ГЛАВА VIII.

Вторичные или производные понятия механики.

1. Понятия о силе и массе и кинематические характеристики движения приводят к другим понятиям механики, которые называются *вторичными*, или *производными*; каждое из них выражает ту или иную особенность или же то или иное физическое проявление динамического процесса. Мы здесь дадим определения этих понятий и изучим взаимные отношения их.

1. Работа.

2. **Работа постоянных сил.** В повседневной речи мы обыкновенно говорим, что человек *работает*, когда он совершает мускульное усилие, чтобы произвести то или иное перемещение материальных предметов; таким образом, даже в разговорной речи мы связываем понятие о работе с *силой* и *перемещением*. Имея в виду дать этому понятию точное механическое определение, мы начнем с того случая, когда материальная точка находится под действием *постоянной* силы. Если точка приложения постоянной силы $\boldsymbol{F}$ получает перемещение $\overline{P_1P_2}$, то *работой силы $\boldsymbol{F}$ на этом смещении* называют скалярное произведение двух векторов — силы и смещения.

Таким образом, если обозначим работу через L, то

$$L = \boldsymbol{F}\overline{P_1P_2}; \tag{1}$$

вследствие известного свойства скалярного произведения (I, рубр. 20) можно сказать, что *работа выражается произведением из величины силы на компоненту смещения по направлению силы*, или, наоборот, *произведением из величины смещения на компоненту силы по направлению смещения.*

Работа силы L называется *моторной* или *работой двигателя*, если она имеет положительное значение, и *работой сопротивления*, если она имеет отрицательное значение; первый случай имеет место, когда сила образует со смещением острый угол, второй, — когда этот угол тупой.

Далее, если смещение перпендикулярно к силе, то работа равна нулю; и обратно, *если сила отлична от нуля, а работа ее* *при данном смещении (тоже отличном от нуля) равна нулю, то смещение перпендикулярно к действующей силе.*

Если X, Y, Z суть компоненты силы $\boldsymbol{F}$ по осям координатного триэдра, а Δx, Δy, Δz суть компоненты смещения, то работа выражается формулой:

$$L = X\Delta x + Y\Delta y + Z\Delta z;$$

в частности, для бесконечно малого смещения dP получаем *бесконечно малую* работу или *элемент работы*:

$$dL = \boldsymbol{F}dP = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

При постоянной силе, вследствие основных свойств скалярного произведения, всегда имеют место тождества:

$$(-\boldsymbol{F})\,\overline{P_1P_2} = -(\boldsymbol{F}\overline{P_1P_2}),$$
$$\boldsymbol{F}\overline{P_2P_1} = -(\boldsymbol{F}\overline{P_1P_2}),$$
$$(\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2)\,\overline{P_1P_2} = \boldsymbol{F}_1\overline{P_1P_2} + \boldsymbol{F}_2\overline{P_1P_2},$$
$$\boldsymbol{F}\overline{P_1P_2} + \boldsymbol{F}\overline{P_2P_3} + \ldots + \boldsymbol{F}\overline{P_{n-1}P_n} = \boldsymbol{F}\overline{P_1P_n};$$

они выражают следующее:

a) *Если сила или смещение меняет свой знак* (т. е. меняет сторону обращения на противоположную), *то работа также меняет знак* (сохраняя без изменения абсолютное значение).

b) *Работа равнодействующей нескольких сил, приложенных к одной и той же точке на данном смещении последней, равна сумме (алгебраической) работ отдельных сил на том же смещении.*

c) *Сумма (алгебраическая) работ силы, соответствующих нескольким последовательным перемещениям, равна работе, которая была бы произведена на результирующем смещении* (т. е. представляющем собой векторную сумму данных смещений).

3. Работа переменной силы. Пусть теперь $\boldsymbol{F}$ будет сила, произвольным образом меняющаяся с течением времени. Чтобы рассмотреть наиболее общий случай, предположим, что сила $\boldsymbol{F}$ зависит от времени, от положения точки ее приложения P и от скорости последней $\dot{P}$. Положим также, что для этой точки P установлено некоторое движение

$$P = P(t), \text{ или } x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t); \qquad (2)$$

мы будем здесь даже предполагать, что это движение совершенно не зависит от того, которое произвела бы сила $\boldsymbol{F}$, если бы точка P была свободна и двигалась бы только под действием этой силы. Это значит, что движение, выражаемое уравнениями (2), может быть произведено совокупностью сил, в состав которой входит и сила $\boldsymbol{F}$; определяется, однако, только работа, произведенная именно силой $\boldsymbol{F}$. В этих условиях сила $\boldsymbol{F}$ при заданных уравнениях (2) может быть определена в функции одного только времени; поэтому в течение элемента времени dt, содержащегося между двумя произвольными моментами t и $t+dt$, силу $\boldsymbol{F}$ можно рассматривать (до бесконечно-малых порядка dt) как постоянную, равную одному из значений, которое она имеет в этом элементарном интервале от t до $t+dt$. Поэтому за *элемент работы* переменной силы $\boldsymbol{F}$, соответствующей бесконечно малому смещению от $P(t)$ до $P(t+dt)$, принимается бесконечно малое скалярное произведение

$$dL = \boldsymbol{F}\, dP.$$

Если через $\boldsymbol{v}$ обозначим скорость движения (2) и примем во внимание выражение элементарного смещения $dP = \boldsymbol{v}\, dt$, то определенному таким образом элементу работы можно придать вид:

$$dL = \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}\, dt = (X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z})\, dt; \tag{3}$$

при этом предполагается, что X, Y, Z выражены на основе уравнений (2) и их производных в функции одной только переменной t — времени.

В соответствии с этим *под работой силы* $\boldsymbol{F}$ при движении (2) точки ее приложения в промежутке между произвольными моментами t_1 и t_2 или между положениями точки $P(t_1)$ и $P(t_2)$ разумеют сумму всех элементарных работ (3) на пути последовательных перемещений точки P при переходе из первого положения во второе; это значит, полагаем:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} (X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z})\, dt, \tag{4}$$

где в правой части мы имеем дело с обыкновенным определенным интегралом.

Основываясь на элементарном свойстве определенного интеграла, мы непосредственно приходим к обобщению на случай переменной силы теоремы c), установленной в рубр. 2 для работы постоянных сил, именно: *работа силы, произведенная на двух последовательных путях точки ее приложения, равна сумме работ, произведенных на каждом из этих путей.*

4. Предыдущее определение работы, как интеграла элементарных работ, приобретает более конкретный смысл, если, восходя к возникновению понятия об интеграле, мы представим себе L как предел надлежащим образом составленной суммы.

Обозначим через c дугу траектории, описанную точкой приложения P силы $\boldsymbol{F}$ от момента t_1 до момента t_2, и представим себе вписанной в нее произвольную ломаную линию; каждой стороне этой ломаной ΔP отнесем одно из тех значений силы $\boldsymbol{F}$, которые она имеет на соответствующей дуге (например, значение в начальной точке отрезка при движении точки P в момент, когда она через это положение проходит); рассмотрим сумму

$$\sum \boldsymbol{F}\, dP \tag{5}$$

работ этих сил, предполагая таковые постоянными на протяжении каждого смещения dP. Если через v обозначим скорость точки P в начальной точке отрезка ΔP, то

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta t}=v;$$

поэтому

$$\frac{\Delta P}{\Delta t}=v+\bar{\varepsilon},$$

т. е.

$$\Delta P=v\,dt+\bar{\varepsilon}\,dt,$$

где $\bar{\varepsilon}$ есть бесконечно малая одновременно с dt. Таким образом сумму (5) можно представить в виде:

$$\sum Fv\,dt+\sum F\bar{\varepsilon}\,dt. \tag{5'}$$

Если все стороны нашей ломаной стремятся к нулю, то второе слагаемое предыдущей суммы стремится к нулю, как это известно из анализа; первое же стремится к интегралу

$$\int_{t_1}^{t_2} Fv\,dt,$$

т. е. к работе L; мы отсюда заключаем, что

$$L=\lim\sum F\,dP.$$

Таким образом теоретически оправдано определение работы, выражаемое равенством:

$$L=\int_c F\,dP=\int_c X\,dx+Y\,dy+Z\,dz;$$

формально это равенство может быть выведено из равенства (4), если в нем заменить $v\,dt$ через dP, т. е. подставить dx, dy, dz вместо $\dot{x}\,dt$, $\dot{y}\,dt$, $\dot{z}\,dt$.

5. Работа позиционных сил. В этом случае для вычисления работы нет необходимости знать, как мы это предполагали выше в общем случае, уравнения движения точки приложения P; достаточно знать только траекторию. В самом деле, пусть

$$P=P(s),\ \text{или}\ x=x(s),\ \ y=y(s),\ \ z=z(s) \tag{6}$$

будут параметрические уравнения этой траектории, в которых мы под s разумеем длину дуги, отсчитываемую от произвольно выбранного начала. Когда материальная точка P описывает эту кривую под действием данной позиционной силы $\boldsymbol{F}(P)$, то последняя определяется в функции от одной только переменной s. С другой стороны, элементарное смещение

$$dP = \frac{dP}{ds} ds$$

есть не что иное, как произведение из ds на версор $\frac{dP}{ds} = \boldsymbol{t}$, касательный к траектории; этот версор также представляет собой функцию одной только переменной s. Элемент работы в этом случае можно выразить в виде:

$$dL = \boldsymbol{Ft}\, ds = \left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right) ds;$$

если через F_t обозначим компоненту силы по касательной к траектории в сторону возрастающих s, то

$$dL = F_t\, ds;$$

а так как F_t зависит исключительно от s, то работа, выполненная силой $\boldsymbol{F}$ при движении точки по кривой между точками $P_1(t)$ и $P_2(t)$, выражается обыкновенным определенным интегралом:

$$L = \int\limits_{s_1}^{s_2} F_t ds = \int\limits_{s_1}^{s_2} \left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right) ds,$$

совершенно независимо от того, по какому закону происходит движение за этот промежуток времени.

Отсюда следует (рубр. 2,a), *что работа позиционной силы меняет знак, коль скоро меняется сторона обращения пути точки* ее приложения; иначе говоря, работа позиционной силы, выполненная на некотором пути, отличается только знаком от работы, выполняемой силой в том же поле при обратном движении по тому же пути.

Это существенно отличает рассматриваемый случай от того, что имеет место, когда сила зависит непосредственно от времени или от скорости; в этом последнем случае, помимо пути, существенную роль играет также закон, по которому точка совершает свое движение с течением времени; и даже если этот закон нам дан для прямого движения (т. е. от P_1 до P_2), то все же остается неопределенным закон обратного движения.

6. Работа консервативных сил. Для этого частного типа позиционных сил имеет место чрезвычайно замечательное обстоятельство, именно: для вычисления работы в этом случае не только нет надобности знать закон движения, но нет даже нужды знать его траекторию; достаточно указать только крайние точки пути P_1 и P_2. В самом деле, в силу характеристического тождества, которым определяются консервативные силы

$$\boldsymbol{F}\, dP = dU,$$

где $U(x, y, z)$ представляет собой потенциал; элемент работы выражается в этом случае через

$$dL = dU.$$

Интегрируя это выражение, мы поэтому получаем для работы $L_{P_1P_2}$, произведенной силой на каком угодно пути точки ее приложения между P_1 и P_2, значение

$$L_{P_1P_2} = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1), \tag{7}$$

где x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 означают координаты точек P_1 и P_2. Мы приходим, таким образом, к следующему выводу: *каков бы ни был путь, описанный точкой приложения консервативной силы в поле ее действия, выполненная ею работа равна разности потенциалов в конечной и исходной точках этого пути.*

Пользуясь аддитивной произвольной постоянной, входящей в состав силовой функции, мы можем всегда достигнуть того, чтобы в определенной точке поля P_0 потенциал обращался в нуль; если теперь обозначим через $P(x, y, z)$ произвольную точку поля, то соотношение (7) дает:

$$L_{P_0P} = U(x, y, z).$$

Таким образом потенциал в точке P можно определить как работу, выполненную силой поля, когда ее точка приложения перемещается из постоянного начального положения P_0 в положение P, по какому бы пути это перемещение ни происходило. Благодаря этому становится физически ясным, что потенциал не зависит от системы отсчета, хотя формальное его определение и было поставлено в связь с компонентами силы по осям координат; мы это уже указывали при определении консервативных сил (VII, рубр. 26).

7. Свойство, установленное в предыдущей рубрике, характерно для консервативных сил в том смысле, что им консервативные силы определяются; это значит, если сила $\boldsymbol{F}$ обладает тем свойством, что работа, совершенная при продвижении точки ее приложения между двумя положениями P_1 и P_2 в некоторой части пространства C, зависит только от этих конечных точек P_1 и P_2, а не от траектории, то $\boldsymbol{F}$ есть консервативная сила. В самом деле, если мы выберем произвольно постоянную точку P_0, то работа силы $\boldsymbol{F}$ при перемещении от P_0 к любой другой точке $P(x, y, z)$ области C, в силу сделанного предположения, представляет собою однозначную функцию от x, y, z:

$$L_{P_0P} = U(x, y, z); \tag{8}$$

и легко доказать, что сила $\boldsymbol{F}$ образуется наличием потенциала U. С этой целью заметим, что при любом элементарном смещении dP, приводящем материальную точку из P в $P_1 = P + dP$, соответствующий элемент работы

$$L_{PP_1} = \boldsymbol{F}\,dP$$

можно вычислить, в силу предположенной независимости работы от пути, используя это свойство силы. В самом деле, представим себе, что точка приложения проходит сначала от P к P_0, а потом от P_0 к P_1. Мы будем, таким образом, иметь:

$$\boldsymbol{F}\,dP = L_{PP_0} + L_{P_0P_1},$$

или также

$$\boldsymbol{F}\,dP = L_{P_0P_1} - L_{P_0P},$$

т. е. в силу соотношения (8):

$$\boldsymbol{F}\,dP = U(x+dx,\ y+dy,\ z+dz) - U\ (x,\ y,\ z);$$

отсюда следует, что по крайней мере до бесконечно малых высших порядков

$$\boldsymbol{F}\,dP = dU;$$

мы отсюда, таким образом, заключаем, что $\boldsymbol{F}$ действительно есть консервативная сила, допускающая потенциал [1]).

8. Отметим, наконец, что из соотношения (7) рубр. 6, в частности, вытекает, что работа, произведенная консервативной силой, равна нулю, если точка ее приложения возвращается в исходное положение, совершив замкнутый путь. В этом находит себе оправдание присвоенное силам, допускающим потенциал, наименование *консервативных* сил. В соответствующих силовых полях работа не приобретается и не теряется, когда точка приложения силы проходит замкнутый контур. Если будем рассматривать работу силы, как вид физической энергии, выделяемой или приобретаемой точкой приложения силы, то мы констатируем, что энергия эта равна нулю при обходе произвольного замкнутого контура; в этом смысле имеет место сохранение энергии.

2. Работа и кинетическая энергия.

9. Возвращаясь теперь к произвольной силе $\boldsymbol{F}$, представим себе, что она приложена к некоторой материальной точке P массы m, и рассмотрим работу, выполненную силой $\boldsymbol{F}$ в течение элемента времени. В силу основного уравнения динамики:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a},$$

элемент работы, выполненной силой $\boldsymbol{F}$, при смещении $dP = \boldsymbol{v}\,dt$, которому подвергается точка P в рассматриваемый элемент времени dt, можно представить в виде:

$$dL = (m\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{v}\,dt).$$

Но ускорение $\boldsymbol{a}$ точки представляет собой не что иное, как производную скорости $\boldsymbol{v}$; поэтому:

$$(m\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{v} = (m\boldsymbol{v})\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}(m\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}).$$

[1]) Некоторое пояснение к устанавливаемому здесь предложению читатель найдет в приложении IV о градиенте данной функции и о градиентном векторе.

Если мы поэтому положим:

$$T=\frac{1}{2}(mv)\,v=\frac{1}{2}\,mv^2=\frac{1}{2}mv^2\,, \tag{9}$$

то оказывается, что работа силы F на пути элементарного смещения материальной свободной точки выражается через

$$dL=dT. \tag{10}$$

На этом важном результате необходимо остановиться и, прежде всего, нужно выяснить значение скалярной величины $\frac{mv^2}{2}$, которую мы обозначили через T.

Это *полупроизведение из массы материальной точки на квадрат ее скорости (скалярной) в определенный момент* называется *живой силой* или *кинетической энергией* (т. е. энергией движения) точки в рассматриваемый момент. Прежде всего, постараемся выяснить наглядным путем смысл этого названия. Каждый из нас ясно себе представляет, что материальные тела, обладающие определенной скоростью, приобретают способность производить работу, которою они не обладают в состоянии покоя. Так, например, молот, опускаемый рукой с определенной скоростью, сообщает столу, скажем, горизонтальному, удар, которого бы стол не испытал, если бы мы опустили на него молот, который к моменту касания со столом уже утратил бы всякую скорость; точно так же воздух в состоянии покоя не проявляет никакого динамического эффекта; между тем, поток воздуха способен вращать колеса ветряной мельницы, производя при этом работу в экономическом значении слова; снаряды производят свои ужасные действия только в том случае, если обладают большой скоростью, и т. д.

Итак, наиболее обычные повседневные опыты показывают, что этого рода энергия, которую материальные тела приобретают в зависимости от состояния своего движения, проявляется в виде эффекта, тем более значительного, чем больше, с одной стороны, абсолютное значение их скорости, а с другой стороны — при равных скоростях, — чем больше их масса; это приводит к заключению, что данное полупроизведению (9) название кинетической энергии вполне согласуется с нашими физическими представлениями [1]).

---

[1]) Второе название живой силы представляется на первый взгляд менее удачным в том отношении, что кинетическая энергия хотя и зависит от силы, но сама по себе таковой не представляет. Но это наименование имеет исторические причины. Лейбниц противополагал *мертвую силу*, или, как мы бы сказали, статическую силу (как давление тяжелого тела, лежащего на плоскости опоры), *живой силе* или силе движения. Ученики Лейбница именно и вычисляли силу, действующую на движущуюся точку при помощи кинетической энергии, которую она сообщала материальной точке и которая проявляется, когда мы заставляем действовать различные постоянные силы на точку, движущуюся по данному пути. В самом деле, возьмем постоянную силу F, которая, будучи приложена к свободной материальной точке массы m, нахо-

При этих соглашениях уравнение (10) выражает следующую теорему (живой силы): *во время движения, обусловливаемого силой, действующей на свободную материальную точку, элемент работы силы в каждый бесконечно малый промежуток времени равен (по величине и по знаку) приращению, которое в этот элемент времени приобрела кинетическая энергия точки.*

В более наглядной форме можно сказать, что всякий раз, как сила F *производит* работу, настолько же возрастает кинетическая энергия точки; всякий же раз, как сила F *поглощает* работу, кинетическая энергия настолько же уменьшается.

Рассмотрим теперь работу L, выполненную силой F в промежуток времени от определенного момента t_0 до переменного момента t; с этой целью интегрируем равенство (10) в пределах от t_0 до t; мы получим:

$$L = T - T_0, \tag{11}$$

где T_0 обозначает кинетическую энергию точки в момент t_0, т. е.: *изменение, которое в любой промежуток времени испытывает кинетическая энергия свободной точки, движущейся под действием некоторой силы, равно работе, выполненной этой силой за этот промежуток времени.*

10. Если, как в предыдущем параграфе, будем обозначать через L работу, которую выполнила сила, вызывающая движение материальной точки, и будем смотреть на нее, как на *энергию*, сообщенную материальной точке внешними обстоятельствами, которыми обусловливается движение, то $-L$ выразит *энергию, выделенную материальной точкой во-вне.* Так как равенство (11) можно написать в виде:

$$T - L = \text{const}, \tag{11'}$$

то мы можем сказать, что законы механики устанавливают для движения материальной точки под действием силы консервативный характер состояния ее энергии в том смысле, что происхо-

дящейся первоначально в покое, сообщает ей равномерно-ускоренное прямолинейное движение (II, рубр. 22); между силой F, ускорением a, скоростью v (в скалярном значении этих терминов) и пройденным расстоянием s имеют место скалярные соотношения:

$$F = ma, \qquad s = \frac{1}{2}at^2, \qquad v = at,$$

а потому

$$Fs = \frac{1}{2}ma^2t^2 = \frac{1}{2}mv^2;$$

если поэтому сравним две постоянные силы, действующие на том же пути s движущейся точки, то будем иметь:

$$F_1 s = \frac{1}{2}mv_1^2, \qquad F_2 s = \frac{1}{2}mv_2^2,$$

и, следовательно,

$$F_1 : F_2 = \frac{1}{2}mv_1^2 : \frac{1}{2}mv_2^2.$$

дит компенсация энергии T, которой движущаяся точка обладает в каждый момент в кинетической форме, энергией $-L$, которую она, начиная от произвольного момента t_0, выделяет наружу в виде работы: сумма той и другой энергии (*полная энергия*) остается постоянной.

11. Этот вывод принимает особенно выразительный характер в случае консервативных сил. Энергия $-L$ представляет собой не что иное, как потенциал U с обратным знаком (по крайней мере до аддитивной постоянной, не имеющей существенного значения). Если поэтому обозначим через E постоянную, то уравнение (11′) дает:

$$T - U = E; \tag{11''}$$

это — чрезвычайно важное соотношение между двумя элементами T и U (т. е., по существу, между скоростью и положением движущейся точки), имеющее место во все время движения.

Количество $-U$ по своему значению и по тому обстоятельству, что оно зависит только от положения движущейся точки, называется *энергией положения* или также *потенциальной энергией*. Соотношение (11″), которое обыкновенно называют *уравнением* или *интегралом живой силы*, выражает поэтому принцип сохранения энергии в самом узком его значении, поскольку здесь речь идет только об одной изолированной материальной точке и ее механической энергии.

Всякое состояние движения точки (характеризуемое ее скоростью и положением) можно рассматривать как одаренное двумя формами энергии — кинетической и потенциальной. Самое движение в этом свете представляется как явление преобразования кинетической энергии в потенциальную, и обратно; но общее количество E энергии постоянно остается неизменным, поскольку энергия данной точки не поглощается извне и не выделяется во-вне. Таким образом название *полной энергии* материальной точки, которое обыкновенно присваивается постоянной E, представляется вполне оправданным. Ее называют также *постоянной живой силы*, как говорили механики старого времени, когда вся физика еще не была проникнута общей идеей об *энергии*.

3. Мощность.

12. Совершенно ясно, в особенности с точки зрения технических приложений, что работа играет большую роль не только сама по себе, но и в ее отношении ко времени, которое потребовалось для ее выполнения; в связи с этим вводится понятие о *мощности*. Если сила $\boldsymbol{F}$ какой угодно природы приложена к материальной точке, то при любом ее смещении за произвольный промежуток времени от t до $t+\Delta t$ отношение выполненной за этот промежуток работы к продолжительности промежутка называют *средней мощностью силы*; таким образом средняя мощность силы F за промежуток от t до $t+\Delta t$ выражается формулой:

$$\frac{\int\limits_{t}^{t+\Delta t} \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{P}}{\Delta t};$$

в связи с этим *мощностью силы в момент* t называется предел, к которому стремится эта средняя мощность, когда Δt стремится к нулю, т. е. отношение элемента работы к соответствующему элементу времени:

$$\boldsymbol{F}\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}=X\dot{x}+Y\dot{y}+Z\dot{z}.$$

Отсюда следует, что вычисление мощности во всех без исключения случаях (даже при позиционных силах, когда работа не зависит от закона движения во времени) требует знания скорости материальной точки.

4. Импульс силы и количество движения. Удары.

13. Импульс. Положим опять, что точка приложения переменной силы $\boldsymbol{F}$ совершает некоторое движение; под *импульсом* силы от момента t_0 до t разумеют интеграл:

$$\boldsymbol{I}=\int\limits_{t_0}^{t}\boldsymbol{F}\, dt,$$

т. е. вектор, компонентами которого служат:

$$I_x=\int\limits_{t_0}^{t} X\, dt,\quad I_y=\int\limits_{t_0}^{t} Y\, dt,\quad I_z=\int\limits_{t_0}^{t} Z\, dt.$$

Что касается действительного вычисления векторного интеграла $\boldsymbol{I}$ или, что то же, трех его компонентов I_x, I_y, I_z, то мы можем повторить соображения, аналогичные тем, которые нашли себе место в рубр. 3; именно, когда задано движение точки приложения силы, вышеуказанные определенные интегралы сводятся к обыкновенным интегралам относительно переменной t. Но ясно, что в отличие от того случая, когда мы вычисляем работу, импульс $\boldsymbol{I}$ даже и при позиционных или консервативных силах зависит не только от геометрической природы траектории материальной точки, но и от закона, по которому описывающая ее точка зависит от времени.

Во всяком случае, если сохраним постоянным момент t_0 и будем менять t, то импульс $\boldsymbol{I}$ представляет собой функцию (векторную), которая обращается в нуль при $t=t_0$ и которая имеет производной вектор силы:

$$\frac{d\boldsymbol{I}}{dt}=\boldsymbol{F};$$

иными словами, *производная импульса по времени равна силе.*

14. Количество движения и импульс силы, его вызывающий. Пусть F будет сила, производящая движение свободной материальной точки массы m; рассмотрим импульс силы F за промежуток времени от t_0 до t_1 при движении, сообщенном этой силой материальной точке. В силу основного уравнения динамики:

$$I = \int\limits_{t} F\,dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} ma\,dt = m\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{dv}{dt}\,dt,$$

т. е.

$$I = \Delta(mv), \tag{12}$$

где $\Delta(mv)$ означает наращение векториальной величины mv за промежуток от момента t_0 до момента t_1.

Этот вектор mv называется *количеством движения* материальной точки массы m, имеющей скорость v; соотношение (12) можно выразить в словах следующим образом: *если F есть полная сила, действующая на материальную точку, то импульс силы за данный промежуток времени равен изменению количества движения материальной точки за тот же промежуток* [1]).

15. Удары. До сих пор при изучении движения материальной точки мы всегда предполагали, что это явление в рассматриваемые промежутки времени протекает непрерывно (ср. предположение, принятое раз навсегда в рубр. 4 гл. II). Но все же иногда может случиться, что материальная точка в некоторый момент внезапно изменяет свою скорость, не изменяя при этом значительно своего положения. Это имеет место, когда на точку оказывают действие особого рода силы, о которых мы до сих пор еще не упоминали и которые принято называть *ударами*. К такого рода силам нас приводят, например, наблюдения удара молота по наковальне, удара кия в бильярдный шар, удара ядра в стену и т. д. Заметим, прежде всего, что сила F за все время, в течение которого мы ее при таких обстоятельствах наблюдаем, сохраняет напряженность конечную, т. е. меньшую некоторого наперед указанного числа; поэтому соответствующий импульс за промежуток времени от t_0 до t_1

$$I = \int\limits_{t_0}^{t_1} F\,dt$$

---

[1]) Школа Декарта в противоположность лейбницевой утверждала, что силы надлежит измерять не по живой силе, а по количеству движения. Декартова точка зрения правильна, если рассматривать постоянные силы, действующие в один и тот же промежуток времени (а не на том же пути, как это необходимо для оправдания вычислений Лейбница). В самом деле, если возвратимся к обозначениям подстрочного примечания на стр. 338, то для постоянной силы F_1 имеем:

$$F_1 t = mat = mv,$$

а следовательно, для двух сил F_1 и F_2, *действующих в течение того же промежутка времени t*, действительно имеет место соотношение:

$$F_1 : F_2 = m_1 v_1 : m_2 v_2 .$$

стремится к нулю, когда t_1 стремится к t_0; это можно выразить так, что *мгновенный импульс* $F\,dt$, к которому в этом случае сводится интеграл I, исчезает (как произведение из вектора конечной величины F на бесконечно малый скаляр dt). Но, если мы, наоборот, представим, что сила F, действуя в чрезвычайно короткий промежуток времени τ, содержащийся между моментами t_0 и t_1, принимает за этот промежуток весьма большое напряжение, то может случиться, что импульс силы за этот ничтожный промежуток времени примет определенное конечное значение. Чтобы дать математическое выражение этому физическому положению вещей, по крайней мере на типичном примере, представим себе силу, которая в данный промежуток времени от t_0 до t_1 имеет постоянное значение:

$$F = \frac{I_0}{\tau}, \tag{13}$$

где I_0 означает постоянный вектор, а τ—продолжительность $t_1 - t_0$ рассматриваемого промежутка времени. Ускорение, которое будет иметь свободная материальная точка массы m, подверженная действию этой силы, выразится через

$$\frac{dv}{dt} = \frac{I_0}{m\tau}.$$

Интегрируя это равенство от момента t_0 до произвольного момента t рассматриваемого промежутка времени и обозначая через v_0 скорость в момент t_0, мы получим:

$$v = v_0 + \frac{t - t_0}{m\tau} I_0.$$

Так как $\frac{(t - t_0)}{\tau}$ есть правильная дробь, то скорость по абсолютному значению остается меньше, нежели $\frac{v_0 + I_0}{m}$; в момент же t_1

$$v_1 = v_0 + \frac{I_0}{m}, \tag{14}$$

т. е. имеет как раз указанное выше значение, не зависящее от промежутка τ. С другой стороны, вычисляя импульс I силы (13) за промежуток от момента t_0 до момента t_1, найдем, ввиду того что $t_1 - t_0 = \tau$:

$$I = I_0.$$

Вследствие этого, когда τ стремится к нулю, сила (13) по абсолютному значению становится бесконечно большой; но импульс ее, даже отнесенный к первому элементу времени dt, следующему за моментом t_0, сохраняет конечное значение I_0. Таким образом скорость, приобретенная точкой за этот элемент времени, все-таки выражается формулой (14), хотя смещение ее бесконечно мало; это становится ясным, если в общем выражении этого смещения

$$\Delta P = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{v}\, dt$$

будем приближать t_1 к t, помня при этом, что $\boldsymbol{v}$ сохраняет конечное значение. Таким образом в пределе, когда τ стремится к нулю, мы имеем математическое выражение силы, действующей в бесконечно малый промежуток времени с бесконечно большим напряжением; эта сила сообщает материальной точке конечное изменение скорости при бесконечно малом ее смещении.

Не входя в детали, заметим, что совершенно аналогичные заключения имеют место также для сил более общего характера, нежели (13), подчиненных тому условию, что для всякого момента времени t, содержащегося между t_0 и t_1, интеграл

$$\int^{t} \boldsymbol{F} dt$$

сохраняет конечное значение, но вместе с ним остается также конечным и отличным от нуля вектор

$$\boldsymbol{I} = \lim_{t_1 \to t_0} \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F} dt.$$

Интегрируя при этих предположениях основное уравнение механики $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ от t_0 до t, получаем, во-первых:

$$m(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F} dt;$$

это устанавливает, что скорость движущейся точки все время остается конечной. Но если затем в этом последнем уравнении положим $t = t_1$ и будем приближать к нулю интервал интегрирования, то получим:

$$m \Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{I};$$

интегрируя же в пределах от t_0 до t_1 тождество $\frac{dP}{dt} = \boldsymbol{v}$, получим, как выше:

$$\Delta P = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{v}\, dt.$$

Это равенство показывает, что ΔP стремится к нулю вместе с интервалом интегрирования, ибо $\boldsymbol{v}$, как мы только что видели, сохраняет во всем этом интервале конечное значение.

Во всех этих случаях, когда силы, действующие с весьма большим напряжением в течение чрезвычайно малого промежутка времени, сообщают материальной точке смещение, которым можно пренебречь, но внезапно меняют ее скорость, они называются *ударами*; они вычисляются по своему мгновенному импульсу, т. е. по изменению количества движения, ими вызываемому; уравнение

$$I = m \Delta v$$

в теории ударов играет роль, совершенно аналогичную той, которую при изучении обыкновенных сил имеет основное уравнение динамики.