным положение триедра $\Omega\xi\eta\zeta$ относительно $Oxyz$. В том и другом случае компоненты версоров вполне определяются девятью направляющими косинусами:

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{matrix}$$

в первом задании эти косинусы нужно взять по горизонталям, во втором — по вертикалям.

На основе этого замечания решение нашей проблемы сводится к тому, чтобы определить, как меняются в подвижной системе компоненты произвольного неподвижного вектора $\boldsymbol{u}$, т. е. неизменно связанного с триэдром $\Omega\xi\eta\zeta$; после этого остается только отождествить этот вектор $\boldsymbol{u}$ последовательно с каждым из трех основных векторов неподвижного триэдра, чтобы получить для каждого момента девять направляющих косинусов.

Какой-нибудь неподвижный вектор $\boldsymbol{u}$ в обозначениях рубр. **10** характеризуется диференциальным уравнением:

$$\frac{d_0 \boldsymbol{u}}{dt} = 0;$$

если через $\overline{\omega}$ обозначим угловую скорость твердого тела, а через $\dot{u}$ производную вектора u, взятую по отношению к подвижным осям, то это диференциальное уравнение примет вид:

$$\dot{u}+[\overline{\omega}u]=0. \tag{20}$$

Если спроектируем обе части этого уравнения на оси подвижного триэдра и, как обыкновенно, обозначим через p, q, r компоненты угловой скорости на подвижные оси (которые нам заданы в функциях времени, допускающих производные), то мы получим систему диференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{u}_x &= ru_y - qu_z, \\ \dot{u}_y &= pu_z - ru_x, \\ \dot{u}_z &= qu_x - pu_y. \end{aligned} \tag{20'}$$

Нам нужно было бы эту систему проинтегрировать; но это интегрирование мы вообще выполнить не умеем; однако при удачном выборе переменных можно точнее установить, в чем, собственно, заключается трудность проблемы; это одновременно выявляет также наиболее замечательные частные случаи, в которых интегрирование приводится к квадратурам.

23. То обстоятельство, что u есть постоянный вектор и, следовательно, с течением времени сохраняет постоянную длину выражается первым интегралом системы:

$$u_x^2+u_y^2+u_z^2=\text{const.};$$

этот интеграл можно, конечно, получить непосредственно из диференциальных уравнений (20′); их достаточно для этого помножить соответственно на u_x, u_y, u_z, почленно сложить и затем выполнить интегрирование; постоянная правой части сводится к единице, если u есть единичный вектор, как мы это предполагаем.

Полученное, таким образом, уравнение

$$u_x^2+u_y^2+u_z^2=1 \tag{21}$$

подсказывает специальный выбор переменных, который позволяет свести интегрирование системы (20′) к более простой системе, содержащей только две неизвестные функции.

Для этого заметим, прежде всего, что мы можем считать вектор u приложенным в начале координат O; тогда его свободный конец (координатами которого служат компоненты u_x, u_y, u_z) движется относительно триэдра $Oxyz$ по сфере, центр которой совпадает с точкой O, а радиус равен единице; вследствие этого положение точки P или, что то же, три величины u_x, u_y, u_z могут быть выражены любой парой гауссовых координат на сфере, в частности параметрами λ, μ двух систем ее комплексных образующих (так называемые симметрические координаты) [1].

---

[1] О гауссовых координатах и вводимых здесь так называемых симметрических координатах на сфере см. приложение III.

Как известно, эти две системы можно разыскать, если написать уравнения (21) в виде:

$$(u_x+iu_y)\,(u_x-iu_y)+(u_z+1)\,(u_z-1)=0;$$

тогда параметры λ и μ определяются уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}\lambda&=\frac{u_x+iu_y}{1-u_z}=\frac{1+u_z}{u_x-iu_y},\\ -\frac{1}{\mu}&=\frac{u_x-iu_y}{1-u_z}=\frac{1+u_z}{u_x+iu_y}.\end{aligned}\right\}\qquad(22)$$

Отсюда следует, что при вещественных значениях u_x, u_y, u_z параметры λ и μ имеют комплексные значения, причем $-\frac{1}{\mu}$ и λ суть сопряженные комплексные числа.

Теперь легко разрешить уравнения (22) относительно u_x, u_y, u_z, конечно, в предположении, что они связаны соотношением (21); это последнее сказывается в том, что два выражения, которые уравнения (22) дают для λ и для $-\frac{1}{\mu}$, тождественны между собой. В самом деле, перемножая почленно соотношения

$$\frac{u_x+iu_y}{1-u_z}=\lambda,\qquad \frac{1+u_z}{u_x+iu_y}=-\frac{1}{\mu},\qquad(23)$$

получаем, прежде всего, линейное уравнение относительно u_z; разрешив его, найдем:

$$u_z=\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}.\qquad(24)$$

Подставив эти выражения в уравнения (22), легко получим:

$$u_x+iu_y=\frac{-2\lambda\mu}{\lambda-\mu},\qquad u_x-iu_y=\frac{2}{\lambda-\mu},\qquad(23')$$

откуда непосредственно найдем:

$$u_x=\frac{1-\lambda\mu}{\lambda-\mu},\qquad u_y=i\,\frac{1+\lambda\mu}{\lambda-\mu}.\qquad(24')$$

24. Теперь подставим в уравнения (20′) вместо u_x, u_y, u_z их выражения через λ и μ, содержащиеся в формулах (24′) и (24). Мы получаем тогда три диференциальные уравнения относительно λ и μ, из которых одно, как следовало предвидеть, представляет собою следствие двух остальных; эти же последние могут быть написаны в виде:

$$\frac{d\lambda}{dt}=\frac{q-ip}{2}-ir\lambda+\frac{q+ip}{2}\lambda^2,\qquad(25)$$

$$\frac{d\mu}{dt}=\frac{q-ip}{2}-ir\mu+\frac{q+ip}{2}\mu^2.\qquad(25')$$

Мы приходим, таким образом, к замечательному выводу, что λ и μ представляют собою два решения (какие угодно) одного и того же уравнения Риккати [1]), коэфициенты которого представляют собою линейные и однородные функции от характеристик.

Проинтегрировав это уравнение, мы непосредственно получаем компоненты u_x, u_y, u_z произвольного постоянного вектора u в функции времени, в частности, и компоненты трех основных векторов триэдра.

Следует еще отметить, что по самой природе вопроса характеристики p, q, r суть вещественные функции времени; таковы же и компоненты определяемого вектора u. Поэтому достаточно получить одно комплексное решение λ уравнения Риккати (25), а затем положить $\mu = -\frac{1}{\bar{\lambda}}$, где черта, поставленная над комплексной величиной, как обыкновенно, обозначает сопряженную с ней комплексную величину.

То, что $-\frac{1}{\bar{\lambda}}$ представляет решение уравнения (25) совместно с λ, вытекает из предыдущего рассуждения; но это можно также легко обнаружить и непосредственным формальным вычислением. В самом деле, деля уравнение (25) на λ^2, получаем:

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{q+ip}{2} - ir\frac{1}{\lambda} + \frac{q-ip}{2}\frac{1}{\lambda^2}.$$

Здесь достаточно заменить i через $-i$ и написать μ вместо $-\frac{1}{\bar{\lambda}}$, чтобы тотчас получить выражение (25′).

Заметим, наконец, что поставленная задача сведена к разысканию двух или даже только одного решения уравнения Риккати; но этим она отнюдь не исчерпана, ибо интегрировать это уравнение мы вообще не умеем. Но имеет место следующее свойство: если каким-либо образом удалось разыскать одно, два или три частных решения этого уравнения, то общий интеграл можно выразить соответственно двумя квадратурами, одной квадратурой или в конечном виде.

25. Переходим теперь к случаю свободного движения твердого тела. Мы предположим, что оба характеристических вектора v_0 и $\bar{\omega}$ заданы в функции времени, т. е. что заданы их компоненты u, v, w и p, q, r, которые мы все предполагаем конечными, непрерывными и допускающими производные.

Что касается девяти направляющих косинусов α_i, β_i, γ_i, определяющих ориентацию осей одного триэдра относительно другого, то о них можно повторить без каких бы то ни было существенных изменений все, что было сказано в предыдущем параграфе; мы можем поэтому считать их уже определенными, так

[1]) Яков Риккати (Jacopo Riccati) родился в Венеции в 1676 г., умер в Тревизо в 1754 г.; он занимался математикой частным образом, не занимая никаких официальных постов. Правительство Венецианской республики часто консультировало с ним по вопросам гидравлики. Уравнение, носящее его имя, было им опубликовано в лейпцигских „Acta Eruditorum“ в 1722 г.

что остается только разыскать функцию $O(t)$, т. е. установить движение точки O.

Но скорость $\boldsymbol{v}_0$ точки O, по предположению, имеет компоненты u, v, t, заданные в функции времени. С другой стороны, компоненты той же скорости по осям неподвижного триэдра выражаются производными неизвестных координат α, β, γ точки O; мы получаем поэтому в обычных обозначениях уравнения:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w,$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 w,$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma_1 u + \gamma_2 v + \gamma_3 w;$$

и так как правые части суть известные нам функции от t, то определение неизвестных функций α, β, γ требует только квадратур.

26. Прибавим еще несколько слов о решении той же задачи в другом ее виде, когда векторы $\boldsymbol{v}_0$ и $\overline{\omega}$ заданы своими компонентами, отнесенными к неподвижным осям.

В этом случае установлению движения точки O нет необходимости, как выше, предпосылать определение направляющих косинусов α_i, β_i, γ_i. В самом деле, поскольку среди данных задачи уже фигурируют компоненты скорости $\boldsymbol{v}_0$ по неподвижным осям, нам известны производные координат α, β, γ в функции времени.

Что касается определения взаимной ориентации одного триэдра относительно другого, то мы к этому приходим совершенно так же, как выше, обращая только роль каждого из двух триэдров. Теперь вспомогательным вектором $\boldsymbol{u}$, с которым мы имели дело в рубр. 22—24, будет служить вектор, неразрывно связанный с нашим твердым телом; диференциальные уравнения задачи мы получим, проектируя на оси неподвижного триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$ обе части тождества

$$\frac{d_a \boldsymbol{u}}{dt} = [\overline{\omega} \boldsymbol{u}],$$

к которому в настоящем случае приводится соотношение (13) рубр. **10**, так как $\boldsymbol{u}$ представляет собой постоянный вектор относительно подвижных осей.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Пусть T_0 будет некоторый триэдр, относительно которого совершают движения триэдры T_1, T_2, T_3, ..., T_n. Обозначим через P точку, которая движется неразрывно с триэдром T_n. Пусть M_i ($i = 1,2,3,\ldots, n$) будет движение, которое точка P совершала бы относительно триэдра T_{i-1}, если бы она была связана твердой связью с триэдром T_i[1]. Движение точки P относительно среды T_0 совпадает с движением, составленным из движений $M_1, M_2, \ldots, M_n$ (III, рубр. **10**).

---

[1] Т. е. движение точки, имеющей в каждый момент скорость той точки среды T_i, с которой в этот момент совпадает точка P. (*Ред.*)

2. В первом приближении можно считать движения планет относительно солнца и спутников относительно планет круговыми и равномерными.

При таком допущении требуется определить гелиоцентрическое движение (т. е. движение относительно солнца) луны и геоцентрическое движение любой планеты (т. е. движение планеты, каким оно представляется наблюдателю, находящемуся на земле).

3. Закрытый автомобиль имеет с боков по окну, каждое по 30 *см* в ширину; расстояние между плоскостями окон составляет 1,6 *м*. На ходу автомобильные окна пробивает ружейная пуля; она входит в автомобиль через центр одного окна и выходит из него у края другого окна. Определить скорость автомобиля, если пуля прошла через него горизонтально с (абсолютной) постоянной скоростью в 200 *м/сек*.

4. С курьерского поезда горизонтально брошен камень в стенку товарного поезда, идущего в противоположном направлении по параллельным рельсам. Скорость курьерского поезда составляет 78 *км/час*, скорость товарного 30 *км*. Скорость, сообщенная камню нормально к направлению движения, составляет 10 *м/сек*. Принимая, что сила удара пропорциональна квадрату скорости (ударяющего тела относительно ударяемого), показать, что в указанных условиях удар, произведенный брошенным камнем, будет в 10 раз сильнее, чем это имело бы место, если бы камень был пущен неподвижно стоящим человеком в неподвижный же вагон.

5. Точка движется прямолинейно и равномерно. Исследовать, каким представляется это движение с триэдра, равномерно вращающегося вокруг постоянной оси, перпендикулярной к (абсолютной) траектории точки.

6. При всякой правильной прецессии (см. рубр. 15—18) имеют место соотношения:

$$\omega = \left|\sqrt{\mu^2+\nu^2+2\mu\nu\cos\theta}\right|,$$

$$\sin\alpha = \frac{|\nu|}{\omega}, \quad \sin\beta = \frac{|\mu|}{\omega},$$

где ω—угловая скорость (абсолютная) тела, α и β — половины углов при вершине обоих круглых конусов Пуансо (соответственно подвижного и неподвижного).

7. Показать, что конус L правильной прецессии Земли (рубр. 19—20) пересекает поверхность земного шара по окружности, радиус которой не превышает 30 *см* (при вычислении можно считать Землю шаром радиусом в 6000 *км*.) Нагляднее: северный полюс оси вращения земли удален от географического полюса меньше, чем на 30 *см*.

8. Пусть O будет светящаяся точка, испускающая во все стороны лучи света, которые распространяются с постоянной (скалярной) скоростью C относительно среды референции (*эфир* классической оптики). Пусть P будет материальная точка, движущаяся с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}$ относительно той же среды. Обозначим через $\boldsymbol{u}$ версор направления OP. Наблюдатель, находящийся в точке P (по взглядам классической оптики), приписывает лучу света, приходящему к нему из точки O, не скорость (абсолютную), выражаемую вектором $c\boldsymbol{u}$, но (относительную) скорость $c\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$.

Установив это, предположим, что нам заданы c, $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{u}$; допущение, что вектор $\boldsymbol{u}$ фигурирует среди данных задачи, получает осуществление, когда точка O может считаться бесконечно удаленной, например, если это — неподвижная звезда.

Вычислить угол *аберрации* χ между абсолютным лучом и относительным, т. е. между $c\boldsymbol{u}$ и $c\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$; показать, в частности, что при v, весьма малом по сравнению с c,

$$\chi = \frac{v}{c}\sin\theta,$$

где θ — угол между $\boldsymbol{v}$ и $c\boldsymbol{u}$.

Если отождествить $\boldsymbol{v}$ со скоростью движения земли по своей орбите, то мы отсюда получим объяснение *астрономической аберрации*.