ГЛАВА VII.

Основные понятия и постулаты механики.

1. От чисто описательного изучения явлений движения, которое составляет предмет кинематики, мы теперь перейдем к исследованию причинной связи между этими явлениями; как мы уже указали вначале, это составляет главную задачу механики, а специально изучается в том отделе механики, который называют *динамикой*. Мы уже сказали, что этот отдел характеризуется—по сравнению с кинематикой — введением основных понятий о *силе* и о *массе*. Здесь мы точно установим, на основе соображений экспериментального происхождения, те принципы и постулаты, которые определяют эти два основные понятия в их связи с кинематическими элементами, уже введенными выше. Установив эти принципы, мы выведем из них наиболее важные следствия качественного и количественного свойств, а также изложим наиболее простые их приложения к конкретным вопросам.

Будет полезно предупредить, что эмпирические соображения, которыми мы будем руководствоваться при формулировке вышеупомянутых принципов, имеют, строго говоря, только ориентирующее значение, как стимулы к определенным наглядным представлениям. Полное оправдание системы постулатов, к которой мы, таким образом, будем приведены, мы будем в состоянии дать только впоследствии, установив согласие реальных физических фактов с теоретическими следствиями, которые мы шаг за шагом выведем из этих постулатов дедуктивным путем.

1. Понятие о силе.

2. Мускульные ощущения усилия, которые появляются, когда мы поднимаем или держим поднятым груз, когда мы продвигаем или толкаем его по полу, отличаются друг от друга, прежде всего, большей или меньшей интенсивностью. Ассоциируя эти ощущения с другими осязательными или зрительными данными, мы во многих случаях имеем также возможность фиксировать определенное *направление*, по которому осуществляется наше усилие, а также *точку* предмета (или, по крайней мере, небольшую область, практически приближающуюся к точке), в которой наше усилие приложено. Вследствие этого с нашим мускульным усилием находится в соответствии некоторый определенный *вектор* F — весьма важный геометрический образ,— хотя критерии этой координации (ощущения и вектора) по началу могут быть чисто субъективными и носят характер грубого приближения.

Указанные мускульные ощущения служат точкой отправления для установления более точного отвлеченного понятия, которое мы называем *силой*.

Процесс, который нас к этому понятию приводит, может быть схематически изображен следующим образом: представим себе некоторое тело S в определенном состоянии движения или, проще, в покое (скажем, относительно земли); допустим, что между обстоятельствами, которые влияют на движение или на состояние покоя наблюдаемого тела, мы выделим одно C, которое можно заменить мускульным усилием, не меняя при этом вовсе всех остальных сопутствующих обстоятельств. Положим, например, что к веревке, переброшенной через блок, привешен груз, который с другой стороны уравновешен гирей, так что вся установка находится в покое; затем снимем противовес и закрепим эту установку тягой руки; это и есть та замена, о которой мы говорим. Таким же образом, если тело S опирается на стол, то действие, производимое этой опорой, мы можем заменить (по крайней мере в известных границах, зависящих от нашей силы) мускульным усилием, поддерживая то же самое тело S рукой в покое в том же положении, в каком оно находилось первоначально.

Всякое обстоятельство C (действие противовеса или опоры в указанных выше примерах), вследствие его эквивалентности мускульному усилию по производимому им действию на состояние покоя или движения тела, мы называем *силой*; вместе с тем мы присваиваем силе то же векториальное изображение, которое соответствует мускульному усилию.

Существует и другой критерий, не менее ясный по своей наглядности, который приводит к распознанию обстоятельства C, носящего характер силы. Предположим, что определенный эффект при движении тела вызывается действием некоторой причины C в том смысле, что при отсутствии этого агента или обстоятельства C эффект не проявляется; того же самого уничтожения эффекта можно, однако, часто достигнуть и при наличии обстоятельства C, если применим в противодействие ему надлежащее мускульное усилие; всякий раз, как это имеет место, обстоятельство C квалифицируется как *сила*. Вместе с тем совершенно естественно изображать эту силу приложенным вектором, прямо противоположным тому усилию, которое этот агент аннулирует; это отразит геометрически тот факт, что наше мускульное усилие и обстоятельство C, действуя совместно, друг друга нейтрализуют. Так, например, поддерживая веревку, к которой привешен груз, мы мешаем ему падать, и, таким образом, реакцией нашего мускульного усилия аннулируется действие веса; совершенно так же надлежащим давлением руки мы можем нейтрализовать действие пружины или давление ветра, стремящегося раскрыть оконную раму, и т. д. Таким образом критерии, естественно возникающие на экспериментальной, грубо приближенной базе, приводят к тому, что мы относим к числу сил веса тел, давление или тягу, производимую твердыми телами или веревками, упругое натяжение пружины, порыв ветра, сопротивление воды движению плавающего тела и т. п.

Вообще, всякий раз как мы обнаруживаем в некотором обстоятельстве C характер силы и констатируем, что некоторое другое обстоятельство C', заменяя собой C, при прочих равных условиях производит тот же самый эффект на движение тела S, мы будем говорить, что и это последнее обстоятельство C' есть сила, и будем изображать его тем же самым вектором, который мы отнесли уже к агенту C.

Изложенные соображения ясно показывают, что в чрезвычайно большом числе случаев можно присвоить совершенно конкретное значение понятию о силе, даже о *силе, приложенной к определенной точке тела.* Представляется поэтому совершенно оправданным введение этого нового понятия наряду с понятиями о пространстве и времени. Понятие времени носит скалярный характер; оно может быть выражено значениями переменной t (II, рубр. 3); напротив того, понятие силы носит *векториальный* характер, т. е. может быть изображено только вектором, и притом приложенным.

Присущие понятию о силе свойства, точно выраженные определенными постулатами, дают, как мы увидим в следующих параграфах, критерии измерения, т. е. они позволяют определить вектор, выражающий данную силу, и притом с такой точностью, которая нам недоступна при непосредственном выражении мускульного усилия.

2. Свободная материальная точка.

3. Природные силы, с которыми мы встречаемся в ежедневном опыте, как это имеет место в указанных выше примерах, представляются приложенными к телам, имеющим значительные размеры, а часто даже различным образом связанным между собой: так, когда повозку тянут веревкой, она опирается на плоскость дороги; когда маятник качается под действием силы тяжести (веса), он привязан к нити или прикреплен к металлическому стержню и т. п. Эти обстоятельства усложняют распознавание соотношений, имеющих место между силами и движением тел, к которым они приложены; вследствие этого при первом исследовании целесообразно рассматривать те случаи, в которых эти обстоятельства оказывают возможно меньшее влияние.

Что касается *связей* движущегося тела с другими телами, то существует много фактических случаев, в которых ими можно просто пренебречь. Так, например, это имеет место при движении тяжелых тел в пустоте или при движении планет вокруг солнца.

Но этого еще недостаточно для того, чтобы привести доступные нам эксперименты к той схематической простоте, которая позволила бы выяснить характеристические свойства, присущие понятию о силе. *Все тела обладают известным протяжением*; мы видели при изучении кинематики, что даже в частном случае движения твердой системы кинематические элементы (скорости, ускорения, траектории) отдельных точек, вообще говоря, отличаются друг от друга. Поскольку мы здесь предполагаем сделать общие индуктивные выводы о характере сил путем анализа их динамического эффекта, совершенно ясно, что указанное многообразие одновременных кинематических особенностей неизбежно должно маскировать явления и даже отвлекать наше внимание от возможного схематического изображения всего процесса в целом. Чтобы элиминировать это многообразие усложняющих обстоятельств, целесообразно ограничиться сначала телами настолько малыми (по сравнению с размерами области, в которой происходит движение), чтобы положение тела можно было определить без значительной погрешности геометрической точкой. Всякое тело, рассматриваемое с этой точки зрения, принято называть *материальной точкой*. Это название не только не противоречит нашим наглядным представлениям о конкретных явлениях, но, как было уже указано в кинематике (II, рубр. 1), соответствует уже установившимся взглядам; так, например, положение судна на море обыкновенно определяют долготой и широтой места; но в действительности эти координаты определяют только одну геометрическую точку на земной поверхности, которую мы отожествляем с нашим судном в силу его незначительных размеров по сравнению с размерами земли; точно так же, чтобы привести пример, еще лучше соответствующий приведенному выше определению, мы изображаем все звезды точками на небесной сфере, хорошо зная, как велики их размеры по сравнению с телами на земле.

Материальная точка в отношении всего того, что относится к чисто кинематическим свойствам (положение, траектория, скорость, ускорение и т. д.) по самому своему определению может быть рассматриваема просто как геометрическая точка; но с точки зрения действия силы она ведет себя, как всякое тело природы. Схематическая простота кинематических свойств движения материальной точки даст нам возможность связать с ними основные законы механики; динамика точки составит базу всей механики: мы увидим в дальнейшем, что законы движения всякого другого тела, размерами которого нельзя пренебречь (по сравнению с той пространственной областью, в которой происходит движение), могут быть установлены, если будем рассматривать такого рода тело, как агрегат материальных точек.

3. Пропорциональность силы и ускорения

4. **Случай веса.** В движении тяжелых тел мы различаем два различных элемента: вес тела и начальные условия его движения. Галилей впервые установил законы свободного падения тела. Он показал, что при таком падении тела наращения скорости в равные промежутки времени по вертикали остаются постоянными; это значит: ускорение этого движения остается постоянным. Далее, для изучения общего случая движения тела, как угодно брошенного, он руководился понятием о независимости действий. Он усмотрел, что в общем случае движения произвольно брошенного тела должно происходить то же, что и при свободном падении его: ускорение должно оставаться постоянным, т. е. оно не зависит ни от каких обстоятельств, в том числе и от скорости тела в каждый момент. Опыт вполне подтвердил эту интуицию.

С постоянством изменения скорости здесь связывается факт большой важности, заключающийся в том, что и вес тела остается постоянным во всех фактически возможных условиях движения. Можно поэтому смотреть на постоянство ускорения, как на результат непрекращающегося действия постоянной силы „веса", проявляющегося совершенно одинаково, какова бы ни была скорость движущегося тела.

Полученный результат можно выразить иначе так: при движении тяжелого тела вес определяет в течение каждого промежутка времени Δt изменение скорости Δv по вертикали, пропорциональное Δt и не зависящее от скорости, которую тело имело в начале этого интервала.

5. **Случай постоянных сил.** Когда это установлено, то, естественно, приходит мысль, что и другие силы проявляют себя в этом отношении, как вес. Это справедливо по отношению к тем силам, которые допускают прямое сопоставление с весом, благодаря тому, что они имеют с ним общее основное свойство, именно остаются неизменными в течение движения тела. Точнее, для определенности будем предполагать, что тело представляет собой просто материальную точку P и что на него действует в течение некоторого промежутка времени Δt одна и та же сила, изображаемая вектором F, постоянным по величине и направлению. Аналогия, о которой шла речь, сводится к допущению, что скорость $\boldsymbol{v}$ точки P приобретает в течение интервала Δt наращение (векториальное) $\Delta \boldsymbol{v}$, направленное, как и вектор $\boldsymbol{F}$, а по абсолютному своему значению пропорциональное Δt и не зависящее от состояния движения точки P (от ее скорости в начальный момент этого интервала).

6. Нам остается составить себе представление о коэфициенте пропорциональности, который мы обозначим через h. В случае веса этот коэфициент имеет постоянное значение, которое мы обозначаем через g (II, рубр. 27), каково бы ни было тело, т. е. какова бы ни была материальная точка.

Будет ли иметь место то же самое для произвольной постоянной силы F? Наиболее элементарные опыты заставляют исключить это предположение, заменяя его другими простыми гипотезами относительно природы коэфициента h.

С этой целью достаточно проанализировать начало движения тела, первоначально находящегося в покое и получившего толчок (от руки или мускульного усилия). Тело получает некоторую скорость; мы предполагаем, конечно, что тело настолько мало, что можно говорить о его скорости, не отличая отдельных его точек. Мускульное усилие, которое определило скорость, очевидно, не представляет собой силы, постоянной по величине и направлению; но мы можем его приближенно считать таковым, если будем считать чрезвычайно малым промежуток времени Δt, в течение которого толчок произошел. Напряжение скорости $h\,dt$, сообщенной телу, представляет собой не что иное, как наращение Δv, которое мы выше рассматривали. Оно представляется для того же тела тем более значительным, чем энергичнее было мускульное усилие, т. е. чем больше была сила, а при равенстве усилий оно тем менее значительно, чем больше вес тела.

Наиболее простой способ выразить это положение вещей заключается в том, чтобы предположить коэфициент h прямо пропорциональным напряжению силы, обратно пропорциональным весу p тела при одном и том же коэфициенте пропорциональности k (для всякого тела, которое можно уподобить материальной точке).

Дальнейшая индукция приводит к допущению, что во всяком случае, т. е. для какой угодно силы F, постоянной по величине и направлению,

$$h = k\frac{F}{p},$$

где F, как обыкновенно, обозначает абсолютное значение вектора F.

7. Резюмируем: изменение скорости $\Delta \boldsymbol{v}$, которое происходит в произвольный промежуток времени Δt под действием постоянной силы F, должно оставаться направленным, как вектор F, и должно быть по абсолютному значению равно $h\Delta t = k\Delta t\frac{F}{p}$, где k не зависит ни от материальной точки, ни от силы, которая к ней приложена.

Если, в частности, предположим, что F есть вес, то абсолютное значение левой части есть не что иное, как $g\Delta t$, а значение правой части равно $k\Delta t\frac{1}{p}\cdot p$; отсюда следует $k = g$, и при произвольной силе мы можем, таким образом, написать, изолируя F:

$$\boldsymbol{F} = \frac{p}{g}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}, \tag{1}$$

после чего никакой неопределенности уже не остается.

Это уравнение в рассматриваемом здесь случае постоянной силы F выражает постоянство среднего ускорения $\frac{p}{g}$ движущегося тела за какой угодно промежуток времени Δt и его пропорциональность силе. Приближая Δt к нулю и обозначая через a мгновенное ускорение движущегося тела, мы получим:

$$F = \frac{p}{g} a. \tag{2}$$

8. **Случай переменных сил.** Таким образом в случае постоянных сил мы перешли к закону, который остается действительным от момента к моменту во все время движения. Это делает вероятной гипотезу, что то же соотношение в каждый момент имеет место также и для *переменной силы*. В соответствии с этим мы примем соотношение (2) за основную зависимость между силой (безразлично какой природы) и движением; мы примем, таким образом, что в каждый момент эта зависимость имеет место на всем протяжении явления. Иными словами, мы допускаем, что *при всяком движении в каждый момент имеет место пропорциональность между силой и ускорением, причем коэфициент пропорциональности* $\frac{p}{g}$ *не зависит ни от силы, ни от состояния движения материальной точки.*

4. Совместное действие нескольких сил.

9. До сих пор мы рассматривали движение свободной материальной точки, на которую действует только одна сила F, как это имеет, например, место в типичном случае падения тяжелых тел в пустоте. Но гораздо чаще случается, что на одно и то же тело оказывают свое действие одновременно несколько сил; так это, например, имеет место при движении аэростата, на которое имеют влияние его вес, подъемная сила и давление ветра.

Для определенности предположим, что на одну и ту же свободную точку P, вес которой p, одновременно действуют две силы F_1 и F_2 (и только эти две). В силу соотношения (2) мы знаем, что если бы на P действовала только одна сила F_1 или одна сила F_2, то точка получила бы соответственно ускорение:

$$a_1 = \frac{g}{p} F_1$$

или

$$a_2 = \frac{g}{p} F_2;$$

но принципы, установленные до сих пор, не говорят еще ничего относительно динамического эффекта совместного действия рассматриваемых сил. Мы поставлены вследствие этого в необходимость ввести новый индуктивный принцип; именно, допускается постулат общего характера, что *совместное действие нескольких сил не меняет действия каждой из них*; другими словами, каждая из них производит на движение рассматриваемой точки то же действие, т. е. сообщает ей то же ускорение, которое она бы произвела, действуя отдельно (т. е. без присутствия другой силы).

Этот постулат представляется естественным развитием того, который, по своей сущности, может быть назван галилеевым и устанавливает независимость изменений скорости (т. е. действия одной силы) от уже существующей скорости. Если имеется больше одной силы, то имеет место независимость в более общем смысле; именно, действие каждой силы остается независимым не только от постепенно приобретаемой скорости, но и от влияния сопутствующих сил. Если это выразить в формуле, то это означает, что совместное действие двух сил F_1 и F_2 вызывает ускорение:

$$a = a_1 + a_2 = \frac{g}{p}\,(F_1 + F_2);$$

это то же самое ускорение, которое произвела бы одна сила $F_1 + F_2$, результирующая двух физически различных сил F_1 и F_2. Вообще, *каково бы ни было число сил, действующих на одну и ту же материальную точку P, их всегда можно заменить, с точки зрения движения точки, одной силой, представляющей их геометрическую сумму*; эта последняя сила называется *равнодействующей* данных сил и приложена, конечно, к той же точке.

В возможности такой замены состоит принцип *параллелограма сил* (или, вообще, сложения сил), приложенных к одной и той же материальной точке. Он представляет собой только другую форму, математически более точную, хотя физически и менее наглядную, допущенного постулата независимости.

В результате и в том случае, когда на точку одновременно действует какое угодно число сил, основное уравнение (2) остается в силе с тем существенным изменением, что под F необходимо понимать равнодействующую всех приложенных к этой точке сил.

5. Связи и их реакции.

10. Произвольное материальное тело C можно себе всегда представить разделенным на части, достаточно малые, чтобы каждую из этих частей можно было рассматривать как простую материальную точку. Ясно, однако, что такого рода точка не является уже свободной в том смысле, как мы это понятие определили в рубр. 3. Ясно также, что подвижность точки P подчинена движению других элементов тела или, по крайней мере, связана с ним.

С другой стороны, представим себе тело, настолько малое, что его можно непосредственно уподобить материальной точке; предположим, что эта материальная точка опирается на доску стола, или привязана к нити или вообще находится в каком-нибудь соприкосновении с другими телами. В большинстве случаев здесь также возникнут ограничения ее подвижности. Во всех этих случаях мы будем говорить, что *P есть связанная материальная точка*, причем связи вызываются в зависимости от случая теми или иными частными обстоятельствами, в условиях которых происходит движение точки.

Установив это, рассмотрим какую угодно материальную точку, подчиненную связям и в то же время подвергнутую действию сил. Предположим, что мы умеем распознать различные силы, которые действовали бы на эту точку, если бы она была свободна; их равнодействующую обозначим через F; мы будем ее называть *действующей* (активной) или *непосредственно приложенной силой*. Совершенно ясно, что под действием силы F связанная точка вообще не примет того движения, которое имело бы место, если бы она была свободна; иными словами, движение связанной точки обусловливается не только влиянием действующей силы, но и воздействием связей. Поскольку в случае свободной точки мы пришли к необходимости признать всякое изменение в скорости движения результатом действия некоторой силы, будет естественно допустить на основе совершенно аналогичных соображений следующий постулат: *когда материальная точка находится под действием силы и в то же время подчинена тем или иным связям, то воздействие последних может быть заменено действием некоторой дополнительной силы* (фиктивной), которая называется *реакцией или силой связи*.

Иными словами, мы допускаем, что при наличии связей рядом с действующей силой F существует еще некоторая другая сила R, которая действует на точку P совершенно так же, как на свободную точку; под совместным действием двух сил, F и R, происходит то движение, которое действительно имеет место. Таким образом для связанной точки основное уравнение динамики принимает вид:

$$F+R=\frac{p}{g}a. \tag{3}$$

В такого рода случаях из физических особенностей осуществления связи часто можно с большой простотой судить о законе, по которому действует реакция R, или о тех или иных формах ее проявления; в этих случаях соотношение (3) устанавливает действительный постулат, который требует соответствующей экспериментальной проверки, по крайней мере a posteriori, как и другие принципы механики. В других случаях, наоборот, нам не удается непосредственно уяснить себе, как действуют связи; и тогда соотношение (3) представляет собой только простое определение силы связи R по данным F и a.

6. Равновесие материальной точки. Закон возникающего движения. Статическое измерение сил.

11. Равновесие материальной точки. Говорят, что материальная точка находится *в равновесии* или что силы, которые на нее действуют, *друг друга уравновешивают*, когда совместное действие этих сил способно удержать точку в состоянии покоя, т. е. не вызывает никакого изменения скорости точки, если она находится в покое.

Покоящаяся точка, таким образом, всегда находится в состоянии равновесия; но обратного утверждать нельзя, потому что действующие на материальную точку силы вполне могут себя уравновешивать (т. е. могут иметь потенциальную способность поддерживать точку в покое, когда она в этом состоянии уже находится), причем при этом равновесии сил точка все же может находиться в движении: если она уже раньше обладала определенной скоростью, то таковая остается неизменной под действием уравновешенных сил.

Из уравнений (2) и (3) рубр. **7**, **10** следует, что для *равновесия точки, т. е. для того, чтобы ее ускорение постоянно оставалось равным нулю, необходимо и достаточно, чтобы обращалась в нуль действующая (активная) сила, если речь идет о свободной точке, равнодействующая действующей (активной) силы и реакций, если речь идет о связанной точке.* В этом последнем случае можно также сказать, *что необходимое и достаточное условие равновесия заключается в том, чтобы действующая (активная) сила была равна и прямо противоположна реакции связей.*

12. Закон возникающего движения. Предположим, что точка P в данный момент t_0 начинает двигаться, выходя из состояния покоя, под действием силы F (отличной от нуля). В каждый момент t_1, следующий за t_0, направление и сторона обращения движения точки будут те же, что и вектора скорости v. В начальный момент t_0, когда скорость равна нулю, этот признак отсутствует; но если допустим непрерывность движения, то о направлении и стороне обращения движения в начальный момент можно судить, как о предельном направлении скорости v в моменты, непосредственно следующие за t_0. С другой стороны, при этих условиях

$$\lim_{t \to t_0} \frac{1}{t-t_0} v = a_0,$$

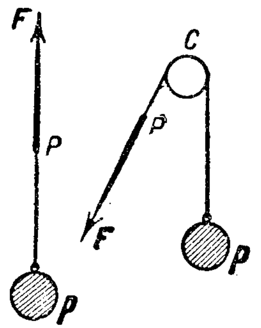
где a_0 обозначает ускорение точки P в момент t_0; отсюда мы заключаем, что направление и сторона обращения движения в момент t_0 совпадают с теми же элементами ускорения a_0, т. е. вследствие основного соотношения (2) с направлением и стороной обращения силы F.

Этот вывод (*закон возникающего движения*) дает критерий для определения направления и стороны обращения силы F в момент t_0: достаточно заставить ее действовать на материальную точку, находящуюся в покое; направление и сторона обращения силы те же, что и у начального движения, можно сказать, у первого элемента пути, описанного точкой.

Различные другие критерии для распознания как направления, так и напряженности силы можно найти в характеристических особенностях движений, имеющих место под действием этой силы.

Здесь мы ограничимся указанием (рубр. **13**, **14**) так называемого *статического измерения силы*, которое основано на рассмотрении равновесия сил, приложенных к материальной точке; это, в сущности, самый простой способ действительного измерения силы (конечно, если не считать неточной оценки по мускульным ощущениям).

13. Скала весов. Типичным примером силы является *вес*. Градуирование весов можно установить, рассматривая различные возможные объемы *однородного вещества*, например воды, и приписывая соответствующим весам значение, пропорциональное объему. Коэфициент пропорциональности, очевидно, зависит от единицы меры, т. е. от того объема, весу которого мы приписываем значение 1. На практике принятой единицей является килограмм, представляющий собой вес (в пустоте) кубического дециметра воды (дестиллированной, при наибольшей ее плотности, т. е. около 4° С). В известных случаях принимаются за единицу подразделения или кратные килограмма, например, грамм, равный 10^{-3} *кг*, квинтал (центнер), равный 10^2 *кг*, тонна, равная 10^3 *кг*.



Фиг. 74.

По скале весов можно устанавливать размеры какой угодно силы. В самом деле, предположим сначала, что сила F направлена вертикально вверх (фиг. 74); приложим ее к свободной точке P и уравновесим ее надлежащим весом p; вся сила, действующая на P, равна нулю, и напряженность силы F равна напряженности уравновешивающего веса.

Если сила F имеет какое угодно другое направление, то равновесие можно установить следующим образом: привяжем материальную точку P к концу нити и перебросим ее через блок C, а затем уравновесим действующую на точку силу весом p.

Теперь сила F уравновешена натяжением нити. Принимая за очевидное, что это натяжение происходит в направлении силы, что ее напряженность равна весу, так сказать, переданному через всю нить[1]), мы, таким образом, определяем как направление, так и напряженность (величину) силы F.

[1]) Эта гипотеза представляется понятной в порядке приближения; нужно, однако, сказать, что собственный вес нити и давление на блок должны оказать некоторое действие. Мы увидим в статике гибких нерастяжимых нитей (гл. XIV, § 8), как можно учесть эти элементы и установить пределы, в которых ими можно пренебречь

Заметим еще по поводу равновесия свободной материальной точки, что им можно воспользоваться для прямого опытного подтверждения параллелограма сил. Для этого служит прибор, принадлежащий Вариньону (Varignon), в котором пользуются натяжением трех нитей, уравновешивая на них при помощи блока и гирек три силы, одна из которых по величине равна равнодействующей двух других, но направлена в противоположную сторону.

14. Динамометры. На практике для статического измерения силы (т. е. при помощи опыта над равновесием тел) пользуются прибором, называемым *динамометром*. Схематически этот прибор сводится к винтообразной пружине AP, которая располагается по направлению и стороне обращения силы F, подлежащей определению. Конец пружины A закрепляется, к концу P прилагается сила; пружина тогда растягивается, и устанавливается равновесие в положении, отличном от свободного. Путь, пройденный точкой P по направлению оси, измеряется передвижением указателя, связанного с концом P, по градуированной скале, прикрепленной к головке A. Чтобы градуировать скалу, применяются веса. Указатель, показание которого читается на скале, когда на точку P действует данная сила F, непосредственно дает искомую величину силы. Это заключение покоится на предположении, что натяжение пружины выражается действием на точку P силы $\overline{\Phi}$, направленной по оси прибора в сторону A; предполагается также, что эта сила (по крайней мере при установившемся равновесии) зависит только от положения точки P или, что то же, от положения указателя. При этих условиях действительно возможно, с одной стороны, уподобить равновесие точки P такому же равновесию свободной точки под действием двух сил F и $\overline{\Phi}$; с другой стороны, всякий раз, как указатель находится в том же положении, мы имеем те же значения силы F. Мы сможем, таким образом, утверждать, что таковы же напряженности силы F; в частности, они равны весам, которые сначала служили для градуирования положений указателя.

7. Закон инерции. Масса.

15. Возвратимся к основному соотношению:

$$F = \frac{p}{g}\,a, \tag{2}$$

которое, так сказать, определяет силу по движению. Непосредственный вывод из этого соотношения заключается в том, что всякий раз как сила F, действующая на точку, обращается в нуль, вместе с ней обращается в нуль и ускорение; таким образом, если в течение некоторого промежутка времени на материальную точку не действует никакая сила, или, что то же, если действующие на точку силы имеют постоянную равнодействующую, равную нулю, то материальная точка во все время, пока эти условия сохраняются, не изменяет вовсе своей скорости. Это означает, что если точка P в начальный момент была в покое, то она сохраняет состояние покоя в течение всего рассматриваемого промежутка времени; если же, напротив, она имела некоторую начальную скорость, то она сохраняет эту скорость без изменения на всем протяжении указанного времени, т. е. движется прямолинейно и равномерно (II, рубр. **16**), и эти условия покоя или прямолинейного равномерного движения остаются до того момента, пока на точку не окажет действия какая-либо новая сила.

Этот принцип, который, как следствие соотношения (2), содержится во всей совокупности гипотез, уже допущенных относительно динамического действия силы, носит название *закона инерции;* его выражают в наглядной форме, говоря, что *материя сама по себе инертна.*

Принцип инерции, таким образом, содержит два утверждения, из которых одно относится к случаю покоящейся точки, другое к точке, имеющей уже определенную скорость.

Заключение, относящееся к состоянию покоя, действительно совершенно правильно. Самые обычные наблюдения делают совершенно очевидным, что для изменения состояния покоя, или, как говорят, для преодоления инерции тела, всегда необходимо действие некоторой силы.

Совершенно иной характер носит вторая сторона закона инерции. Она не проистекает от прямого наблюдения; больше того, она как будто даже противоречит обычному опыту, согласно которому все движения, не поддерживаемые теми или иными приспособлениями (силами), стремятся угаснуть. Только путем абстракции можно притти к заключению, что в отсутствии силы скорость материальной точки действительно сохраняется без изменения. Достаточно проанализировать какое-либо явление, в котором мы этого сохранения скорости не наблюдаем, чтобы легко убедиться, что это происходит под влиянием какой-либо силы. Можно непосредственно убедиться, что всякий раз как такую силу удается ослабить, тенденция к изменению скорости всегда становится менее заметной. С другой стороны, мы имеем грандиозные примеры неспособности материи самой по себе менять присущую ей скорость; достаточно подумать об энергичном воздействии, которое необходимо произвести, чтобы остановить поезд, или о разрушительных последствиях внезапной его остановки.

Таким образом после некоторых рассуждений, идущих от конкретного к абстрактному, путем последовательных приближений, мы в конце концов находим естественным или даже необходимым то, что на первый взгляд казалось парадоксальным.

Интересно отметить, что вторая часть закона инерции была с точностью формулирована и установлена только после столетней разработки этого вопроса; повидимому, это было сделано уже Леонардо да Винчи [1]), далее ближайшими последователями Коперника [2]) и Галилеем.

Первая часть этого принципа, непосредственно доступная грубому наблюдению, была уже известна древним и фигурирует среди „Начал" Аристотеля.

16. Чтобы, далее, уточнить значение основного уравнения (2)

$$F = \frac{p}{g} a,$$

необходимо остановить внимание на коэфициенте $\frac{p}{g}$.

Если мы ограничиваемся абсолютным значением обоих членов, то из уравнения (2) вытекает:

$$\frac{F}{a} = \frac{p}{g}; \tag{4}$$

иными словами, какова бы ни была сила F, действующая на данную материальную точку, отношение напряженности силы к напряженности соответствующего ускорения равно $\frac{p}{g}$; таким образом это отношение носит характер свойства, присущего рассматриваемой материальной точке.

Но здесь необходимо размышление существенной важности Формулируя различные причины, относящиеся к динамическому эффекту силы, и объединяя их в формуле (2), мы руководились рядом экспериментальных наблюдений *локального характера*, поскольку мы всегда молчаливо допускали, что экспериментирование происходит *в определенном месте*. При этих условиях, естественно, возникает вопрос, отражается ли этот чисто локальный характер также на самом уравнении (2); это тем более важно, что ускорение силы тяжести g, как мы уже видели в кинематике (II, рубр. 27), незначительно меняется от места к месту. Но если, не входя в детали, мы примем взгляд, давно вошедший в сознание широкого круга людей, что сила веса вызывается притяжением земли, то становится

---

1) Леонардо да-Винчи (Leonardo da Vinci) родился в Винчи во Флоренции в 1452 г., умер в 1519 г. в замке вблизи города Амбуаса (Amboise), предоставленном в его распоряжение. От 1482 до 1499 г. он жил в Милане в качестве инженера герцога Людовика Сфорцы (Мавра). Это был универсальный гений; он оставил бессмертные произведения искусства и зародыши самых грандиозных концепций в разнообразных областях научной мысли. Нам достаточно будет напомнить, каким новшеством в области механики были его вклады различного рода в военно-инженерное дело и гидравлику; в области механики он разрабатывал, в частности, теорию волнового движения и полета.

2) Николай Коперник (Nicol Copernicus) родился в городе Торне, в Польше, в 1473 г., умер в Фрауэнбурге (в Восточной Пруссии), где он состоял каноником кафедрального собора. Он преподавал в Кракове и Вене, а потом в Болонье, Падуе и Риме. В этом последнем городе он читал также лекции по математике и астрономии. Система мира, носящая его имя, была опубликована в Нюренберге в 1543 г. вскоре после его смерти, в 1543 г., под названием „De revolutionibus orbium caelestium libri VI".

естественной гипотеза, что и вес подвергается незначительным изменениям от места к месту соответственно изменениям ускорения; и если, с другой стороны, учесть, что в *данном месте* в силу соотношения (4) отношение между напряженностью действующей силы и соответствующим ускорением не зависит от рассматриваемой силы, то будет совершенно естественно допустить, что отношение $\frac{p}{g}$ для данной материальной точки носит совершенно ингерентный характер, т. е. что оно зависит от материальной природы тела, а не от какого-либо местного влияния. Это есть новое расширение взгляда на независимость агентов, с которой мы уже не раз встречались.

Это отношение $\frac{p}{g}$ представляет собой *массу*[1]) материальной точки.

Мы будем обозначать ее через m, и основное уравнение (2) примет тогда свою классическую форму:

$$F = ma, \tag{5}$$

на которую мы можем смотреть, как на полный синтез всех постулатов, нами до сих пор введенных. Здесь вектор F, вообще переменный, охватывает все воздействия, оказываемые на движение материальной точки окружающими обстоятельствами; между тем, масса остается неизменной по отношению к движению, характеризуя то, что в неотчетливой, но выразительной форме можно назвать *количеством* и *качеством вещества*, образующего материальную точку; как коэфициент в уравнении (5), масса характеризует отношение вещества к действию динамических агентов.

К этому приводят следующие соображения. Если сопоставим массы двух материальных частиц, состоящих из того же самого однородного вещества (например дестиллированная вода при 4° С и 760 *мм* давления, или однородное железо, или сталь), то они, будучи в данном месте вычислены на основе уравнения

$$m = \frac{p}{g}, \tag{6}$$

оказываются пропорциональными соответствующим весам (местным); а так как речь идет об однородном веществе, то они пропорциональны соответствующим объемам (рубр. 13). С другой стороны, если мы обратимся к двум частицам какой угодно материальной структуры с массами m_1 и m_2 и представим себе,

---

[1]) Небесполезно будет здесь заметить, что этот совершенно ингерентный характер массы, на практике оправдывающийся с весьма большим приближением (более чем достаточным не только для техники, но и для физических и астрономических приложений), в так называемой *релятивистской механике* не признается абсолютно точным (II, рубр. 3); эта своеобразная дисциплина приводит к допущению, что масса тела может изменяться (весьма слабо) под действием движения или даже *других динамических агентов*.

что на них действует одна и та же сила F, то для соответствующих ускорений a_1 и a_2 будем иметь:

$$F = m_1 a_1 \quad \text{и} \quad F = m_2 a_2;$$

переходя к скалярным значениям правых частей, получим:

$$a_1 : a_2 = m_2 : m_1;$$

это значит, что при равных воздействиях скалярные ускорения, испытываемые различными материальными точками, обратно пропорциональны их массам. Таким образом масса указывает различную степень сопротивляемости материальных точек действию динамических агентов — сил; иными словами, она характеризует их *динамическую инерцию*. Этим оправдывается название, которое иногда дают массе — *коэфициент инерции*. Отметим, наконец, что на основе соотношения (6) масса 1 принадлежит каждой частице, в которой в данном месте вес имеет то же значение, что и ускорение g силы тяжести. С другой стороны, если примем для g значения 9,8 (*м/сек*), то мы получаем по формуле (6) приближенное соотношение:

$$m = 0{,}102p,$$

которым пользуются на практике для вычисления массы тела по данному его весу.

8. Спецификация системы отсчета; коррегирующее влияние небесной механики. Неподвижные оси и абсолютное движение. Галилеевы триэдры.

17. До сих пор мы все время руководились более или менее непосредственной индукцией, которую мы всегда основывали на простых, хорошо нам знакомых, явлениях, непосредственно принадлежащих области наших ощущений.

Во всех рассуждениях, касавшихся этих явлений, и в индукции, которую мы из них выводили, речь всегда шла о силах и о движениях. Но при этом не было отчетливо высказано, что речь шла всегда о движениях (а вместе с тем о скоростях, о состоянии покоя, об изменениях скорости и ускорениях) относительно наблюдателя, находящегося в покое в данном месте, или, что то же, относительно осей координат, как-либо закрепленных в данной точке на поверхности земли; об этом не было речи потому, что по ходу наших рассуждений это могло казаться излишним.

Однако Ньютон пришел к широкому обобщению принципов механики, признав их применимыми не только к земным явлениям, но и к движениям небесных тел. Но при такого рода расширения принципов динамики необходимо принять во внимание одно существенное обстоятельство, а именно выбор системы отсчета. После того как благодаря трудам Коперника, Кеплера и Галилея была установлена несостоятельность геоцентрической системы и было обнаружено, что движение различных планет приобретает более простой и однородный характер, когда мы его относим не к земле, а к солнцу, то, совершенно естественно, возникла мысль, что законы динамики, если они все же остаются справедливыми, должны быть отнесены к какому-то телу менее частного характера, нежели наша земля. В соответствии с этим Ньютон прямо допустил, что основное соотношение (5) должно оставаться в силе для изменений движения небесных тел (в частности для членов солнечной системы), если эти движения будут отнесены к так называемым неподвижным звездам [1]).

Как известно, под этим названием, по крайней мере до середины XVIII столетия, разумели светящиеся точки, относительное расположение которых считалось совершенно неизменным. Число их чрезвычайно велико. Новейшие исследования звездной астрономии, сделавшей за последние годы очень большие успехи, установили, что и звезды имеют собственное движение; обнаружены даже целые потоки их. При всем том эти смещения настолько незначительны, что можно считать вполне оправданным термин *система отсчета, установленная по неподвижным звездам;* в случаях, требующих исключительной точности, приходится руководиться статистическими средними [2]). Однако здесь возникает серьезная трудность. Понятию о силе, при антропоморфическом его происхождении, заимствованном от мускульных ощущений, мы склонны приписывать абсолютное значение, т. е. представляем себе, что сила не зависит от состояния движения или покоя наблюдателя. Дело обстоит противоположным образом по отношению к вектору a; последний разделяет относительный характер соответствующего движения, а потому вообще меняется при переходе от одной системы отсчета к другой (конечно, если только речь не идет о системах, находящихся в покое одна относительно другой). Таким образом, для произвольной материальной точки ускорение относительно неподвижных звезд это не то же a, которое представлялось бы наблюдателю на земле, ибо последняя, как хорошо известно, имеет двойное движение: вращательное вокруг собственной оси и поступательное относительно солнца; солнце же, в свою очередь, находится в движении относительно неподвижных звезд, именно — несется к созвездию Геркулеса.

---

[1]) Строго говоря, Ньютон принимает за среду референции не неподвижные звезды, а *пространство*. Однако производить измерения, необходимые для того, чтобы определить положение тела относительно некоторой среды референции, мы имеем возможность, только ориентируясь на материальные тела. Такими телами в вычислениях Ньютона фактически служили неподвижные звезды. (*Ред.*)

[2]) Читатель, интересующийся углубленными исследованиями этого вопроса, найдет соответствующий материал в прекрасном трактате по звездной астрономии проф. Армеллини (*Armellini*, Trattato di Astronomia Siderale, Bologna 1928; см. в частности т. I, стр. 348).

Если бы разница между этими двумя ускорениями была настолько значительной, что ею нельзя было бы пренебречь, то ньютонова индукция, очевидно, была бы лишена надежного основания, потому что она распространяла бы на динамику мироздания принципы, экспериментально установленные и пригодные только для земной механики. Однако, в действительности, можно констатировать, основываясь на теории относительного движения, что разница этих двух ускорений той же точки относительно земной и звездной систем отсчета невелика, и обычно для явлений, которые могут интересовать техника, ею можно вовсе пренебречь.

18. Чтобы это обнаружить, обратимся к теореме Кориолиса IV, рубр. 3):

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_\tau + \boldsymbol{a}_r + 2\boldsymbol{a}_c.$$

За абсолютное мы здесь примем движение точки P относительно звездной системы референции, а за относительное — движение той же точки относительно земли; переносным движением, таким образом, будет движение земли, которое, как выше было указано, нужно рассматривать как поступательно вращательное[1]). Нам нужно вычислить порядок величины абсолютного значения разности между $\boldsymbol{a}_a$ и $\boldsymbol{a}_r$, т. е. вектора

$$\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{a}_c.$$

В переносном ускорении $\boldsymbol{a}_\tau$ рассмотрим отдельно слагающую, обусловливаемую годичным движением земли, и другую слагающую, обусловливаемую суточным ее вращением. В первом движении, имеющем поступательный характер, все точки земли обладают одним и тем же ускорением; его абсолютное значение выражается через (II, рубр. 54):

$$\frac{c^2}{p}\,\frac{1}{\rho^2},$$

где c есть удвоенная секториальная скорость, p — параметр земной орбиты, а ρ — расстояние земли от солнца. Но по третьему закону Кеплера (II, рубр. 54):

$$\frac{c^2}{p} = 4\pi^2\,\frac{a^3}{T^2},$$

где a означает большую полуось орбиты, а T — время полного оборота земли; вследствие этого, подставляя вместо a и ρ среднее расстояние земли от солнца, составляющее около 150 млн. *км*,

---

[1]) Заметим, что мы здесь еще пренебрегаем движением, уносящим всю солнечную систему по направлению к созвездию Лиры; при современном состоянии наших познаний это движение представляется прямолинейным и однородным, а потому не оказывает никакого влияния на ускорение отдельных тел (VI, рубр. 4).

т. е. $15 \cdot 10^{10}$ *м*, мы получаем для выражения искомого ускорения (по крайней мере порядка его величины) в метрах в секунду:

$$\frac{4\pi^2 \cdot 15 \cdot 10^{10}}{T},$$

если T есть число секунд, содержащихся в годе. Это дает ускорение, несколько меньшее 1 *см* в секунду, т. е. около 0,001 g.

Чтобы вычислить порядок величины ускорения a_τ, остается рассмотреть ускорение, вызываемое суточным вращением земли, угловая скорость которого по абсолютному значению равна $\omega = \frac{2\pi}{N}$, где N обозначает число секунд, содержащихся в сутках, т. е. в промежутке времени, в течение которого земля возвращается к прежней своей ориентации относительно неподвижных звезд. Если речь идет о секундах среднего звездного времени, то, по самому определению,

$$1 \text{ сутки} = 24^h = (24 \cdot 60 \cdot 60)'' = 86\,400'';$$

если же, напротив того, речь идет о среднем солнечном времени, как это обычно имеет место, то продолжительность суточного обращения выражается несколько меньшим числом, именно 86164; поэтому $\omega = \frac{2\pi}{86\,164}$; вместе с тем, ускорение точки на расстоянии δ от полярной оси равно $\omega^2\delta$ (II, рубр. **33**). Если мы предположим, что точка находится на поверхности земли на широте λ, и через R обозначим радиус земли, то $\delta = R\cos\lambda$, а потому ускорение равно:

$$\frac{4\pi^2\, R \cos\lambda}{(86\,164)^2}.$$

Полагая здесь $\cos\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$, т. е. предполагая λ равным 45° и подставляя для R его среднее значение в 6371 *км*, мы найдем, что это ускорение несколько меньше 2,5 *см* в секунду.

Что касается, наконец, дополнительного ускорения, то оно, как известно (IV, рубр. **3**), выражается формулой:

$$a_c = [\bar{\omega} v_r];$$

если для скорости v_r примем значение, не превышающее 60 *м* в секунду, каковое редко достигается в технике[1]), то мы приходим к значению, несколько меньшему 0,5 *см* в секунду. Таким образом, в результате всего вычисления разница между ускорением точки относительно земли и относительно неподвижных звезд является по сравнению с ускорением силы тяжести,

[1]) Этот предел оказывается в значительной мере превзойденным в баллистике, поскольку снаряды способны приобретать скорость в несколько сот метров в секунду. В этом случае вообще нельзя пренебрегать членом a_c. От этого, собственно, и зависит одна из так называемых вторичных проблем внешней баллистики (т. II и гл. II).

которое можно принять за основу в вычислениях технического значения, величиной порядка немногих тысячных. К этому следует еще прибавить, что на практике допускается ошибка, значительно меньшая, потому что обыкновенно, когда при вычислении сил за систему отсчета принимают землю, делаются еще и другие поправки (XVI, рубр. 7); этим в большой мере компенсируется ошибка, проистекающая от замены звездной системы отсчета земной.

19. Предыдущее вычисление дает элементарное оправдание индукции, в силу которой основному уравнению динамики (5) приписывается универсальное значение в отношении свода небесного (т. е. неподвижных звезд); в противоположность этому земную систему отсчета, которая нам послужила для первоначального установления принципов механики, мы впредь будем рассматривать как способную дать только приближенные результаты (правда, вполне достаточные для практических нужд). Эта точка зрения, которая, как мы сказали, возникла, вследствие стремления распространить законы механики на область астрономии, именно в ней нашла наиболее блестящее и замечательное подтверждение.

В динамике обыкновенно принято называть *абсолютным* всякое движение, отнесенное к какой угодно системе отсчета (триэдру), которая сохраняет неизменное положение относительно неподвижных звезд или которую можно, по крайней мере, считать таковой в пределах точности наших инструментов. В соответствии с этим соглашением, говорят, что основной постулат механики, т. е. соотношение (5), выполняется полностью для абсолютного движения.

Будет полезно повторить, *что для движения земных тел, каковыми, в частности, являются те, которыми мы пользуемся в технических приложениях, можно считать соотношение* (5) *справедливым и по отношению к земной системе; если это соотношение в таком применении не соответствует действительности со всею точностью, то это во всяком случае имеет место с приближением, которое в огромном большинстве случаев превосходит измерения, доступные физическим приборам.*

20. Галилеевы системы отсчета. Чтобы в отношении системы отсчета устранить всякие несущественные ограничения, важно к изложенному прибавить еще одно замечание. Если $\Omega\xi\eta\zeta$ есть триэдр, неподвижный относительно свода небесного, а через $\Omega'\xi'\eta'\zeta'$ обозначим второй триэдр, находящийся в равномерном поступательном движении относительно первого (т. е. в поступательном движении с постоянной скоростью, имеющем поэтому ускорение, равное нулю), то из теории относительных движений (IV, рубр., 4, а) следует, что ускорение какой угодно точки по отношению к триэдру $\Omega'\xi'\eta'\zeta'$ все время остается тождественным с ускорением той же точки относительно триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$; *таким образом основное уравнение* (5) *будет оставаться строго справедливым всякий раз, как движение* *будет отнесено к какому угодно триэдру, находящемуся в равномерном поступательном движении относительно свода небесного, или, иными словами, относительно любого триэдра, оси которого сохраняют неизменное направление, а начало совершает равномерное прямолинейное движение.*

В дальнейшем, всякий раз как мы будем пользоваться уравнением (5), мы будем всегда предполагать, если не будет отчетливо оговорено противное, что движение отнесено к одному из триэдров, о которых мы только что говорили и которые мы будем называть *галилеевыми триэдрами инерции*. Это последнее название было предложено Эйнштейном в его первом мемуаре (1905) о теории относительности и с того времени повсюду принято. Оно представляется не только оправданным, но даже, так сказать, обязательным, поскольку в произведениях Галилея в удивительно ясных и точных выражениях формулирован тот факт, что механические явления следуют тем же законам для двух наблюдателей, находящихся в равномерно поступательном движении друг относительно друга.

Заметим, наконец, что часто при постановке тех или иных проблем механики нам придется говорить *о неподвижных* точках, прямых или плоскостях. Под этим мы всегда будем разуметь точки прямые или плоскости, *неподвижные относительно принятой в механике системы* отсчета; в согласии с тем, что выше изложено, таковой является галилеева система или же, если мы можем удовольствоваться приближением, охарактеризованным в рубр. **18—19**, триэдр, связанный с землей.

9. Математическое выражение физических сил. Позиционные и консервативные силы.

21. На основе уравнения

$$F = ma, \tag{5}$$

объединяющего принципы механики, возникает два типа задач, обратных одна другой: 1) каким-либо образом задано движение материальной точки, а также и известна ее масса; требуется найти силу, которая, действуя на эту материальную точку, была бы способна сообщить ей заданное движение; 2) задана действующая на точку сила, и требуется определить движение точки. В том и другом случае под действующей силой мы разумеем равнодействующую всех приложенных к этой точке сил.

Первая задача разрешается просто и непосредственно: при указанных заданиях она требует только диференцирования. В самом деле, если

$$P = P(t) \tag{6}$$

есть геометрическое уравнение движения, которое по отношению к галилееву триэдру выражается скалярными уравнениями:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

то, в силу соотношения (5), искомая сила F в функции времени выражается через

$$m\ddot{P},$$

или, в компонентах, через

$$m\ddot{x},\ m\ddot{y},\ m\ddot{z}.$$

Гораздо труднее обыкновенно бывает вторая задача, ее решение, собственно, и составляет основную задачу динамики точки. Чтобы выразить эту задачу при помощи уравнения, нужно, прежде всего, точно установить, в каком смысле и каким способом мы считаем *заданной* силу.

22. Возвратимся снова к силе — весу, или, как мы будем впредь также говорить, к силе тяжести. Мы знаем, что эта сила имеет локальный характер: если мы рассмотрим часть пространства, окружающего землю, например, атмосферу, и представим себе, что мы в состоянии поместить в любую точку этой части пространства тело, которое можно принять за материальную точку, с определенной массой, равной, скажем, единице, то в каждой точке рассматриваемой области к нашей материальной точке будет приложена совершенно определенная сила — ее вес. Обобщая этот случай, мы можем себе представить, что в некоторой области пространства C существуют такие физические условия, что определенная свободная материальная точка P, имеющая, например, массу, равную единице, в каждой точке этой области подвергается действию вполне определенной силы F, которая зависит исключительно от положения этой точки. Мы сможем тогда написать:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(P), \tag{7}$$

или, иначе, обозначая через X, Y, Z — компоненты силы $\boldsymbol{F}$ относительно определенных трех осей, а через x, y, z — координаты взятого положения точки P:

$$X = X(x, y, z), \quad Y = Y(x, y, z), \quad Z = Z(x, y, z).$$

Всякая сила такого рода называется *позиционной*; совершенно естественно рассматривать такого рода силу, как заданную, коль скоро установлен вектор, представляющий собою функцию $\boldsymbol{F}(P)$, выражающую эту силу, отнесенную к единице массы.

Понятие о позиционной силе допускает непосредственное обобщение. Мы к этому придем, если представим себе, что физические условия, которые в некоторой части пространства C определяют силу $\boldsymbol{F}$, действующую на помещенную в определенном ее месте материальную точку, изменяются с течением времени; в этом случае сила $\boldsymbol{F}$, отнесенная к единице массы, будет функцией не только от точки приложения P, но и от времени t, т. е

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(P \mid t), \tag{8}$$

или, в координатах:

$$X = X(x, y, z \mid t),\ Y = Y\ (x, y, z \mid t),\ Z = Z(x, y, z \mid t).$$

Можно итти и дальше в порядке обобщения; может случиться, что в области C сила $\boldsymbol{F}$ зависит не только от точки приложения и от времени, но и от мгновенной скорости, с которой материальная точка, несущая единицу массы, приходит в рассматриваемый момент в это положение: иначе говоря, может иметь место соотношение:

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(P, \dot{P} \mid t), \tag{9}$$

или, в координатах:

$$\left.\begin{aligned} X &= X(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \mid t), \\ Y &= Y(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \mid t), \\ Z &= Z(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \mid t). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Можно было бы представить себе силы, следующие законам еще более общего характера, например, зависящие от ускорения, а также от последовательных производных (векториальных) от ускорения; так это, например, действительно имеет место в так называемых явлениях последействия. Но в теоретической механике обыкновенно ограничиваются рассмотрением сил типа (9), так как таковыми в подавляющем большинстве случаев являются силы, с которыми нам приходится встречаться в природе.

По аналогии с тем, что мы, согласно приведенному выше определению, понимали под данной позиционной силой в простейшем значении этого слова, мы и здесь будем считать, что сила рассматриваемого общего типа задана, если нам известны функции, составляющие правые части уравнений (9) и (10); совершенно ясно, что позиционные силы (7), а также силы типа (8) входят в состав этой последней категории сил как частные случаи.

23. Движущие силы и сопротивления. Пассивные сопротивления. Установим здесь некоторое различие между силами качественного характера. Если точка находится в движении и $\boldsymbol{F}$ есть сила или одна из сил, производящих это движение, то говорят, что $\boldsymbol{F}$ есть *движущая сила* или *сопротивление* по отношению к рассматриваемому движению в данный момент в зависимости от того, образует ли $\boldsymbol{F}$ в этот момент с направлением движения острый или тупой угол.

Из самого этого определения явствует, что одна и та же позиционная сила может оказаться, в зависимости от обстоятельств, то движущей силой, то сопротивлением. В самом деле, если мы фиксируем определенную точку нашей области, то сила в ней будет одна и та же, с какой бы скоростью через нее ни проходило движущееся тело; достаточно переменить сторону, в которую эта скорость обращена, чтобы движущая сила оказалась сопротивлением, и обратно. Таким образом, в частности, вес тела представляет собой движущую силу, когда тело падает вниз, и сопротивление, когда оно поднимается вверх.

Впрочем, в природе существуют некоторые силы, которые никогда не проявляются в качестве движущих сил. Такие силы получили название *пассивных сопротивлений*. Типичными примерами этого рода сил являются различные сопротивления среды (например воздуха и воды) или трения, вызываемые соприкосновением движущегося тела с другими материальными телами. Они всегда действуют в направлении, противодействующем движению, т. е. в сторону, противоположную скорости точки, если речь идет только о движении материальной точки.

24. Силовые поля. Прежде чем пойти дальше, целесообразно присоединить еще некоторые соображения относительно позиционных сил.

Часть пространства C, в которой определена позиционная сила, называется силовым полем; вместе с тем, под *силой поля* в любой его точке P разумеют ту силу $\boldsymbol{F}$, которая в этой точке действовала бы на единицу массы и которая поэтому геометрически совпадает с соответствующим ускорением.

Силовое поле является *однородным*, если соответствующая сила во всем поле остается постоянной (по величине и направлению), т. е. не изменяется от точки к точке; так это, например, имеет место, по крайней мере, с весьма большим приближением в случае силы тяжести, если рассматривается настолько малая область земли, что в ней можно пренебречь изменением направления вертикали.

В этом случае вектор, представляющий силу поля, есть хорошо нам известный вектор $\boldsymbol{g}$; на тело (материальную точку) с массой m действует, как мы знаем, вес $m\boldsymbol{g}$, представляющий собой произведение силы поля на массу материальной точки. Экспериментально установлено, что в полях, которые действительно имеют место в природе, осуществляется аналогичное обстоятельство, т. е. если $\boldsymbol{F}$ есть сила поля в данном ее пункте (это значит — сила, которая действует на помещенную в ней единицу массы), то сила, которая в том же пункте действует на произвольную массу m, выражается через $m\mu$.

Этот экспериментальный факт обыкновенно выражают так: *весомая* или *гравитационная* масса(т. е. коэфициент, на который нужно умножить силу поля, чтобы получить силу, действующую на рассматриваемое тело) *тождественна с инертной массой*, т. е. определяющей отношение между ускорением и силой (рубр. **16**). В дальнейшем, когда мы будем говорить о силовых полях, мы всегда будем иметь в виду такие, в которых это совпадение гравитационной и инертной массы действительно имеет место.

25. Силовые линии поля. Чтобы получить геометрический образ того, как в данном поле меняется соответствующая сила $\boldsymbol{F}$, целесообразно пользоваться так называемыми *линиями сил*, или *силовыми линиями поля*.

Возьмем некоторую часть силового поля, притом такую, в которой сила $\boldsymbol{F}$ вовсе не обращается в нуль. Исходя из какой-либо произвольной точки P_0, проведем через нее вектор, представляющий действующую в этой точке силу, и на нем возьмем другую точку P_1, весьма близкую к P_0. На линии действия силы, приложенной в P_1, которая вообще будет отлична от P_0P_1, вновь выберем точку P_2, весьма близкую к P_1, опять в направлении действующей силы. Этот процесс мы будем продолжать, пока он не выведет нас за пределы поля или не возвратит нас в исходную точку P_0.

Этим путем мы получим ломаную линию $P_0P_1P_2P_3\ldots$, сконструированную таким образом, что сила, действующая в каждой из ее вершин, направлена по примыкающей к этой вершине стороне. Если точки $P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots$ неограниченно друг к другу приближаются, то в пределе получается линия (обыкновенно кривая) λ, в каждой точке которой действующая сила поля F направлена по касательной к кривой. За сторону, в которую кривая обращена, принимают ту, в которую обращена действующая сила.

Каждая линия λ, построенная таким образом, называется *линией сил*, или *силовой линией поля*. Из самого процесса построения силовых линий ясно, что через каждую точку поля проходит одна, и только одна, силовая линия.

Постараемся выразить силовые линии поля аналитически. Для этого заметим, что они характеризуются тем условием, что элементарное смещение dP вдоль любой из них от какой-либо ее точки должно иметь то же направление и ту же сторону обращения, что и сила поля F в этой точке P; таким образом, силовые линии в каждой части поля, в которой сила не обращается в нуль, определяются совокупностью ∞^2 интегральных кривых системы диференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}.$$

Эта система эквивалентна системе двух уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями, зависящими от одной независимой переменной; так, например, если Z не обращается тождественно в нуль, то эта система имеет вид:

$$\frac{dx}{dz}=\frac{X}{Z}, \quad \frac{dy}{dz}=\frac{Y}{Z}.$$

Здесь z играет роль независимой переменной, x и y суть неизвестные функции; система интегралов $x=x(z)$, $y=y(z)$, определяющая силовые линии, в конечном виде будет содержать две произвольные постоянные, которыми мы можем распорядиться так, чтобы x и y приняли предуказанные значения для произвольно выбранного значения z. Геометрически это значит, что рассматриваемая силовая линия проходит через указанную точку поля. Наличие двух постоянных в так называемых уравнениях силовых линий показывает, что мы имеем здесь дело с системой ∞^2 кривых, одна, и только одна, из которых проходит через любую заданную точку поля (в которой $Z \neq 0$).

Для однородного поля, даже для всякого поля, в котором сила от места к месту сохраняет одно и то же направление, силовыми линиями служат параллельные прямые. Напротив, если сила поля постоянно направлена к неподвижному центру O, то силовыми линиями служат прямые, образующие связку с центром в той же точке O.

26. Консервативные силы. Среди силовых полей по причинам, которые мы лучше выясним в следующем параграфе, наиболее замечательны те, в которых скалярное произведение $\boldsymbol{F}dP$ силы поля $\boldsymbol{F}$ на произвольное элементарное смещение dP точки ее приложения P представляет собой полный диференциал некоторой функции U от P, точнее—от ее координат x, y, z:

$$\boldsymbol{F}dP = dU. \tag{11}$$

Такого рода силовые поля называются *консервативными*; функция $U(x, y, z)$, которую мы будем считать однозначной, конечной, непрерывной и допускающей во всем поле производные, по крайней мере, до второго порядка включительно, называют *потенциалом*, или *силовой функцией* поля [1]).

Заметим здесь, что если некоторая функция U удовлетворяет требованию (11), то ей удовлетворяют и все функции вида $U + c$, где c означает аддитивную произвольную постоянную. В конкретных случаях этой постоянной обыкновенно пользуются для того, чтобы присвоить потенциалу U в заданной точке определенное, заранее предписанное значение, например нуль.

Характеристическое свойство (11) консервативного силового поля совершенно не зависит от системы отсчета; оно остается в силе, как бы мы ни выбрали триэдр, к которому относим силовое поле. Наконец, если напишем уравнение (11) в раскрытой форме:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy + \frac{\partial U}{\partial z}\,dz, \tag{11'}$$

и заметим, что это тождество должно иметь место для каких угодно значений элементарного смещения dx, dy, dz, то придем к заключению, что

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{12}$$

Полезно будет здесь отметить, что это предложение допускает более общее выражение; именно: *производная от силовой функции, взятая в каком угодно направлении, представляет собой не что иное, как компоненту силы поля по этому направлению* [2]). Чтобы оправдать это утверждение, достаточно воспользоваться любым из уравнений (12), например первым: оно именно и выражает, что производная от U по оси x представляет собой компоненту силы поля по этой оси; но, с одной стороны, как мы знаем, соотно-

---

[1]) Некоторые авторы называют функцию U исключительно последним термином (силовой функцией), сохраняя наименование потенциалов для функции $-U$.

[2]) См. приложение IV, „О градиенте скалярной функции и градиентном векторном поле“. (*Ред.*)

шения (12) останутся в силе, как бы мы ни выбрали координатные оси, а с другой стороны, за ось x мы можем принять любую прямую. Но то же можно доказать и непосредственно, основываясь на соотношении (11) и на определении ориентированной производной [1]). В самом деле, под производной, взятой в данном направлении, понимают предел отношения наращения функции U при смещении в этом направлении к длине самого смещения (точнее, это есть предел этого отношения, когда смещение стремится к нулю). Если теперь обозначим через $\boldsymbol{n}$ — версор, соответствующий смещению dP, а через ds — бесконечно малую длину такого смещения, то соотношение (11) можно написать в виде:

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{n} \cdot ds = dU;$$

разделяя обе части на ds, мы получаем равенство, которое нам нужно было доказать, ибо отношение двух диференциалов $\frac{dU}{ds}$ как раз представляет собой производную функцию U в направлении $\boldsymbol{n}$, а $\boldsymbol{F}\boldsymbol{n}$ (I, рубр. 20) представляет компоненту силы $\boldsymbol{F}$ по тому же направлению.

Так как уравнения (12) представляют собой непосредственные следствия соотношений (11′) или (11), то консервативное поле может быть определено уравнениями (12); иными словами, под консервативным полем разумеют такое силовое поле, в каждой точке которого составляющие силы поля по координатным осям представляют собой частные производные некоторой функции, положения точки приложения (потенциала).

27. Исключая функцию U из уравнений (12), мы находим три уравнения:

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x};$$

они обнаруживают, как это должно быть, собственно, известно из анализа, что существование потенциала (т. е. тот факт, что $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ представляет собой полный диференциал) налагает ограничительные условия на функции X, Y, Z от переменных x, y, z; другими словами, позиционная сила $\boldsymbol{F}$, вообще говоря, неконсервативна.

В качестве примера можно положить:

$$X = -y, \quad Y = x, \quad Z = 0;$$

поле, определяемое этими уравнениями, несомненно, неконсервативно, потому что разность

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = -2$$

не равна нулю, как это должно иметь место всякий раз, когда потенциал существует.

[1]) Читатель найдет это доказательство в упомянутом приложении IV, приведенное в иной концепции. (*Ред.*)

Очень важно заметить, что при определении консервативных сил мы предполагаем как предварительное условие качественного свойства, что функция $U(P)$, удовлетворяющая уравнениям (11), *однозначна*, т. е. в любой точке P она имеет одно единственное значение, где бы эта точка P ни была взята на всем протяжении поля. Однако это ограничение (относящееся к природе функции или, если угодно, к размеру рассматриваемого поля) вполне согласуется с тем, что мы обыкновенно предполагаем относительно функций, рассматриваемых в элементах анализа; и в большинстве случаев этого вполне достаточно для механических приложений; но в некоторых случаях приходится, однако, отказаться от ограничительного предположения однозначности функций на всем протяжении поля (ср., например, случай d) в рубр. 29).

28. В консервативном поле, имеющем потенциал U, поверхности

$$U = \text{const},$$

называются *эквипотенциальными* поверхностями, или *поверхностями уровня*; это суть поверхности, на каждой из которых потенциал имеет во всех ее точках одинаковое значение; еще иначе: каждая эквипотенциальная поверхность может быть рассматриваема как геометрическое место точек, в которых потенциал имеет заданное значение. Через каждую точку x_0, y_0, z_0 поля проходит одна, и только одна, эквипотенциальная поверхность; ее уравнение имеет вид:

$$U(x, y, z) = U(x_0, y_0, z_0).$$

Если точка приложения силы получает элементарное смещение dP по эквипотенциальной поверхности, проходящей через ее первоначальное положение P, то

$$\boldsymbol{F}\,dP = 0,$$

так как потенциал U вдоль эквипотенциальной поверхности сохраняет постоянное значение; но это означает, что сила $\boldsymbol{F}$ перпендикулярна к смещению dP. Так как это справедливо, каково бы ни было элементарное смещение dP по этой эквипотенциальной поверхности, то мы отсюда заключаем, что в любой точке сила нормальна к проходящей через эту точку эквипотенциальной поверхности; иными словами, *в консервативном поле силовыми линиями служат ортогональные траектории эквипотенциальных поверхностей.*

29. **Примеры консервативных полей.** а) Всякое однородное поле является консервативным.

В самом деле, если $\boldsymbol{F}$ есть сила (постоянная по величине, направлению и стороне обращения), то достаточно выбрать ось z, по направлению и стороне обращения совпадающей с $\boldsymbol{F}$, и мы получим:

$$\boldsymbol{F}\,dP = F\,dz,$$

а это есть полный диференциал. Интегрируя, находим, что потенциал до аддитивной постоянной выражается через Fz; следовательно, эквипотенциальными поверхностями служат плоскости, перпендикулярные к постоянному направлению силы. В частности, для силы веса (если за ось z примем вертикаль, обращенную вниз) потенциал, отнесенный к единице массы, выражается через gz (также, конечно, до аддитивной постоянной).

b) Далее, рассмотрим поле, в котором сила имеет постоянное направление, напряжение же ее зависит только от расстояния точки ее приложения от некоторой постоянной плоскости, перпендикулярной к направлению сил. Если эту плоскость примем за координатную плоскость x, y, то компоненты силы по осям x и y будут равны нулю, третья же компонента будет определенной функции $\varphi(z)$ одной только координаты z; мы будем поэтому иметь:

$$\boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{P} = \varphi(z)\,dz;$$

интегрируя от начального значения z_0, выбранного совершенно произвольно, найдем, что потенциалом будет служить функция от одной только переменной z:

$$\int_{z_0}^{z} \varphi(z)\,dz$$

(опять-таки, конечно, до произвольной постоянной); эквипотенциальными поверхностями и здесь будут служить плоскости, перпендикулярные к постоянному направлению силы.

c) Рассмотрим, наконец, силовое поле, в котором в каждой точке P сила $\boldsymbol{F}$ направлена к некоторой постоянной точке O, напряжение же ее в каждой точке зависит исключительно от расстояния $\rho = OP$ этой точки от центра O (*центральная сила*). Такого рода сила $\boldsymbol{F}$ в отдельных точках поля может быть обращена от центра O к точке приложения (*сила отталкивания*) или в противоположную сторону (*сила притяжения*). Мы будем обозначать через $\varphi(\rho)$ компоненту силы $\boldsymbol{F}$ по ориентированному направлению OP; иными словами, функция φ сама по себе будет иметь положительное или отрицательное значение в зависимости от того, является ли сила отталкивательной или притягательной. Во всяком случае, скалярное произведение $\boldsymbol{F}d\boldsymbol{P}$ можно выразить, как произведение компонент $\boldsymbol{F}$ и $d\boldsymbol{P}$ по тому же самому ориентированному направлению OP; мы будем, следовательно, иметь

$$\boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{P} = \varphi(\rho)\,d\rho.$$

Интегрируя этот полный диференциал от произвольно взятого значения ρ_0, мы получим для потенциала, как всегда с точностью до произвольной постоянной, функцию от одной только переменной:

$$U(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \varphi(\rho)\,d\rho.$$

Эквипотенциальные поверхности выражаются в этом случае уравнениями:

$$U(\rho) = \text{const.},$$

или, что то же,

$$\rho = \text{const.}$$

Ясно, что это суть концентрические сферы с общим центром в точке O; силовыми же линиями, как уже было указано в рубр. 25, служат прямые связки, выходящие из того же центра.

d) Дадим еще пример потенциала, не однозначного во всем поле, в котором имеет место соотношение (11); и сначала покажем такой пример в двумерном поле, которым послужит вся плоскость Oxy.

Введем снова полярные координаты ρ и θ (с полюсом O и полярной осью Ox; эти координаты с декартовыми будут, таким образом, связаны уравнениями: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$). Положим, что сила поля F в произвольной точке P, отличной от начала O, определена следующим образом: по направлению она перпендикулярна к радиусу-вектору OP и обращена в сторону возрастающих аномалий; напряжение же ее выражается через $\frac{k}{\rho}$, где k есть постоянная. Мы исключили начало, поскольку это определение силы в начале координат оказалось бы дефектным (направление неопределенное, напряжение бесконечно большое).

Скалярное произведение FdP мы можем вычислить как произведение из напряженности силы $\frac{k}{\rho}$ на компоненту $\rho d\theta$ смещения по направлению F (II, рубр. 19); мы получим, очевидно, $kd\theta$, так что произведение $k\theta$ может быть рассматриваемо как потенциал поля. Если для аномалии θ_0 в отдельной точке P_0 зафиксируем произвольно одно из ее значений, например, то, которое содержится между нулем и 2π, в качестве значения переменной θ, а следовательно, зафиксируем и $U = k\theta$, то в каждой другой точке P значение потенциала может быть получено непрерывным изменением θ, исходя от значения θ_0; для этого нужно перейти от точки P_0 к точке P по какой-либо непрерывной кривой. Однако при этом, поскольку мы рассматриваем всю плоскость (с изъятием одной только точки O), совершенно ясно, что функция $U = k\theta$ уже не будет однозначной в каждой точке; в самом деле, если будем исходить из точки P с определенным значением θ и обойдем по замкнутой кривой вокруг начала, перемещаясь все время в одну и ту же сторону, то мы вновь придем к точке P со значением функции, увеличенным или уменьшенным на $2\pi k$ при каждом обороте вокруг начала. Но тот же потенциал $U = k\theta$ остается все-таки однозначным в каждой точке поля, если мы принимаем за поле действия силы не всю плоскость, но ограниченную часть ее, из которой исключена точка O и которая имеет такую связность, что в ней невозможно обойти начало (не покидая этой области) [1].

Этот пример легко перенести на трехмерное пространство. Для этого достаточно для каждой точки P с координатами x, y, z взять ее проекцию Q с координатами $0, 0, z$ на ось z и параллель, т. е. окружность, имеющую центр в точке Q и проходящую через P в плоскости, перпендикулярной к оси z. Сила $\boldsymbol{F}$ в точке P определяется, как в предыдущем случае, в плоскости параллели. Во всех точках прямой, параллельной оси z, мы будем иметь, таким образом, один и тот же вектор $\boldsymbol{F}$.

Если вместо декартовых координат x, y, z возьмем так называемые цилиндрические координаты ρ, θ, z, где ρ и θ, как выше, представляют собою не что иное, как полярные координаты относительно x и y, т. е. связаны с декартовыми соотношениями $x = r\cos\theta$ и $y = r\sin\theta$, то мы вновь получим для потенциала выражение $U = k\theta$; эта функция однозначна в ограниченной части поля, но не во всем пространстве, так как она возрастает на $\pm 2k\pi$ после каждого оборота в одну или другую сторону вокруг оси.

10. Диференциальные уравнения движения точки.

30. Выяснив, в каком смысле мы понимаем задание силы, возвратимся ко второй из проблем, перечисленных в рубр. **21.** Чтобы сразу рассмотреть наиболее общий случай, предположим, что сумма $\boldsymbol{F}$ всех сил, действующих на материальную точку P массы m, зависит от положения точки, от ее скорости и, кроме того, от времени. В таком случае движение точки P в силу основного соотношения динамики должно удовлетворять векторному диференциальному уравнению:

$$m\ddot{P} = \boldsymbol{F}(P, \dot{P} \mid t), \tag{13}$$

или же, по отношению к трем неподвижным осям, трем диференциальным уравнениям второго порядка:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= X(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \mid t), \\ m\ddot{y} &= Y(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \mid t), \\ m\ddot{z} &= Z(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \mid t); \end{aligned}\right\} \tag{13'}$$

Отсюда ясно, что аналитическая проблема определения движения материальной точки, вызываемого данной силой, не отличается от той задачи, которую мы уже рассматривали в кинематике, именно об определении движения точки по данному ее ускорению (II, рубр. 25).

[1] Такой областью, очевидно, мог бы служить первый квадрант; ею не мог бы служить круг с центром в точке O.

Общий интеграл уравнения (13) или (13′) зависит от *шести* произвольных постоянных; данным условиям могут, таким образом, удовлетворять ∞^6 различных движений, каждое из которых будет определено, если мы надлежащим образом зададим еще шесть дополнительных условий. Наиболее подходящими заданиями являются указания положения точки в начальный момент $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и ее скорости $v_0(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ в тот же момент.

В некоторых случаях возникают упрощения, непосредственно обусловливаемые данными задачами. Например, если данная сила F постоянно параллельна неподвижной плоскости, то достаточно принять плоскость $z=0$ параллельной этой неподвижной плоскости, чтобы компонента Z силы F оказалась тождественно равной нулю; тогда третье из уравнений (13′) принимает простую форму:

$$m\ddot{z}=0;$$

непосредственное интегрирование дает:

$$\dot{z}=\dot{z}_0, \quad z=\dot{z}_0 t+z_0, \tag{14}$$

где z_0 и $\dot{z}_0$ обозначают первые две произвольные постоянные, а именно третью компоненту скорости и третью координату движущейся точки в момент $t=0$. Отсюда также вытекает в силу второго уравнения (14), что всякий раз, как начальная скорость в этих условиях задания параллельна неподвижной плоскости (т. е. когда $\dot{z}_0=0$), движение оказывается плоским.

Во всяком случае, подставив в первые два диференциальных уравнения движения (13′) выражения (14), мы приведем задачу к интегрированию двух диференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями $x(t)$ и $y(t)$:

$$m\ddot{x}=X(x, y, \dot{z}_0 t+z_0; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}_0 \mid t),$$

$$m\ddot{y}=Y(x, y, \dot{z}_0 t+z_0; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}_0 \mid t),$$

общий интеграл которых будет содержать еще четыре дополнительных произвольных постоянных.

Аналогично этому, если сила F имеет постоянное направление, то будет целесообразно принять ось x параллельной силе F; компоненты Y и Z обратятся в нуль; второе и третье из уравнений (13) примут вид:

$$m\ddot{y}=0 \quad \text{и} \quad m\ddot{z}=0;$$

интегрируя, мы отсюда получим:

$$\dot{y}=\dot{y}_0, \quad \dot{z}=\dot{z}_0; \quad y=\dot{y}_0 t+y_0, \quad z=\dot{z}_0 t+z_0,$$

где $y_0, z_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ обозначают четыре произвольные постоянные. Если начальная скорость параллельна постоянному направлению силы, то движение окажется прямолинейным. В общем случае, если в первое из уравнений (13′) подставим полученные таким образом выражения для y и z (а также $\dot{y}$ и $\dot{z}$), то задача сведется к интегрированию одного диференциального уравнения второго порядка:

$$m\ddot{x} = X\,(x,\ \dot{y}_0 t + y_0,\ \dot{z}_0 t + z_0;\ \dot{x},\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0 \,|\, t),$$

общий интеграл которого будет содержать еще две произвольные постоянные.

31. В заключение заметим еще, что иногда бывает целесообразным проектировать основное уравнение (13) не на неподвижные декартовы оси, а на ребра главного триэдра (подвижного) траектории; как было указано в рубр. 76 гл. I, эти три ребра определяются версорами ***t***, ***n***, ***b*** (касательная, главная нормаль, бинормаль). Принимая во внимание известные выражения для компонент касательного и центростремительного ускорений (II, рубр. 27), получим, таким образом, так называемые внутренние уравнения движения:

$$m\ddot{s} = F_t, \quad m\frac{v^2}{r} = F_n, \quad 0 = F_b; \tag{15}$$

здесь, как обычно, s есть дуга траектории, r — радиус кривизны, v — напряженность скорости, а F_t, F_n, F_b обозначают компоненты силы по ориентированным направлениям соответственно ***t***, ***n***, ***b***.