ГЛАВА VI.

Общие основания кинематики системы.

1. Голономные системы и их возможные перемещения.

1. Помимо твердых фигур, которые с кинематической точки зрения представляют наиболее простой тип систем точек, ежедневный опыт представляет неисчислимое количество примеров изменяемых систем, которые в условиях движения подвергаются сгибаниям, растяжениям, сжатиям и т. п. При этом иногда оказывается, что движение некоторых точек системы определяет движение всех остальных; так, это имеет место, например, для твердых систем, движение которых определяется каждый раз движением трех точек, не расположенных на одной прямой; очень часто случается, что движения некоторых точек системы ограничивают свободу движения остальных.

Мы приходим, таким образом, к изучению движения таких систем, для которых во все время движения имеют место некоторые определенные соотношения между кинематическими признаками их (между их положениями, скоростями, ускорениями и т. д.). В частности, особенно замечательны такие системы, в которых эти ограничения связывают исключительно одновременные положения различных точек. В качестве наиболее простых случаев укажем точку, движение которой связано таким образом, что она должна двигаться по данной кривой или по данной поверхности; таково движение точки, бесчисленные положения которой зависят от одного или двух параметров:

$$P = P(q) \quad \text{или} \quad P = P(q_1, q_2), \tag{1}$$

где параметром q может служить, например, длина дуги данной кривой, отсчитываемая от определенной точки; параметрами q_1, q_2 могут служить криволинейные координаты, каким-либо образом определенные на заданной поверхности.

Если же эта кривая или поверхность — геометрическое место бесчисленного множества возможных положений точки — изменяется от момента к моменту, то вместо уравнения (1) данная точка связана уравнением вида:

$$P = P(q \mid t) \qquad \text{или} \qquad P = P(q_1, q_2 \mid t).$$

Становясь на более общую точку зрения, мы рассмотрим здесь систему произвольного числа N точек P_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, N$), которые не могут передвигаться свободно независимо одна от другой, но связаны таким образом, что положения их определяются функциями некоторого числа n произвольных параметров $q_1, q_2, \ldots, q_n$, а иногда и времени:

$$P_i = P_i (q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t). \tag{2}$$

Если x_i, y_i, z_i суть координаты точки P_i относительно координатного триэдра системы, геометрические уравнения (2) развертываются в эквивалентные им $3N$ уравнения:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i \,(q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t) \\ y_i &= y_i \,(q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t) \\ z_i &= z_i \,(q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, N), \tag{2'}$$

правые части которых представляют собою $3N$ функций от аргументов $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$, а иногда и от t; мы будем предполагать, что эти функции в пределах определенной области значений их аргументов однозначны, конечны, непрерывны и допускают производные по крайней мере первого и второго порядка.

Связанная таким образом система точек называется *голономной* [1]; если при этом в уравнениях (2) или (2′) время t не фигурирует, то говорят, что *связи не зависят от времени*. Произвольные параметры $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ называются *общими или лагранжевыми* координатами системы.

2. В заданный момент времени, т. е. для данного значения t уравнения (2) и (2′), при изменении параметров $q_1, q_2, \ldots, q_n$ в области их значений, дают всевозможные *конфигурации* системы в рассматриваемый момент, т. е. всевозможные руппы N точек пространства, в которых в этот момент могут быть помещены N точек системы. Подробнее: каждой системе значений $q_1, q_2, \ldots, q_n$ отвечает одна конфигурация точек системы; всевозможным комбинациям этих значений (в области, в которой они изменяются) соответствуют всевозможные при этих связях конфигурации системы. Если связи зависят от времени, то конфигурации, которые возможны в один момент t_1, вообще говоря, не совпадают с конфигурациями, возможными в другой момент t_2. Всевозможные значения n параметров $q_1, q_2, \ldots, q_n$ допускают ∞^n комбинаций; соответственно этому количество конфигураций голономной системы в определенный момент не превышает ∞^n, оно составляет именно ∞^n в том и только в том случае, когда с любым изменением координат q_n изменяется и соответствующая конфигурация; а для того, чтобы это имело

---

[1]) Это название, происходящее от греческих слов ὅλος (целый), и νόμος (закон), указывает на то обстоятельство, что такого рода связь, как мы это лучше выясним в рубр. **4**, разрешается в конечное число уравнений между координатами точек. Этот термин был введен знаменитым физиком и математиком Герцом (H. Hertz) (родился в Гамбурге в 1857 г., умер в Бонне в 1894 г.), который первый экспериментально воспроизвел электрические волны.

место, необходимо и достаточно, чтобы уравнения (2) разрешались относительно параметров q_n, т. е., как известно из анализа, чтобы якобиева матрица

$$\left\| \frac{\partial x_1}{\partial q_h}, \frac{\partial y_1}{\partial q_h}, \frac{\partial z_1}{\partial q_h}, \ldots, \frac{\partial x_N}{\partial q_h}, \frac{\partial y_N}{\partial q_h}, \frac{\partial z_N}{\partial q_h} \right\| \quad (h = 1, 2, 3, \ldots, n) \qquad (2'')$$

имела ранг n.

Когда это последнее обстоятельство имеет место, то говорят, что n есть *число степеней свободы* системы или что система имеет n *степеней свободы*. Таким образом можно сказать, что число степеней свободы голономной системы есть число *существенных* или *независимых параметров*, от которых в момент *общего характера* [1]) зависят ее конфигурации.

Обыкновенно, когда говорят о лагранжевых координатах голономной системы, то предполагают, что эти координаты все существенны, т. е., что число их равно числу степеней свободы системы. Здесь следует отметить, что в выборе лангранжевых координат остается большой произвол: вместо определенных n координат, можно взять n других, связанных с первоначальными какими угодно n уравнениями:

$$q'_k = q'_k\,(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

при том, однако, условии, чтобы функциональный определитель

$$\left\| \frac{\partial q'_k}{\partial q_h} \right\| \qquad (h, k = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

не обращался тождественно в нуль в области значений параметров.

3. В течение всякого своего движения голономная система постепенно проходит через конфигурации, соответствующие последовательным моментам; поэтому движение будет определено, если лагранжевы координаты системы будут заданы в функции времени. Уравнения

$$q_h = q_h(t) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

которыми это выражается, называются *путевыми уравнениями* движения в лагранжевых координатах.

Для выражения состояния системы, т. е. скоростей v_i отдельных ее точек P_i, нужно продиференцировать уравнение (2), принимая во внимание, что параметры представляют собой функции времени

$$v_i = \frac{dP_i}{dt} = \frac{\partial P_i}{\partial t} + \sum_1^n{}_h \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \dot{q}_h \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, N). \qquad (3)$$

---

[1]) Авторы часто употребляют термин „istante generico", „общий момент", „момент общего характера", разумея под этим такой момент, в который не создается каких-либо исключительных условий или положений. Так, например, в применении к данному случаю это означает следующее: ранг матрицы (2'') вообще равен n; но в отдельных точках вследствие уничтожения определителей n-го порядка он может снижаться; момент „общего характера"— это такой момент, в который такое снижение не имеет места. (*Ред.*)

Следует остановиться на важном частном случае голономных систем с одной степенью свободы и со связями, не зависящими от времени; в системах этого рода конфигурации зависят от одного единственного лагранжева параметра (не зависят от t):

$$P_i = P_i(q) \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, N).$$

Для такой системы, как говорят „с полной системой связей", траектории всех ее точек известны a priori, определению подлежит единственное путевое уравнение:

$$q = q\,(t),$$

т. е. закон движения во времени, по которому точки системы пробегают свои траектории.

4. Если матрица (2″) имеет ранг n, то, исключив n лагранжевых координат из $3N$ скалярных уравнений (2′), получим ровно $3N-n$ независимых уравнений относительно x_i, y_i, z_i:

$$f_k\,(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N \,|\, t) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, 3N-n), \quad (4)$$

которые могут содержать время t, но могут его и не содержать; эти уравнения выражают аналитически те соотношения, которые связывают одновременные положения системы; они называются *уравнениями связей*, а короче, просто *связями*. Их число выражается разностью $3N-n$ между числом декартовых координат точек системы и числом лагранжевых координат (т. е. числом степеней свободы).

Обратно, если на систему N точек P_i налагается условие, чтобы координаты x_i, y_i, z_i этих точек удовлетворяли определенному числу l уравнений вида (4), то это система голономная. В самом деле, разрешая уравнения (4), которые мы предполагаем независимыми, относительно l из числа $3N$ координат x_i, y_i, z_i, и принимая остальные $3N-l$ координат за лагранжевы параметры, мы получим как раз систему уравнений вида (2′). Отметим, что число степеней свободы $n = 3N-l$, т. е. равно разности между числом $3N$ декартовых координат точек этой системы и числом связей.

5. **Примеры голономных систем.** Число степеней свободы голономной системы, по определению, равно числу соответствующих (независимых) лагранжевых координат. На практике, когда внимание фиксируется на системе данной материальной структуры, всегда нетрудно непосредственно выяснить, представляет ли она собою голономную систему; для этого достаточно исследовать, определяются ли ее конфигурации в произвольно взятый момент определенным конечным числом независимых параметров. Если это имеет место, то такое число непосредственно определяет число степеней свободы системы. Этот критерий мы применим к некоторым особенно простым типам голономных систем.

Твердая система, движущаяся в плоскости, есть голономная система с 3 степенями свободы: для ее определения достаточно задать 2 параметра, устанавливающие положение одной из ее точек M, и еще 1 параметр, определяющий ориентацию системы относительно M.

Система, состоящая из двух твердых стержней, сочлененных шарниром, имеет в плоскости 4 степени свободы, ибо для опредления положения шарнира требуется 2 параметра, а 2 других определяют ориентации стержней. По таким же соображениям сочлененный плоский четырехсторонник также имеет 4 степени свободы.

6. Стержень, движущийся в пространстве, имеет 5 степеней свободы. В самом деле, чтобы установить конфигурацию такой системы, достаточно знать положение одной из ее точек P и направление стержня; с другой стороны, известно, что нужно 3 параметра для определения положения точки и 2 параметра для определения направления прямой. Отсюда следует также, что число степеней свободы стержня сводится к 2, если точка P остается неподвижной.

Для произвольного твердого тела число степеней свободы такое же, как и для триэдра, т. е. равно 6; 3 параметра нужны для определения начала, а 3 других — для ориентации осей (эйлеровы углы).

Если система имеет при этом неподвижную точку, то число параметров, а следовательно, число степеней свободы, очевидно, сводится к 3. Из предыдущей рубрики следует также, что твердое тело имеет 3 степени свободы и в том случае, если оно должно двигаться параллельно плоскости.

Твердое тело, которое прикреплено к крюку, скользящему по проволоке, имеет 4 степени свободы: 1 для определения положения крюка и 3 для ориентации твердого тела относительно него.

Тело с осью, скользящей по себе самой, имеет только 2 степени свободы: одну для установления смещения оси, определяя таковое расстоянием некоторой подвижной ее точки от неподвижной, а другую—для ориентации твердого тела вокруг самой оси.

Наконец, твердое тело C, которое должно постоянно соприкасаться в одной точке с другим твердым телом C_1, имеет 5 степеней свободы. В самом деле, 2 параметра необходимы для определения точки соприкосновения на поверхности тела C и 2 — для определения ее положения на поверхности тела C_1; с другой стороны, если исключим случаи, когда соприкосновение происходит в особенной точке поверхности, то нужен еще только 1 параметр для ориентации одного тела относительно другого вокруг общей их нормали.

Закончим, наконец, определением числа степеней свободы велосипеда, стоящего на плоскости дороги [1]). Для определения

[1]) При этом мы оставляем в стороне связи *не голономные*, которые, как увидим в следующем параграфе, нужно было бы учесть, если бы колеса должны были (по крайней мере в нормальных условиях) катиться без скольжения.

положения рамы необходимы 4 параметра: 2 для определения положения какой-нибудь точки следа на плоскости дороги, 1 для определения направления этого следа и 1 для определения наклона рамы; 2 дальнейших параметра необходимы для определения положения переднего колеса; положения заднего колеса, цепи и руля зависят только от 1 параметра. Наконец, 2 параметра необходимы для определения положения педалей; таким образом число степеней свободы достигает 9.

7. Все голономные системы, рассмотренные в рубр. 5 и 6, представляют собою твердые тела или твердые части, различным образом скрепленные между собою. Другие типы систем, с которыми нам приходится встречаться в ежедневной практике, неголономны, как, например, совершенно гибкая нить, которую можно изогнуть по любой кривой. Совершенно ясно, что мы не можем локализировать все точки такой нити при помощи конечного числа параметров.

С другой стороны, даже системы твердые или составленные из твердых частей часто могут быть неголономными, если они подчинены связям, зависящим не только от взаимного положения точек, но и от соответствующих скоростей. В таких условиях, как мы увидим в рубр. 12, находится твердый шар, который должен катиться по плоскости без скольжения.

8. **Избыточные лагранжевы координаты.** Если голономная система S, определяемая независимыми лагранжевыми координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и имеющая поэтому n степеней свободы, подвергается действию новых голономных связей, то это получает выражение в том, что параметры q_n связываются одним или несколькими уравнениями:

$$f_k(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n|(t) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, l'), \tag{4'}$$

которые мы можем предполагать независимыми друг от друга; время t может входить в эти уравнения, может и не входить. Новая система S', которую мы, таким образом, получаем, все еще будет голономной. Число степеней ее свободы сводится к $n-l'$; это становится ясным, если заметим, что из уравнения (4') можно выразить l' параметров q_n через остальные $n-l'$, и эти последние или $n-l'$ независимых функций от них можно принять за лагранжевы координаты системы S'.

Но в такого рода случаях, особенно когда первоначальные параметры q_n имеют и для системы S' отчетливое геометрическое значение, часто бывает все же целесообразно сохранить те же координаты q_n также для системы S'; конечно, они теперь уже не будут независимыми, а будут постоянно связаны уравнениями (4'). В этом случае параметры q_n называются *избыточными* лагранжевыми координатами.

В частности, для всякой голономной системы, состоящей из N точек, можно принять их декартовы координаты $x_i, y_i, z_i (i = 1, 2, 3, \ldots, N)$ за $3N$ избыточных координат; если число степеней есть n, то эти координаты связаны между собой (а иногда и с временем) $l = 3N - n$ уравнениями (ср. рубр. 4) вида:

$$f_k(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N \mid t) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, l).$$

9. Возможные перемещения голономной системы. Свободная точка P может в каждый определенный момент t подвергнуться совершенно произвольному (элементарному или бесконечно малому) перемещению $dP = vdt$ от своего начального положения.

В самом деле, каков бы ни был заданный вектор v, мы всегда можем представить себе равномерное прямолинейное движение

$$\overline{P_0P} = v\ (t - t_0)$$

или любое другое движение, уравнение которого получается прибавлением ко второй части слагаемого вида $(t - t_0)^2 c$, где c есть произвольный вектор (хотя бы даже зависящий от времени). При этом движении точка P получит за бесконечно малый промежуток времени вышеуказанное элементарное смещение.

Но совершенно ясно, что связанная точка или связанная система точек лишена такой абсолютной свободы перемещения. Если движущаяся голономная система в момент t приняла определенную конфигурацию (одну из возможных для нее в этот момент), то в следующий элемент времени $t + dt$ она может перейти только в такую другую конфигурацию, которая для нее допустима в момент $t + dt$. Всякое бесконечно малое смещение голономной системы, которое переводит ее из какой-либо конфигурации C, возможной для нее в момент t, в конфигурацию C', возможную для этой системы в момент $t + dt$, называется *возможным перемещением* этой системы от исходной конфигурации C в момент t.

Положим, что голономная система N точек определена параметрическими уравнениями:

$$P_i = P_i\ (q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n \mid t) \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, N). \tag{2}$$

В произвольный момент она может занимать любое положение C, соответствующее произвольно выбранным значениям параметров q_h. Любая конфигурация C', сколь угодно близкая к C, в последующий момент $t + dt$ может быть получена, если мы дадим координатам q_h и времени t произвольные, друг от друга независящие наращения dq_h и dt. Выражая явно перемещения отдельных точек dP_i, будем иметь:

$$P_i + dP_i = P_i(q_1 + dq_1, q_2 + dq_2, \ldots, q_n + dq_n \mid t + dt).$$

Развертывая правые части в ряды, почленно вычитая соответствующие уравнения (2) и отбрасывая члены порядка выше первого, получим:

$$dP_i = \frac{\partial P_i}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial P_i}{\partial q_2} dq_2 + \ldots + \frac{\partial P_i}{\partial q_n} dq_n + \frac{\partial P_i}{\partial t} dt. \tag{5}$$

Это и есть аналитическое выражение наиболее общего возможного перемещения системы в момент t (исходящего от конфигурации с координатами q_h); бесконечно малые наращения dq_h и dt рассматриваем как совершенно независимые друг от друга.

Теперь рассмотрим случай голономной системы, отнесенной к избыточным лагранжевым координатам. Положения ее точек попрежнему выражаются уравнениями (2); но координаты этом случае связаны l' независимыми уравнениями (4); эти последние в момент $t+dt$ будут иметь вид:

$$f_k(q_1+dq_1, q_2+dq_2+\ldots+q_n+dq_n \,|\, t+dt)=0 \ (k=1, 2, \ldots, l');$$

развертывая левые части в ряды, вычитая почленно соответствующие уравнения (4′) и опуская члены порядка выше первого, получим:

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial f}{\partial q_2}dq_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial q_n}dq_n+\frac{\partial f}{\partial t}dt=0 \ (k=1, 2, \ldots, l'). \quad (6)$$

Мы заключаем отсюда, что в этом случае избыточных координат наиболее общее перемещение системы в момент t выражается также уравнениями (5), но бесконечно малые наращения $dq_1, dq_2, \ldots, dq_n$ и dt в этом случае уже не являются независимыми,—напротив, они связаны l' уравнениями (6). Отсюда вытекает, что при данных значениях t и всех q_h (т. е. в данный момент, при данной исходной конфигурации) и при данном dt независимыми остаются только $n-l'$ наращений dq_h (т. е. столько, сколько в этом случае есть степеней свободы); остальные же наращения dq_h уже определяются в зависимости от них уравнениями (6).

В частности, если за избыточные координаты системы примем декартовы координаты ее точек, а уравнения связи имеют вид

$$f_k(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N \,|\, t)=0 \qquad (k=1, 2, \ldots, l), \quad (4)$$

то компоненты dx_i, dy_i, dz_i по осям перемещения каждой отдельной точки P_i при любом возможном перемещении системы характеризуются уравнениями:

$$\sum_1^N{}_i\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial f_k}{\partial y_i}dy_i+\frac{\partial f_k}{\partial z_i}dz_i\right)+\frac{\partial f_k}{\partial t}dt=0 \quad (k=1, 2, \ldots, l). \quad (4')$$

2. Неголономные системы.

10. Из последнего замечания предыдущей рубрики следует, что в тех случаях, когда на голономную систему, выраженную в независимых лагранжевых координатах $q_1, q_2, \ldots, q_n$, налагается дальнейшая голономная связь:

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_n \,|\, t)=0, \quad (6')$$

это влечет за собой во всякий момент ограничение не только для конфигураций системы, но и для возможных ее перемещений.

Это последнее ограничение выражается уравнением:

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} dq_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial q_n} dq_n + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0. \qquad (7)$$

Разделив его па dt, мы придадим ему вид:

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial f}{\partial q_3}\dot{q}_3 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \qquad (7')$$

Это последнее уравнение представляет собой линейную зависимость (неоднородную, если связь зависит от времени) между производными $\dot{q}_n$, т. е. так называемыми *скоростями* системы в отношении лагранжевых координат. Вообще, можно сказать, что каждая голономная связь налагает на систему также *связь подвижности*. Это замечание ведет к новому обобщению, которое имеет не только теоретическое значение, но и реализуется на практике, как мы это увидим ниже (рубр. 12). Обобщение это заключается в том, что можно вводить также связи подвижности, непосредственно выражаемые уравнениями типа:

$$\sum_1^n {}_h a_h dq_h + b\,dt = 0, \qquad (8)$$

или по разделении на dt:

$$\sum_1^n {}_h a_h \dot{q}_h + b = 0, \qquad (8')$$

где a_h и b суть функции координат q_h, а иногда и t; при этом предполагается, что уравнение (8) не может быть выведено путем диференцирования уравнения вида (6).

Очевидно, всякое соотношение вида (8) само по себе [независимо от того, получается ли оно диференцированием из конечного уравнения (6) или нет] не налагает никаких ограничений на самое положение системы; тем более можно считать обоснованным присвоенное такому соотношению название связи подвижности.

В качестве дальнейшего обобщения можно было бы представить себе еще более сложные связи подвижности, например нелинейные зависимости между производными $\dot{q}_h$ или же добавочные члены, содержащие производные от q_h порядка более высокого, чем первый; но до сих пор неизвестны *конкретно осуществимые* материальные системы такого типа [1]).

Всякая связь подвижности (8), рассматриваемая сама по себе (т. е. независимо от того, выводится ли она путем диференцирования из конечного уравнения или нет), называется *неголономной*. В форме (8) она называется *однородной* в том случае, если функция b тождественно равна 0, и *неоднородной* — в противном слу-

[1]) См. по этому вопросу *Delassus*, Leçons sur la dynamique des systèmes matériels, Paris, Hermann, 1913.

чае. Вместе с тем всякая система, подчиненная одной или нескольким неголономным связям, также называется *неголономной*.

В общем, небесполезно будет еще раз отметить, что существенная разница между голономными и неголономными связями коренится в том, что последние не налагают никаких ограничений на конфигурацию системы, но устанавливают только ограничение для возможных ее перемещений, т. е. вводят ограничения ее подвижности.

Отметим, наконец, что система называется *совершенно неголономной* или *собственно неголономной*, если связи вида (8′), которым она подчинена, таковы, что не только ни одно из уравнений (8′) не может быть получено диференцированием одного конечного уравнения между параметрами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, но вообще не существует ни одного уравнения вида:

$$F(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n \mid t) = 0, \tag{9}$$

диференцируя которое мы получили бы соотношение между диференциалами, удовлетворяющееся тождественно в силу уравнений (8), т. е. представляющее собой линейную комбинацию их [1]).

11. Соображения предыдущей рубрики, естественно, могут найти себе приложения и в том случае, когда система отнесена к декартовым координатам. Как уже было отмечено в рубр. 9, всякая голономная связь вида (4) устанавливает зависимость между компонентами dx_i, dy_i, dz_i элементарных смещений dP_i отдельных точек системы; это соотношение имеет вид (4′), т. е. имеет линейную, в наиболее общем случае неоднородную, форму. Тот же линейный характер в более общей форме имеет и всякая неголономная связь, которая поэтому может быть написана в форме:

$$\sum_{1}^{N}{}_i (a_i' \, dx_i + a_i'' \, dy_i + a_i''' \, dz_i) = b \, dt,$$

где a_1', a_1'', a_1''', суть данные функции координат, а иногда и времени. Поэтому, если введем N векторов a_i с компонентами a_1', a_1'', a_1''', то предыдущему соотношению можно придать вид:

$$\sum_{1}^{N}{}_i \, a_i \, dP_i = b \, dt,$$

или, в более сжатой форме:

$$B(dP) = b \, dt.$$

---

[1]) Припомним, что голономная система, по определению, может в любой момент принимать любую доступную ей в этот момент конфигурацию; поэтому конечное соотношение, способное заменить одно из уравнений (8′), непременно должно содержать произвольные постоянные, располагая которыми можно удовлетворить уравнению в любой момент, при любой конфигурации.

Здесь B представляет собой линейный оператор относительно элементарных смещений dP. Разделяя обе части этого равенства на dt, получим:

$$B(v) = b;$$

это, очевидно, есть декартова форма любого соотношения (8′).

12. Пример совершенно неголономной системы. Таковой является, как мы уже упомянули в рубр. 7, твердая сфера S, поставленная в такие условия, что она должна катиться по неподвижной плоскости *без скольжения*.

Чтобы это доказать, дадим этой связи формальное выражение. За плоскость, по которой сфера катится, примем плоскость $\zeta = 0$ координатного триэдра и направим ось ζ в ту сторону, в которой лежит сфера S; третья координата центра O сферы будет поэтому постоянно равна ее радиусу R. Чтобы определить положение сферы, будет, очевидно, достаточно, во-первых, установить первые 2 координаты α и β центра O, или,—что то же,—точки соприкосновения C сферы S с плоскостью $\zeta = 0$, а во-вторых, установить ориентацию некоторого триэдра, неразрывно связанного со сферой, относительно неподвижного триэдра; за начало подвижного триэдра примем центр O; если θ, φ и ψ суть эйлеровы углы (III, рубр. 29—31), ориентирующие подвижную сферу, то лагранжевыми координатами нашей системы будут служить 5 параметров:

$$\alpha, \ \beta, \ \theta, \ \varphi, \ \psi.$$

Каждой системе значений этих параметров отвечает вполне определенное положение сферы в ее соприкосновении с плоскостью (конфигурация системы); если же 5 координат положить равными произвольно взятым функциям времени и сверх того припомнить, что $\gamma = R$, то мы получим конечные уравнения движения сферы S, постоянно касающейся плоскости $\zeta = 0$. Но это движение, вообще говоря, не будет чистым качением; напротив того, оно будет сопровождаться некоторым скольжением сферы по плоскости.

В самом деле, представим себе произвольное элементарное перемещение сферы от момента t до момента $t + dt$. Как мы знаем (III, рубр. 32), если мы за центр приведения примем точку (мгновенного) соприкосновения C сферы с плоскостью, то это движение слагается из бесконечно малого вращения вокруг прямой, выходящей из C, и некоторого элементарного поступательного смещения; поскольку соприкосновение сферы с плоскостью поддерживается во все время движения, это поступательное смещение непременно должно произойти параллельно этой плоскости. Чтобы имело место чистое вращение, необходимо и достаточно, чтобы это поступательное смещение было равно нулю во все время движения; это означает, что во все время движения должна быть равна нулю скорость v_C точки соприкосновения C, которая вообще меняет свое положение как на неподвижной плоскости, так и на сфере.

Самое разложение выражается формулой:

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_0 + [\bar{\omega}\,\overline{OC}] = 0,$$

где $\boldsymbol{v}_0$ и $\bar{\omega}$ суть характеристические векторы движения сферы относительно центра O.

Чтобы придать этому векториальному уравнению декартову форму, заметим, что оба вектора v_0 и $[\bar{\omega}\,\overline{OC}]$ параллельны неподвижной плоскости $\zeta = 0$: первый потому, что он представляет скорость центра O, который движется параллельно этой плоскости, второй же, по определению, перпендикулярен к вектору $\overline{OC}$, который, в свою очередь, перпендикулярен к той же плоскости.

Поэтому предыдущее векторное уравнение, будучи спроектировано на неподвижные оси, приводит только к двум скалярным уравнениям, соответствующим неподвижным осям ξ и η. Заметим теперь, что компоненты вектора v_0 по неподвижным осям суть $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, 0; если поэтому обозначим через π, χ, ρ компоненты угловой скорости $\bar{\omega}$ по неподвижным осям, то эти два уравнения примут вид:

$$\dot{\alpha} - R\chi = 0, \qquad \dot{\beta} + R\pi = 0. \tag{10}$$

Таковы уравнения *связи чистого качения*. Чтобы придать им раскрытую форму, припомним (III, рубр. 32), что

$$\left.\begin{aligned} \pi &= \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi, \\ \chi &= \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi; \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

эти выражения нужно было бы подставить в уравнения (10), чтобы получить связь качения в явной форме. Но чтобы обнаружить, что эта связь совершенно неголономная, достаточно принять во внимание, что из уравнений (11) следует:

$$\frac{\partial\pi}{\partial\psi} = -\chi, \qquad \frac{\partial\chi}{\partial\psi} = \pi. \tag{12}$$

В самом деле, нужно обнаружить, что не может существовать никакое конечное соотношение вида (7) между лагранжевыми координатами α, β, θ, φ и ψ и временем, диференцируя которое по времени мы могли бы получить результат, удовлетворяющийся тождественно в силу уравнений (10). Однако, если бы такое соотношение существовало, то оно неизбежно должно было бы содержать α или β; в самом деле, в противном случае, диференцируя его относительно t, мы получили бы линейную зависимость (иногда неоднородную) между производными $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$; между тем, даже при наличии уравнения (10) эти производные не зависят друг от друга. Мы можем поэтому ограничиться исследованием, возможно ли такое соотношение, которое явным образом содержит β, а потому может быть представлено в виде:

$$\beta = f(\alpha, \theta, \varphi, \psi | t). \tag{13}$$

Диференцируя это уравнение по t, получаем:

$$\dot{\beta} = \frac{\partial f}{\partial \alpha}\dot{\alpha} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\dot{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial \psi}\dot{\psi} + \frac{\partial f}{\partial t};$$

это уравнение должно было бы удовлетворяться тождественно для всех возможных значений α, β, θ, φ, ψ, $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ и t в области, в которой имеет место соотношение (13), коль скоро мы подставили бы вместо $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$ их выражения (10). Иными словами, *должно было бы иметь место тождество*:

$$-R\pi = \frac{\partial f}{\partial \alpha}R\chi + \frac{\partial f}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\dot{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial \psi}\dot{\psi} + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{14}$$

Между тем, продиференцировав это соотношение по $\dot{\psi}$, мы пришли бы к тождеству:

$$\frac{\partial f}{\partial \psi} = 0,$$

так как ни одна из функций π, χ и f не зависит от этой переменной. Отсюда следует, что f не может зависеть от ψ. Диференцируя теперь уравнение (14) по ψ и учитывая соотношение (12), мы пришли бы к тождеству:

$$R\chi = R\frac{\partial f}{\partial \alpha}\pi.$$

Заменяя здесь χ и π их выражениями (11), мы расщепили бы в силу независимости $\dot{\theta}$ и $\dot{\varphi}$ это *уравнение на два других*:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}\sin\psi - \cos\psi = 0, \qquad \sin\psi + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\cos\psi = 0,$$

которые во всяком случае друг другу противоречат.

Таким образом установлено, что связь, требующая чистого качения сферы по плоскости, неголономна в собственном смысле слова.

13. Подставляя в уравнение (10) вместо π и χ их выражения (11), мы получаем два линейных *однородных* уравнения, связывающих производные $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ лагранжевых координат; мы можем поэтому сказать, что случай, рассмотренный в предыдущей рубрике, представляет собою пример *однородной* неголономной связи.

Но отсюда легко перейти, слегка изменяя условия, к примеру неоднородной связи, также неголономной.

Возьмем снова твердую сферу S предыдущей рубрики, но предположим, что твердая плоскость, по которой сфера должна катиться без скольжения, также движется в пространстве; для простоты мы ограничимся случаем, когда это движение плоскости являетс поступательным и имеет скорость $\bar{\tau}$ с компонентами τ_1, τ_2, τ_3 относительно обычных осей ξ, η, ζ. Оставаясь при обозначениях предыдущей рубрики, мы получим, что центр сферы O, который должен оставаться на расстоянии R от опорной плоскости, уже не сохраняет постоянной координату γ; напротив того, она выражается формулой:

$$\gamma = R + \int_{t_0}^{t} \tau_3 dt.$$

Если попрежнему обозначим через C точку соприкосновения сферы с опорной плоскостью, то условия чистого качения сферы можно будет выразить тем, что скорость точки C на сфере:

$$v_C = v_0 + [\overline{\omega}\ \overline{OC}]$$

должна совпадать со скоростью $\bar{\tau}$ той же точки на плоскости, так что

$$v_0 + [\overline{\omega}\ \overline{OC}] = \bar{\tau}.$$

С другой стороны, так как первые две компоненты левой части выражаются, как в предыдущей рубрике, через $\dot{\alpha} - R\chi$, $\dot{\beta} + R\pi$, а третья $\dot{\gamma} = \tau_3$, то это векторное уравнение, будучи спроектировано на оси координат, даст одно тождество и два уравнения:

$$\dot{\alpha} - R\chi = \tau_1, \quad \dot{\beta} + R\pi = \tau_2.$$

В силу соотношений (11) эти два линейные уравнения неоднородны относительно $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$; отсюда мы заключаем, что типичный пример неголономной и неоднородной связи представляет качение одного твердого тела по другому, движущемуся по определенному предуказанному закону.

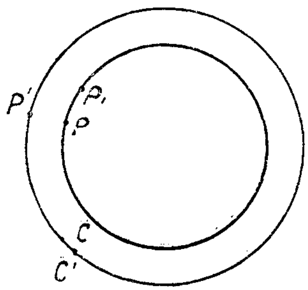
3. Виртуальные перемещения.

14. Голономные виртуальные перемещения системы. Как увидим ниже, в механике часто существенно важно, кроме действительно возможных перемещений голономной системы, рассматривать некоторые воображаемые перемещения, которые способны перевести систему из одной ее конфигурации в другую, бесконечно близкую, но *относящуюся к тому же моменту*. Всякое такого рода перемещение называется *виртуальным перемещением* [1]) голономной системы.

[1]) Это понятие, несколько своеобразное, но чрезвычайно важное, повидимому, нуждается в несколько более обстоятельном пояснении. Положим, что система S в момент t занимает некоторую возможную в этот момент при существующих связях конфигурацию P. Пусть P_1 будет конфигурация, бесконечно близкая к P и возможная в *тот же* момент τ. Перемещение системы S из конфигурации P в P_1 и называют *виртуальным перемещением ее*. Возможно ли это перемещение в действительности осуществить? Для этого потребовалось бы некоторое время Δt. Если связь не зависит от времени, то

Если связи не зависят от времени, как это например, имеет место для твердых систем, то возможные конфигурации системы во всем их комплексе, по существу, остаются теми же во все последовательные моменты; таким образом всякое виртуальное перемещение в то же время является возможным и обратно.

Но если связи зависят от времени, то дело обстоит иначе: конфигурации системы вообще меняются от момента к моменту; виртуальное перемещение, которое переводит систему из одной конфигурации в другую, бесконечно близкую, но относящуюся к тому же моменту (т. е. могущую иметь место только в тот же момент), может не соответствовать действительно осуществимому движению. Иными словами, оно не является действительно возможным перемещением, а только воображаемым.



Фиг. 73.

Представим себе, например, в плоскости точку, подчиненную связи, в силу которой она должна оставаться на окружности, центр которой находится в постоянной точке O, но радиус которой с течением времени постоянно возрастает.

Пусть C и C' будут конфигурации этой окружности в последовательные моменты t и $t+dt$; представим себе точку помещенной в момент t в положение P на окружности C. Возможное перемещение должно будет переместить ее из P в бесконечно близкое положение P' на окружности C'; между тем, виртуальное перенесение должно будет переместить точку P в положение P_1, хотя и бесконечно близкое к P, но расположенное на той же окружности C.

15. Чтобы отличать виртуальные перемещения от возможных, первые обозначаются буквой δ вместо d; таким образом, если система голономна, то виртуальное смещение системы заключается в том, что каждая ее точка P_i претерпевает смещение δP_i, компоненты которого по осям обозначаем через δx_i, δy_i, δz_i.

Рассуждая, как и в случае возможных перемещений, с тем только различием, что время здесь не меняется, мы вычисляем виртуальные перемещения в лагранжевых координатах:

$$\delta P_i = \sum_1^n \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \delta q_h; \quad (i = 1, 2, \ldots, N); \tag{15}$$

конфигурация будет для нашей системы возможна и в момент $t+\Delta t$, поэтому в это новое положение (в эту конфигурацию) ее возможно будет перевести; виртуальное положение будет вместе с тем возможным. Но если связи меняются со временем, то конфигурация P_1 может оказаться для нашей системы в момент $t+dt$ уже невозможной; виртуальное перемещение будет неосуществимо, оно не принадлежит к числу действительно возможных перемещений системы. Это и изложено в тексте в несколько более сжатой форме, но пояснено примером. (*Ред.*)

эти линейные соотношения носят однородный характер в элементарных вариациях (произвольных и независимых) δq_h лагранжевых координат, и эта однородность сохраняется здесь даже в том случае, когда связи зависят от времени.

Остановимся еще на случае, когда координаты q_h избыточны, а ограничения, которым они подчинены, выражаются уравнениями:

$$f_k(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n \mid t) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, l').$$

В этом случае можно рассуждать так же, как в рубр. 9, учитывая только, что теперь необходимо положить $dt = 0$; мы придем к заключению, что и в этом случае возможные перемещения выражаются уравнениями (15), но вариации δq_h теперь уже не являются произвольными и независимыми, а связаны между собою системой l' линейных однородных уравнений:

$$\frac{\partial f_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial f_k}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial f_k}{\partial q_3}\delta q_3 + \ldots + \frac{\partial f_k}{\partial q_n}\delta q_n = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, l').$$

Возвращаясь к случаю, когда лагранжевы координаты q_n независимы, мы можем из однородного и линейного характера уравнения (15) вывести два простых, но весьма важных следствия.

Если некоторым совершенно произвольно выбранным значениям вариаций δq_h в силу соотношений (15) соответствует перемещение δP_i, то те же уравнения дают для вариаций $-\delta q_h$ перемещения $-\delta P_i$; это значит, голономная система во всякий момент допускает от всякой исходной конфигурации вместе с виртуальным перемещением δP_i также и противоположное смещение $-\delta P_i$, или, как обыкновенно говорят, для всякой голономной системы *виртуальные перемещения обратимы.*

Это соотношение тем более заслуживает внимания, что для систем неголономных, как мы увидим ниже, могут существовать также и необратимые виртуальные перемещения.

Из линейной формы уравнений (15) следует также, что двум виртуальным перемещениям

$$\delta_1 P_i = \sum_{1}^{n}{}_h \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\delta_1 q_h, \quad \delta_2 P_i = \sum_{1}^{n}{}_h \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\delta_2 q_h \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

отвечает еще виртуальное перемещение

$$\delta_1 P_i + \delta_2 P_i = \sum_{1}^{n}{}_h \frac{\partial P_i}{\partial q_h}(\delta_1 q_h + \delta_2 q_h) \quad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

которое получается из первых путем почленного их сложения. Это значит: *складывая два виртуальных перемещения одной и той же конфигурации системы, мы получаем также виртуальное перемещение.*

16. Виртуальные перемещения твердой системы. Связи твердости выражаются уравнениями вида:

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 = \text{const};$$

отсюда ясно, что эти связи голономны и не зависят от времени. Поэтому для всякой твердой системы виртуальные перемещения не отличаются от возможных, действительно осуществимых перемещений. Мы знаем (III, рубр. 22), что эти последние все принадлежат типу:

$$dP = dO + [\overline{\omega}\, dt\ \overline{QP}], \tag{16}$$

где dO представляет смещение центра приведения, а $\overline{\omega}\, dt$ — элементарное вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через точку O.

Если твердая система совершенно свободна, т. е. подчинена исключительно выраженным выше условиям твердости, то оба бесконечно малых вектора $\overline{dO}$ и $\overline{\omega}\, dt$ могут быть выбраны совершенно произвольно: поэтому уравнение (16) в сводном виде выражает также все виртуальные перемещения твердой системы в функции от двух произвольных векторов dO и $\overline{\omega}\, dt$. Если заметим, что каждый вектор зависит от трех параметров, например от своих компонент, то придем к заключению, что для характеристики перемещений твердой системы, подчиненной только связям твердости, нужны шесть произвольных элементов (бесконечно малых, поскольку они происходят от бесконечно малых векторов). Это можно было предвидеть, так как мы имеем здесь дело с системой, имеющей 6 степеней свободы. В соответствии с принятыми обозначениями виртуальных перемещений будет полезно обозначать также через δP виртуальное перемещение произвольной точки P нашей системы, а через δO виртуальное перемещение центра O. Вместе с тем, $\overline{\delta O}$ представляет первую характеристику перемещения, которую мы раньше обозначали через dO.

Если затем, во избежание смешения с действительным элементарным движением, мы обозначим вторую произвольную характеристику через $\overline{\omega}'$, то формула (15) приводит к следующему выражению всякого виртуального перемещения твердого тела:

$$\delta P = \delta O + [\overline{\omega}'\ \overline{OP}]. \tag{16'}$$

17. Если рассматриваемая твердая система не свободна, а имеет неподвижную точку, то последнюю, естественно, принять за центр приведения O; тогда характеристика δO все время равна нулю. Вместе с тем, соотношение (16′), содержащее весь комплекс виртуальных перемещений, приводится к виду:

$$\delta P = [\overline{\omega}'\overline{OP}];$$

отсюда ясно, что перемещения твердой системы, имеющей неподвижную точку, характеризуются только тремя произвольными элементами (компонентами вектора $\overline{\omega'}$); и это можно было предвидеть, поскольку мы уже знаем, что такая система имеет три степени свободы.

18. Виртуальные перемещения неголономных систем. Как мы уже знаем, если система подчинена неголономным связям, т. е. связям подвижности, то возможные ее конфигурации в отдельные моменты этим нисколько не ограничены; но общее аналитическое выражение всякой такой связи:

$$\sum_{1}^{n}{}_{h}\, a_h dq_h + b\, dt = 0, \tag{8}$$

обнаруживает, что возможные перемещения системы ограничены. Так, это имеет, например, место для твердого тела, если оно поставлено в такие условия, что должно катиться без скольжения по поверхности другого тела (рубр. 12).

Чтобы понятие о виртуальном перемещении распространить также и на случай, когда имеют место и неголономные связи, следуют критерию, по которому виртуальным является всякое воображаемое перемещение, способное перевести систему из конфигурации C во всякую другую бесконечно близкую конфигурацию C', совместимую с состоянием связей в тот же момент; при этом, однако, такое воображаемое перемещение должно быть подчинено тем же связям подвижности, которые наложены на действительное движение системы.

Приложение этого критерия к случаю, рассмотренному выше (рубр. 12 и 13), совершенно ясно; здесь нужно рассматривать как виртуальное всякое смещение, при котором сохраняется соприкосновение твердого тела с опорной поверхностью, а переход из одного положения в другое, бесконечно близкое, совершается чистым качением; при этом, однако, состояние связей и конфигураций как в исходном, так и в конечном положениях должно соответствовать тому же моменту t; твердое тело, служащее опорой, даже в том случае, когда оно в действительности движется, как мы это считали в рубр. 13 при исчислении виртуальных перемещений, должно считать неподвижным и именно в положении, которое соответствует моменту t.

После всего сказанного легко характеризовать аналитически условие, налагаемое на виртуальные перемещения какой-либо связью подвижности (8). При переходе от одной конфигурации, соответствующей определенным значениям параметров q_h, к другой бесконечно близкой конфигурации, соответствующей в тот же момент значениям $q_h + \delta q_h$, связь подвижности будет:

$$\sum_{1}^{n}{}_{h}\, a_h \delta q_h = 0. \tag{17}$$

Это совершенно очевидно в случае однородной связи ($b=0$), при которой виртуальные перемещения подчинены тем же ограничениям, что и действительно возможные; так, это имеет место для твердого тела, катящегося по *неподвижной* твердой опоре. Но если связь неоднородна, т. е. если b не обращается тождественно в нуль, то все-таки остается в силе соотношение (17), так как мы должны ее взять для одного и того же момента, начального или конечного в нашем промежутке, а потому в уравнениях (8) нужно положить $dt=0$.

4. Системы с односторонними связями.

19. Связи положения. Из числа неголономных связей следует отдельно рассмотреть частный тип систем, наиболее простым примером которых является свободная точка, которая может двигаться без ограничений по одну сторону заданной поверхности, но не может проникнуть на другую сторону ее.

Если $\varphi(x, y, z)=0$ есть уравнение поверхности σ, то две области, на которые она разделяет пространство, характеризуются соответственно неравенствами $\varphi<0$ и $\varphi>0$; поэтому изменяя, когда это необходимо, знак функции на обратный, всегда возможно связь, которою ограничено движение нашей точки, выразить аналитически, если подчинить ее координаты условию:

$$\varphi(x, y, z) \leqslant 0.$$

Такая связь называется *односторонней* [1]; то же наименование сохраняется и в том случае, если часть пространства, в которой должна двигаться точка, ограничена несколькими поверхностями; так, например, условия

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0$$

выражают, что точка не должна выходить за пределы положительного октанта координатного триэдра.

Вообще, система, имеющая n степеней свободы,

$$P_i = P_i(q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t) \quad (i=1, 2, 3, \ldots, N), \tag{2}$$

называется ограниченной *односторонними связями* (связями положения), если соответствующие лагранжевы координаты должны

[1] В русской литературе такого рода связи часто называют *неудерживающими*, в отличие от *удерживающих* связей, выражаемых уравнениями вида (4). (*Ред.*)

удовлетворять определенному числу соотношений (зависящих от времени или независящих от него) типа:

$$\varphi_\varkappa(q_1, q_2, \ldots, q_n | t) \leqslant 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, \lambda). \tag{18}$$

В противоположность этому, голономные связи, которыми мы занимались в начале настоящей главы, называются двусторонними [1]).

20. В качестве первого простейшего примера системы, подверженной односторонней связи (положения), рассмотрим две точки $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$, соединенные гибкой нерастяжимой нитью длиной l. В самом деле, координаты этих точек при такой связи должны удовлетворять неравенству (в пределе переходящему в равенство):

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \leqslant l^2.$$

Во-вторых, рассмотрим шарик радиусом R, который должен оставаться внутри одной из полостей круглого конуса с углом при вершине 2α; поверхность конуса тоже доступна точкам движущегося шарика. Если вершина конуса взята за начало, а его ось за ось z, то точки, лежащие внутри полости конуса или на ее поверхности, характеризуются неравенствами:

$$\operatorname{ctg}\alpha \sqrt{x^2 + y^2} - z \leqslant 0, \qquad -z \leqslant 0;$$

в нашем случае этим неравенствам должны удовлетворить все точки сферы.

Можно, однако, избегнуть необходимости рассматривать эти соотношения для всех точек шарика. В самом деле, за его лагранжевы координаты можно принять координаты x_0, y_0, z_0 центра C и еще три других параметра для ориентации сферы относительно центра C; этих последних параметров мы здесь не отмечаем, так как нам не придется ими пользоваться. Условия, необходимые и достаточные для того, чтобы шарик не выходил за пределы рассматриваемой полости конуса, сводятся к тому, чтобы его центр C лежал внутри параллельного конуса, расположенного внутри данного на расстоянии R от его поверхности. Мы, таким образом, получаем следующие выражения рассматриваемой односторонней связи:

$$\operatorname{ctg}\alpha \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \leqslant z_0 - \frac{R}{\sin\alpha}, \qquad \frac{R}{\sin\alpha} - z_0 \leqslant 0.$$

21. Пограничные конфигурации и необратимые виртуальные перемещения. Из числа конфигураций, которые может принимать система (2) при односторонних связях, те, которые соответствуют соотношениям (18), когда они представляют собою действительные неравенства, называются *обыкновенными*: те же, которые соответствуют предельным положениям, когда хотя бы одно из

[1]) Или, как уже сказано выше, удерживающими. Связи (18) суть связи положения, потому что ограничивают самые положения (конфигурации) системы. Об односторонних связях подвижности речь будет ниже. (*Ред.*)

неравенств (18) обращается в равенство, называются *пограничными* конфигурациями. Так, в примерах, рассмотренных в предыдущих рубриках, система находится в пограничной конфигурации, когда соединяющая две точки гибкая, нерастяжимая нить натянута, т. е. расстояние между двумя точками равно l, или — соответственно — когда шарик касается поверхности конуса.

При этих условиях мы можем распространить на системы с односторонними связями определение виртуальных перемещений, данное в рубр. **14** для голономных систем. Для системы (2), подчиненной связям (18), всякое виртуальное перемещение, исходящее от конфигурации с лагранжевыми координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, выражается формулой:

$$\delta P_i = \sum_{1}^{n}{}_h \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\delta q_h \quad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

где вариации δq_h лагранжевых координат должны удовлетворять соотношениям:

$$\varphi_\varkappa(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, q_3 + \delta q_3 + \ldots + q_n + \delta q_n \mid t) \leqslant 0 \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, \lambda);$$

с точностью до бесконечно-малых первого порядка это соотношение можно написать в виде:

$$\varphi_\varkappa(q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t) + \delta\varphi_\varkappa \leqslant 0. \tag{19}$$

Если исходная конфигурация (соответствующая лагранжевым координатам $q_1, q_2, \ldots, q_n$) обыкновенная, то все функции $\varphi_\varkappa(q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t)$ имеют отрицательные значения; в силу непрерывности отрицательное значение имеют и суммы $\varphi_\varkappa + \delta\varphi_\varkappa$, поскольку вариации получают достаточно малые значения. Таким образом условия (19) неизбежно удовлетворены; мы отсюда заключаем, что при обыкновенной исходной конфигурации односторонние связи не налагают на виртуальные перемещения никаких ограничений.

Напротив, если исходим от пограничной конфигурации, т. е. от положения, при котором по крайней мере одна из функций $\varphi_\varkappa$, например φ_j, обращается в нуль, то соответствующее условие (19) дает:

$$\delta\varphi_j = \sum_{1}^{n}{}_h \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_h}\delta q_h \leqslant 0; \qquad 20)$$

это есть действительное ограничение перемещений системы.

Таким образом *односторонние связи только в том случае налагают ограничения на виртуальные перемещения, если они исходят от пограничных конфигураций.*

Все эти соображения становятся вполне наглядными, если обратимся к примерам, рассмотренным выше. Начнем с точки, которая связана тем, что не может проникнуть с одной стороны поверхности σ на другую; пока такая точка движется вне поверхности, ее виртуальные перемещения совершенно произвольны, как и для свободной точки; но как только точка поступает на поверхность, ее виртуальные перемещения уже ограничиваются тем, что точка не может проникнуть в другую сторону поверхности: виртуальные перемещения могут передвинуть ее только вдоль поверхности или могут возвратить ее в ту часть пространства, которая остается для нее при этой связи доступной. Аналогично обстоит дело в случае системы двух точек, связанных гибкой нерастяжимой нитью; пока нить не натянута, точки, в сущности, свободны, и их виртуальные перемещения ничем не ограничены; но как только нить получает натяжение, становятся возможными только такие виртуальные перемещения, которые не раздвигают точек на расстояние, превышающее длину нити. Наконец, в случае шарика, помещенного внутри конуса, виртуальные перемещения ограничены только тогда, когда шарик находится в соприкосновении с поверхностью конуса; в этом положении шарик может подвергнуться только таким виртуальным перемещениям, при которых он сохраняет соприкосновение с поверхностью конуса или отходит внутрь его.

22. Ко всему изложенному присоединим еще одно последнее замечание. Как мы видели (рубр. 15), для голономных систем все виртуальные перемещения обратимы. Если связи системы носят односторонний характер, то при обыкновенных конфигурациях они также не налагают на виртуальные перемещения никаких ограничений. Таким образом ясно, что при односторонней связи виртуальные перемещения также обратимы, пока связь не приходит „в напряжение", т. е. пока система находится в обыкновенной конфигурации. Не так обстоит дело, когда связь „пришла в напряжение", т. е. система достигла пограничной конфигурации. В самом деле, обратимся вновь к системе (2), ограниченной связями (18). Предположим, что мы исходим от конфигурации, при которой обращается в нуль хотя бы одна из функций $\varphi_\varkappa$, скажем, φ_j; тогда виртуальные перемещения должны удовлетворять условию:

$$\delta\varphi_j \leqslant 0; \tag{20'}$$

противоположное смещение получается изменением знаков вариаций всех лагранжевых координат на обратные, поэтому меняет знак и φ_j. Таким образом виртуальное перемещение, исходящее от рассматриваемой пограничной конфигурации, будет обратимым в том и только в том случае, когда совместно с условием (20') будет также

$$-\delta\varphi_j \leqslant 0;$$

это влечет за собой $\delta\varphi_j = 0$; мы заключаем поэтому, что *виртуальные перемещения, исходящие от пограничной конфигурации,* *вообще необратимы*; обратимы лишь те из них, при которых совместно с каждым соотношением (18), удовлетворяющимся в порядке равенства, обращается также в нуль соответствующая вариация $\delta\varphi_\chi$.

В этом легко отдать себе отчет на рассмотренных уже нами примерах. Если точка, подчиненная связи, в силу которой она не может перейти с одной стороны поверхности σ на другую, в некоторый момент находится на самой поверхности, то необратимыми являются все перемещения, которые должны сдвинуть точку с поверхности; все же ∞^2 перемещений, происходящие по касательным к поверхности, обратимы. Для двух точек, связанных гибкой нерастяжимой нитью, в момент натяжения нити необратимыми являются перемещения, которые стремятся сблизить точки; обратимыми остаются те, которые оставляют расстояние между точками без изменения. Наконец, шарик, вынужденный оставаться внутри данного конуса, в момент соприкосновения с его поверхностью имеет обратимые перемещения, передвигающие его по поверхности, и необратимые, сдвигающие его с поверхности.

23. Односторонние связи подвижности. Связи подвижности также могут быть односторонними. В качестве примера можно опять взять шар, катящийся по неподвижной плоскости; нужно только предположить, что скольжение не возбранено совершенно и может происходить в каком-либо направлении, например — вдоль положительной оси ξ. Тогда первое из уравнений (10), выражающих, что тангенциальные компоненты скорости точки C обращаются в нуль, должно быть заменено условием:

$$R\chi - \dot{\alpha} \leqslant 0 .$$

Из этого ясно, что в наиболее общем положении рядом с двусторонними связями подвижности, выражаемыми уравнениями типа

$$\sum_{1}^{n}{}_h a_h dq_h + b\, dt = 0 \tag{8}$$

могут появиться связи подвижности вида:

$$\sum_{1}^{n}{}_h \alpha_h dq_h + \beta\, dt \leqslant 0 .$$

Виртуальные перемещения в этом случае подчинены условиям типа

$$\sum_{1}^{n}{}_h \alpha_h \delta q_h \leqslant 0 . \tag{21}$$

24. Заключительные соображения. Объединяя предыдущие результаты с теми, которые получены в рубр. 21, мы приходим к заключению, что всякая односторонняя связь, ограничивает ли она положение системы или ее подвижность, является ли она однородной или неоднородной, может налагать на виртуальные перемещения только ограничения типа

$$\sum_{1}^{n}{}_h \alpha_h \delta q_h \leqslant 0, \tag{21}$$

так как условия (20) рубр. 21, которые односторонняя связь положения налагает на виртуальные перемещения, исходящие из пограничной конфигурации, имеют в первом члене линейные однородные выражения от вариаций δq_h с той лишь особенностью, что коэфициенты не являются уже произвольными функциями от параметров q_h (иногда даже от времени), но представляют собой частные производные относительно q_h одной и той же функции от параметров q_h (а в подлежащем случае и от t).

Таким образом, по существу, поскольку речь идет о данной конфигурации и о данном моменте, односторонние связи выражаются неравенствами (включая предельный случай равенства), линейными и однородными относительно вариаций δq_h с вполне определенными численными коэфициентами

Сопоставляя аналогично этому соображения рубр. 18 с теми, которые изложены в рубр. 13, можно сказать, что двусторонние связи как положения, так и подвижности, однородные или неоднородные, налагают на виртуальные перемещения условия, выражаемые однородными линейными уравнениями относительно вариаций δq_h, которые все имеют вид:

$$\sum_{1}^{n}{}_h a_h \delta q_h = 0. \tag{17}$$

Мы приходим, таким образом, к следующему заключению. *Виртуальные перемещения системы S с лагранжевыми координатами $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$, подчиненные дальнейшим связям, односторонним или двусторонним, однородным или неоднородным, от какого бы момента и положения они ни исходили, выражаются линейными и однородными соотношениями от вариаций δq_h; эти соотношения представляют собой равенства вида* (17) *в случае двусторонних связей и неравенства (со включением предельных равенств) вида* (21) *в случае односторонних связей, действующих от рассматриваемой конфигурации $(q_1, q_2, \ldots, q_h)$ и момента t.*

В частном случае, когда для определения системы в качестве лагранжевых координат взяты декартовы координаты отдельных ее точек, виртуальные перемещения в данный момент от данной конфигурации выражаются системой типа:

$$\sum_{1}^{N}{}_i (a'_{ki} \delta x_i + a''_{ki} \delta y_i + a'''_{ki} \delta z_i) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r); \tag{22}$$

$$\sum_{1}^{N}{}_i (\alpha'_{ji} \delta x_i + \alpha''_{ji} \delta y_i + \alpha'''_{ji} \delta z_i) \leqslant 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, s). \tag{23}$$

Если введем Nr векторов $\mathbf{a}_{ki}$ с компонентами a'_{ki}, a''_{ki}, a'''_{ki} и Ns векторов $\bar{\alpha}_{ji}$ с компонентами α'_{ji}, α''_{ji}, α'''_{ji}, то этим соотношениям можно придать более сжатую форму:

$$\sum_1^N \mathbf{a}_{ki}\,\delta P_i = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, r); \tag{22'}$$

а

$$\sum_1^N \bar{\alpha}_{ji}\,\delta P_i \leqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, s). \tag{23'}$$

В этом отношении полезно сделать еще один шаг и ввести обозначения, способные охватить линейность и однородность (относительно $3N$ компонент) условий, которые характеризуют виртуальные перемещения δP_i. С этой целью мы впредь будем пользоваться (как мы это уже делали выше, см., например, рубр. **11**) подходящим символом для обозначения левых частей уравнений (22) и (23) или (22′) и (23′), именно, мы положим:

$$B_k(\delta P) = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{a}_{ki}\delta P_i \quad (k = 1, 2, \ldots, r); \tag{24}$$

$$U_j(\delta P) \leqslant \sum_1^N{}_i\, \bar{\alpha}_{ji}\delta P_i \quad (j = 1, 2, \ldots, s), \tag{25}$$

после чего самые уравнения примут вид:

$$B_k(\delta P) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, r); \tag{22''}$$

$$U_j(\delta P) \leqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, s). \tag{24'}$$