ГЛАВА IX.

Механические единицы и размерности механических величин.

1. Механические единицы.

1. Первичные и производные величины. При изучении механики мы постепенно пришли к различного рода величинам, частью скалярным, частью векториальным. К геометрическим величинам — прямолинейным отрезкам и дугам кривых, поверхностям, объемам — мы присоединили *кинематические величины: времена, скорости (разного рода), ускорения*; наконец, в последних двух главах мы сюда присоединили еще величины, которые мы можем назвать *динамическими*: *силы* (и, в частности, *удары*), *массы, живые силы и работы, мощности, импульсы и количества движения*. В связи с этим необходимо изложить некоторые соображения, совершенно элементарного характера, но основного значения об *измерении* этих различных величин; при этом все эти величины мы будем рассматривать как скаляры, т. е. мы будем обращать внимание даже при векториальных величинах только на абсолютные их значения.

Прежде всего, к какому бы типу ни принадлежали перечисленные выше величины, для измерения любой из них мы можем выбрать совершенно произвольно *единицу меры*, т. е. то значение соответствующей величины, которому мы, условно, припишем значение единицы; после этого число, измеряющее всякое другое значение той же величины, будет уже вполне определено; но такой совершенно произвольный выбор каждой единицы меры, не зависящий от различных других единиц, теоретически вполне дозволенный, не удобен на практике, так как он не учитывает зависимостей, связывающих различные типы величин; он приводит к тому, что в формулу приходится вводить коэффициенты пропорциональности, бесполезно усложняющие вычисления. Именно чтобы избежать этих неудобств, мы в геометрии, установив единицу длины (метр) за единицу плоскости и объема, принимаем соответственно *квадрат со стороной, равной единице, и куб с ребром*, равным единице: квадратный метр, кубический метр [1]).

[1]) Чтобы убедиться в этом наиболее тривиальном случае, насколько справедливо предыдущее соображение, предположим, что за единицу площади

С этой точки зрения единица длины называется *основной* или *первичной*, поскольку она выбрана совершенно произвольно и условно; напротив, единицы площади и объема называются вторичными или *производными*, поскольку они определены уже при помощи единицы длины и притом на основе определенных соотношений, существующих между поверхностями и объемами, с одной стороны, и прямолинейными отрезками — с другой (пропорциональность прямоугольников и параллелепипедов с данным основанием, соответствующим высотам). По той же причине и самые длины называются *первичными величинами*, поверхности и объемы — *производными величинами*.

Совершенно аналогичное различие можно установить, как мы сейчас увидим, в области кинематических и динамических величин; нелишним будет, однако, отметить, что даже и в случае геометрических величин такого рода различие в конечном счете носит чисто условный характер, поскольку оно зависит от частного выбора единиц площади и объема.

2. Кинематические единицы. Для измерения времени, как хорошо известно (II, рубр. 3), единица устанавливается непосредственно на основе астрономических наблюдений (год, сутки, час, минута, секунда — по надобности). Таким образом в кинематике к *длинам* в качестве *первичных величин* присоединяются *промежутки времени*. Это, так сказать, обусловливается тем обстоятельством, что между этими двумя видами величин не имеет места никакая натуральная зависимость, которая позволила бы на основе естественных критериев *вывести* единицу времени из единицы длины.

Напротив того, когда единицы времени и длины уже установлены, то всякая скорость представляется производной величиной по самому своему определению: она определяется отношением (или пределом отношения) некоторой длины к некоторому промежутку времени. Поскольку единицы длины и времени установлены, мера скорости непосредственно определяется, можно сказать, сама собой, именно, за единицу скорости естественно принять скорость равномерно движущегося тела, которое проходит единицу пути (т. е. единицу длины) в единицу времени.

Совершенно так же обстоит дело с ускорениями, которые представляют собой отношение или пределы отношений скорости ко времени. Естественной единицей ускорения, в соответствии с предыдущими соображениями, является ускорение равномерно-ускоренного движения, в котором скорость возрастает на единицу в единицу времени.

Таким образом в кинематике мы имеем две *основные единицы*: единицу *длины* и *времени*. Если, например, за единицу длины

принят квадрат, сторона которого содержит k единиц длины (а не одну), тогда площадь прямоугольника со сторонами a и b выражается формулой $\frac{ab}{k^2}$, вместо обычного произведения ab.

принять метр, а за единицу времени — секунду, то все остальные единицы указанными выше соображениями вполне определены. Хорошо известно, что в геометрии каждой из упомянутых двух производных единиц дается особое название (квадратный и кубический метр); меры, таким образом, указываются без напоминания произведения длин, от которых они происходят, по крайней мере в явной форме.

Напротив того, в кинематике не представляется нужным давать особое наименование единицам скорости и ускорения, так как более наглядной и выразительной является непосредственная формулировка: скорость в столько-то метров в секунду.

3. Небесполезно будет вновь отметить, что уже площади и объемы, равно как скорости и ускорения, являются производными величинами только в силу наших соглашений. По существу ничто не препятствует тому, чтобы рассматривать и эти величины как независимые от других; для этого было бы достаточно исходить из их специфического характера и установить единицы меры путем непосредственного сопоставления. Это можно было бы сделать следующим образом.

Для определенности рассмотрим скорости и займемся наиболее простым случаем (от которого можно перейти к общему путем предельного перехода) прямолинейных и равномерных движений. Представим себе, что мы имеем прямое наглядное представление о скоростях как об основных физических единицах, что мы в состоянии судить о скорости по характеру наблюдаемого движения и отсюда установить критерий измерения. Положим, что нам даны два равномерные движения:

$$s = at + b,$$

$$s_1 = ht + k,$$

скорости которых мы сопоставляем, сравнивая пути, пройденные в одно и то же время. Мера одной скорости по отношению ко второй, принятой за единицу, таким образом, выразится отношением

$$\frac{a(t_2 - t_1)}{h(t_2 - t_1)} = \frac{a}{h}$$

расстояний, пройденных в один и тот же промежуток времени от t_1 до t_2. Мера скорости $\frac{a}{h}$, к которой мы, таким образом, приходим, отличается от обычной (отношение пути к времени) постоянным численным множителем $\frac{1}{h}$, зависящим от выбора единицы. Этот совершенно очевидный вывод обусловливается тем, что введение коэфициента пропорциональности эквивалентно произвольному выбору единицы меры. На практике оказалось наиболее целесообразным просто положить $h = 1$ и этим представить скорость (таким же образом и ускорение) как величину производную по самому своему определению.

4. Динамические единицы. Техническая система единиц. В динамике мы пришли к понятию о силе на основе непосредственных представлений о наиболее простой физической силе — весе; между тем, все остальные динамические величины были последовательно введены при помощи силы, а также геометрических и кинематических величин. Если поэтому примем единицу силы за *первичную*, то все остальные единицы динамических величин можно будет рассматривать как *производные*; в частности, совершенно ясно, что этим путем по основным единицам могут быть определены единицы массы, работы и т. д. Таким образом в механике все единицы оказываются определенными, когда условно установлены *три основные единицы*, именно единицы *длины*, *времени* и *силы*. Систему единиц, построенную на этом основании, т. е. основанную на этих трех первичных единицах, принято называть *технической* или *практической*. Заметим, что и тут остается еще широкий простор для выбора трех основных единиц. Как уже было указано выше (VII, рубр. **13**), на практике в качестве *единицы силы* обыкновенно принимается *килограмм-вес*, т. е. сила тяжести, которая действует на 1 *дм*^{3} дестиллированной воды при 4° С и 760 *мм* атмосферного давления; правильнее сказать, это есть вес *килограмма-эталона*, который представляет собой цилиндр, сделанный из платины и хранящийся в Международной палате мер и весов в г. Севре во Франции (Bureau international des poids et mesures). И тогда для массы, которая, как мы видели (VII, рубр. **14**), выражается отношением веса к ускорению:

$$m = \frac{p}{g},$$

за единицу нужно будет принять (если угодно, вывести ее из ранее установленных единиц) массу такого тела, для которого это отношение сводится к единице, т. е. массу тела, вес которого приблизительно составляет 9,8 *кг*. Эта единица не имеет особого наименования, но зато особое наименование присваивается практической единице работы, это есть *килограммометр*, т. е. работа, которую выполняет сила веса в 1 *кг* при смещении точки ее приложения в направлении и в сторону действия самой этой силы на 1 *м*.

Наконец, *мощность* измеряется на практике в *лошадиных силах*. Лошадиная сила равна 75 килограммометрам в секунду и обозначается обыкновенно через HP от английского слова Horse-Power. Иногда за единицу мощности принимается также единица, называемая *понселе*, которая составляет 100 килограммометров в секунду.

5. Абсолютные системы единиц. В технической системе, которую мы рассматривали в предыдущей рубрике, за первичную единицу принимался вес, а масса определялась как величина произвольная на основе соотношения:

$$m = \frac{p}{g} \text{ или } mg = p,$$

которое представляет собой не что иное, как частный случай основного уравнения динамики:

$$ma = F.$$

Но, как мы хорошо знаем, сила веса носит локальный характер; поэтому, если мы желаем быть точными и иметь для весов строго определенную единицу, то необходимо указать место, которому этот вес соответствует. Если за такое место принять Париж, то 1 *л* дестиллированной воды (при 4° C и 760 *мм* давления) в Риме уже не весит точно 1 *кг*, а несколько меньше, поскольку местные веса относятся между собой, как соответствующие ускорения силы тяжести; это значит: литр дестиллированной воды весит в Риме 9,8038 — в Париже 9,8096 *кг* (II, рубр. 27).

Этой поправкой, очевидно, можно пренебречь в промышленности; и с этой точки зрения в технике единица веса может быть принята без сколько-либо чувствительной практической погрешности за основную единицу механических и технических величин.

Но иначе обстоит дело с точки зрения теоретической. Гаусс [1]) первый заметил, что с научной точки зрения будет предпочтительнее принять за первичную единицу массы вместо единицы силы. В самом деле, вследствие внутреннего, ингерентного характера массы при таком выборе не представляется надобности локальной спецификации этой единицы. Тело, которое дает единицу массы в Париже, теоретически остается единицей, куда бы мы его ни перенесли. В соответствии с этим принято называть *абсолютной системой* всякую систему мер, которая принимает за первичные величины *длину*, *время* и *массу* [2]).

---

[1]) Карл Фридрих Гаусс (Carl Fridrich Gauss) родился в Брауншвейге в 1777 г., умер в Гёттингене в 1855 г.; с 1807 г. до своей смерти состоял профессором Гёттингенского университета и директором астрономической обсерватории при университете. Гаусс является создателем диференциальной геометрии на поверхностях и метода наименьших квадратов, а также основных теорий математической физики; это был самый крупный аналитик, астроном и геодезист первой половины XIX в.; современники дали ему название „princeps mathematicorum" (первый из математиков). Его девизом было *pauca sed matura* (немного, но зрело); и действительно, его творения отличаются совершенством обработки; но „немногое" все же заполняет одиннадцать больших томов.

[2]) Собственно говоря, это название „абсолютная система единиц" имеет иной источник. В XVIII в. ставили себе задачей установить такую систему мер, которая не зависела бы от сохранности эталонов, т. е. которую можно было бы восстановить, если бы эталоны были утрачены. Для осуществления этого были сделаны различные предложения, из которых в пору конвента французские физики остановились на той системе единиц, которая, действительно, сохранилась по настоящее время. Как известно, отправной единицей служил *метр*, длина которого должна была составлять одну десятимиллионную часть четверти земного меридиана, проходящего через Парижскую

За единицу массы можно принять, например, эталон, который мы прежде принимали за единицу веса, т. е. массу 1 *дм*³ дестиллированной воды. Эту единицу называют *килограмм-массой*; обыкновенно ее просто называют килограммом, когда не представляется опасности смешать ее с килограмм-весом. Поскольку установлены в качестве единицы меры и времени метр и секунда, основное соотношение

$$F = ma$$

обнаруживает, что единицей силы целесообразнее всего принять в этих условиях ту силу, которая, действуя с постоянным напряжением на единицу массы, способна увеличить скорость материальной точки на один метр в секунду. Если мы желаем материализовать эту единицу силы при помощи веса, то ее нужно будет установить при помощи эталона по формуле $p = mg$, т. е. взять тело, масса которого $m = \frac{1}{g}$. Такой эталон, вес которого будет равен единице (в абсолютной мере), должен меняться от места к месту; с грубым приближением вес одной десятой литра воды может быть приравнен этой единице; он приблизительно, таким образом, совпадает с весом одного гектограмма, но, конечно, это приближение допустимо только в условиях, не требующих выдержанной научной точности.

6. **Система** *CGS* (сантиметр, грамм, секунда) представляет собой абсолютную систему, которая отличается от указанной выше только тем, что за единицу длины принимается не метр, а сантиметр, а за единицу массы — грамм.

Соответствующая единица силы получила название *дины*. Таким образом дина есть сила, которая сообщает материальной точке, имеющей массу в один грамм, ускорение сантиметр в секунду за секунду.

Чтобы установить численную зависимость между диной и весом грамма, припомним прежде всего, что ускорение силы тяжести g, выраженное в системе *CGS*, составляет в Риме 980,38, а в Париже 980,96. Мы можем принять его приблизительное значение равным 9,8 или, в круглых цифрах, 10.

С другой стороны, вес грамма в силу обычного соотношения $p = mg$ равен g раз взятому грамму массы; но произведение mg представляет собой силу, и число, ее выражающее, укажет,

---

обсерваторию. Однако эталон, изготовленный на основе сложной геодезической съемки, при повторном измерении длины земного меридиана не совпал с новым результатом измерения; обнаруженная разница оказалась, конечно, очень незначительной, но все же, несомненно, существовала. Вместе с тем совершенно выяснилось, что установить какие бы то ни было единицы меры, которые можно было бы признать абсолютными вследствие их неизменности, совершенно невозможно. Ввиду этого под абсолютными единицами в настоящее время разумеют те, которые определяются тщательно изготовленными и тщательно сохраняемыми эталонами, находящимися в Международной палате мер и весов в Севре. Название „абсолютная система" имеет в настоящее время только историческое значение. (*Ред.*)

сколько грамм-вес содержит дин (конечно, если m и g выражены в единицах системы *CGS*). Таким образом

$$1\ \textit{г}\ (\text{вес}) = g\ \text{дин} = 980\ \text{дин},$$

т. е.

$$1\ \text{дина} = \frac{1}{980}\ \textit{г}\ (\text{веса});$$

отсюда следует

$$1\ \textit{кг}\ (\text{вес}) = 10^3 \cdot 980\ \text{дин}. \tag{1}$$

Таким образом, грубо говоря, 1 *кг* составляет 10^6 дин; это кратное единицы силы получило специальное название *мегадины*. Точнее мегадина составляет $10^6/10^3$ g *кг*, т. е. приблизительно 1,02 *кг*.

Единицей работы в системе *CGS* служит *эрг*, который соответствует работе, выполняемой силой (постоянной) в одну *дину* при смещении точки ее приложения на 1 *см* в направлении силы. Из соотношения (1) непосредственно вытекает, что зависимость между килограммометром (предыдущая рубрика) и эргом выражается равенством:

$$1\ \text{эрг} = \frac{1}{10^5 \cdot 980}\ \textit{кг},$$

т. е., полагая 10^6 эргов = 1 мегаэргу:

$$1\ \text{мегаэрг} = \frac{1}{98}\ \textit{кгм};$$

таким образом один мегаэрг незначительно превышает 1/100 *кгм*. Электрики вместо эрга (или мегаэрга) в качестве единицы работы пользуются *джоулем*, который равен 10^7 эргов (т. е. работе мегадины при смещении в 1 *дм*), поэтому

$$1\ \text{джоуль} = \frac{1}{9{,}8}\ \textit{кгм}. \tag{2}$$

Наконец, единицей мощности в системе *CGS* служит мощность силы, которая выполняет работу в 1 эрг в течение секунды; однако этой единице не присвоено особого названия: вместо нее электротехники пользуются единицей *ватт*, равной мощности одного джоуля в секунду; *киловатт* составляет 10^3 ватт. Поэтому 1 HP, составляющая 75 *кгм/сек*, выводится из равенства (2).

$$1\ \text{киловатт} = \frac{10^3}{9{,}8 \cdot 75}\ \text{HP},$$

что приблизительно составляет 1,36 HP.

И аналогично этому находим:

$$1\ \text{киловатт} = \frac{1}{0{,}98}\ \text{понселе}.$$

2. Размерности механических величин. Однородность.

7. Мера поверхности представляет сумму или предел суммы произведений двух длин. Если все числа, выражающие эти длины, будут умножены на одно и то же число λ, как это имеет, например, место, когда мы меняем единицу длины, принимая за новую единицу $\frac{1}{\lambda}$ часть первоначальной, то число A, выражающее плоскость, увеличивается в λ^2 раз; иными словами, оно представляет собой однородную функцию второй степени различных длин, от которых оно зависит. Согласно обозначению, введенному Максвэллом [1]), это обозначают знакоположением:

$$[A] = l^2.$$

Вообще, если в некоторой абсолютной системе единиц Q есть мера величины, которая зависит не только от некоторого количества длин, но и от какого-либо количества времен и какого-либо количества масс, то для выражения того факта, что Q представляет собой однородную величину степени n_1 относительно длин, степени n_2 относительно времен и степени n_3 относительно масс пишут:

$$[Q] = l^{n_1}\, t^{n_2}\, m^{n_3};$$

показатели n_1, n_2, n_3 называются *размерами величины* Q; написанное же выше символическое уравнение называется *уравнением размерности* величины, в соответствии с чем размеры n_1, n_2, n_3 часто называют также *показателями размерности* величины.

Если один из размеров равен нулю, то дело обстоит так, как если бы Q вовсе не зависело от соответствующего аргумента; так, например, предыдущее символическое равенство $[A] = l^2$ можно было бы также написать в виде $[A] = l^2 t^0 m^0$; но обыкновенно при указании размерности предпочитают вовсе опускать те множители, которым соответствовал бы показатель нуль.

После сказанного ясно, что для объема v

$$[v] = l^3;$$

для скорости (отношение или предельное отношение длины ко времени):

$$[v] = lt^{-1},$$

для ускорения:

$$[a] = lt^{-2}.$$

---

[1]) Джемс Клерк Максвэлл (James Clerk Maxwell) родился в Эдинбурге в 1831 г., умер в Кембридже в 1879 г., состоял профессором физики в Кембриджском университете с 1871 г. Этот выдающийся физик и математик дал математическое выражение наглядным экспериментальным представлением Фарадея. В своем классическом труде „Treatise on electricity and magnetism" (London 1873) он предусмотрел электрические волны, позже реализованные Герцем, и получившие широкое применение благодаря Маркони. Максвэлл в том же сочинении установил электромагнитную теорию света. Ему мы обязаны также первой количественной разработкой кинетической теории газов.

Из всего этого следует, что сила, поскольку мы рассматриваем ее как производную величину, определяемую основной формулой, имеет размерность:

$$[F] = lt^{-2}m\,.$$

Работа (сумма произведений из сил на длины) представляет собой однородное выражение вида:

$$[L] = l^2 t^{-2} m\,;$$

то же самое нужно сказать о потенциале в тех случаях, когда таковой существует, так как он представляет собой не что иное, как некоторую работу (рубр. 6 предыдущей главы).

Для живой силы T (полупроизведение из массы на квадрат скорости) мы снова получаем то же выражение:

$$[T] = l^2 t^2 m;$$

это можно было и предвидеть: количества L и T не могут быть различны с точки зрения их размерностей, потому что они представляют собой одну и ту же физическую сущность — энергию.

Для мощности Π (отношение между работой и временем) имеем:

$$[\Pi] = l^2 t^{-3} m\,.$$

Наконец, количество движения (произведение скорости на массу) и импульс (произведение или сумма произведений из сил на промежутки времени) имеют общую размерность:

$$[I] = lt^{-1}m\,.$$

Это совпадение, конечно, можно было бы предвидеть, поскольку в силу соотношения (12) предыдущей главы всякий импульс можно рассматривать как разность двух количеств движения.

8. Если же мы примем техническую систему единиц и, следовательно, рядом с длиной и временем будем считать первичной величиной *силу*, а не массу, то размерности механических единиц изменятся; прежде всего, вследствие основного соотношения динамики, мы получим теперь для массы размерность:

$$[m] = l^{-1} t^2 f, \tag{3}$$

где f есть общее обозначение силы. Таким же образом для других динамических величин, учитывая их размерности, основанные на их определениях, мы получим символические уравнения:

$$[L] = lf, \quad [\Pi] = lt^{-1}f, \quad [I] = tf.$$

Эти уравнения можно вывести из соответствующих равенств предыдущей рубрики, подставляя в последние вместо массы m выражение (3).

9. Изменение единиц. Размерности механических величин позволяют удобно вычислить, как изменяется число q, выражающее величину Q (т. е. мера этой величины), когда мы изменим единицы первичных величин. В самом деле, если в какой-либо данной абсолютной системе мы уменьшим единицу длины в отношении 1 к $\frac{1}{\lambda}$, единицу времен в отношении 1 к $\frac{1}{\tau}$ и, наконец, единицу массы в отношении 1 к $\frac{1}{\mu}$ и

$$[Q] = l^{n_1} t^{n_2} m^{n_3},$$

то из тройной однородности размера рассматриваемой величины относительно длин, времен и масс следует, что соответствующая производная единица уменьшится в отношении единицы к

$$\frac{1}{\lambda^{n_1}\tau^{n_2}\mu^{n_3}} = \lambda^{n_1}\tau^{n_2}\mu^{n_3},$$

а измеряющее эту величину число q будет умножено на

$$\chi = \lambda^{n_1}\tau^{n_2}\mu^{n_3}.$$

Это произведение называется *коэфициентом приведения* величины с размерами n_1, n_2, n_3.

Таким образом, если мы обозначим через ν, α, φ, ε, π, ι коэфициенты приведения, относящиеся к скорости, ускорению, силе, энергии, мощности и импульсу, то мы выведем из соответствующих уравнений размерности соотношения:

$$\nu = \lambda\tau^{-1}, \quad \alpha = \lambda\tau^{-2}; \tag{4}$$

$$\varphi = \lambda\tau^{-2}\mu, \; \varepsilon = \lambda^2\tau^{-2}\mu, \; \pi = \lambda^2\tau^{-3}\mu, \; \iota = \lambda\tau^{-1}\mu. \tag{5}$$

Если же принята техническая система единицы, то, естественно коэфициенты приведения (4) скорости и ускорений останутся без изменения, но коэфициенты приведения массы и других производных динамических единиц изменятся, именно примут вид:

$$\mu = \lambda^{-1}\tau^2\varphi, \qquad \varepsilon = \lambda\varphi, \; \pi = \lambda\tau^{-1}\varphi, \qquad \iota = \tau\varphi. \tag{6}$$

Системы (4), (5) и (4), (6) алгебраически между собой эквивалентны: первая выражена через λ, τ, μ, вторая — через λ, τ, φ. Совершенно ясно, что возможны и многообразные другие эквивалентные схемы. В соответствии с этим три величины называются *независимыми по своей размерности*, если одночленное выражение их коэфициентов приведения, выраженное через λ, τ, μ, алгебраически независимо; в этом случае те же величины будут независимы, если мы их выразим через λ, τ, φ по схеме (6).

Так, например, три величины — длина, масса и сила (которые отличаются от фундаментальных величин технической системы только тем, что в ней масса заменяет время) — представят собой независимую систему величин; точно так же независимую систему образуют скорость, ускорение и энергия, поскольку

$$\nu = \lambda\tau^{-1}, \quad \alpha = \lambda\tau^{-2}, \quad \varepsilon = \lambda^2\tau^{-2}\mu;$$

напротив того, время, энергия и мощность по своим размерностям не могут считаться независимыми, поскольку в силу соотношений (5) имеет место равенство $\pi = \varepsilon\tau^{-1}$.

По самому определению размерности ясно, что по данным трем независимым единицам коэфициенты приведения всех других величин могут быть выражены в коэфициентах, соответствующих этим трем величинам. Так, если мы фиксируем три величины — скорость, ускорение и энергию, — то на основе соотношений (4) и (5) или эквивалентных им соотношений (4) и (6) будем иметь:

$$\lambda = \nu^2\alpha^{-1}, \quad \tau = \nu\alpha^{-1},$$

$$\mu = \nu^{-2}\varepsilon, \quad \varphi = \nu^{-2}\alpha\varepsilon, \quad \pi = \nu^{-1}\alpha\varepsilon, \quad \iota = \nu^{-1}\varepsilon.$$

Мы можем также сказать, что всякие три величины, независимые друг от друга по своим размерностям, могут быть приняты за первичные величины, и с их помощью все другие могут быть определены как производные величины.

Все эти соображения часто находят себе применение в вычислениях, связанных с изменением единиц меры; в различных случаях оказывается целесообразным принять в качестве первичных те или иные независимые величины и с их помощью устанавливать единицы для измерения остальных величин.

10. Если какая-либо величина, определенная при помощи длины, времени и массы, имеет все три показателя размерности, равные нулю (в каковом случае ее показатели размерности будут также равны нулю, какие бы три величины мы ни приняли за основные), то мера такой величины не меняет своего численного значения, как бы мы ни изменили первичные единицы. Относительно такой величины принято говорить, что она выражается *чистым числом* или просто *числом.*

Таковой является мера угла, выраженная в радианах (отношение длины дуги круга к соответствующему радиусу); отсюда следует, что угловая скорость (отношение угла ко времени) имеет размерность t^{-1}.

11. Однородность. Допустим, что между механическими величинами, играющими роль в некотором определенном явлении, существует зависимость, в которой получает свое выражение самый закон этого явления. Если обозначим через q число, выражающее, скажем, в некоторой определенной абсолютной системе одну из этих механических единиц, связанных названной зависимостью, то мы можем разрешить соответствующее уравнение относительно q и выразить, таким образом, q через различные величины, которые составят правую часть равенства; она будет зависеть от длин l_1, l_2, l_3, ..., от времен t_1, t_2, t_3, ... и от масс m_1, m_2, m_3, ...

Уравнение, которое выражает закон рассматриваемого явления, можно поэтому представить в виде:

$$q = \psi(l_1,\ l_2,\ \ldots;\ t_1,\ t_2,\ \ldots;\ m_1,\ m_2,\ \ldots); \qquad (7)$$

это уравнение, поскольку оно выражает закон самого явления, должно остаться в силе, какова бы ни была система принятых единиц. Но если мы уменьшим единицы длины, времени и массы в отношениях 1 к $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{\tau}$, $\frac{1}{\mu}$, то числа l_i, t_i, m_i $(i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ окажутся умноженными на λ, τ, μ, а число q на $\lambda^{n_1}\tau^{n_2}\mu^{n_3}$, где n_1, n_2, n_3 суть размеры (показатели размерности) соответствующей механической величины. Поэтому совместно с соотношением (7), как бы ни были выбраны числа λ, τ, μ, должно будет иметь место уравнение:

$$\lambda^{n_1}\tau^{n_2}\mu^{n_3}q = \psi(\lambda l_1,\ \lambda l_2,\ \ldots;\ \tau t_1,\ \tau t_2,\ \ldots;\ \mu m_1,\ \mu m_2,\ \ldots). \qquad (8)$$

Это значит, что уравнение (7) должно быть однородным, и притом степени n_1 относительно длин, n_2 относительно времени, n_3 относительно масс; иначе говоря, всякое уравнение, выражающее механический закон какого-либо явления, обладает тройной однородностью относительно длин, времен и масс, от которых оно зависит. Совершенно такая же однородность, конечно, имеет место также и относительно любых других трех величин, независимых по своим размерностям, если мы себе представим, что все величины, входящие в рассматриваемый закон, выражены через эти новые основные величины. Во всяком случае в этом смысле оказывается однородным основное уравнение динамики, равно как и уравнения, выражающие теоремы о живой силе, об импульсе и количестве движения:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}, \quad L = T - T_0, \quad \boldsymbol{I} = \Delta(m\boldsymbol{v}).$$

3. Механическое подобие и модели.

12. К соображениям предыдущего параграфа о размерах механических величин и об изменении соответствующих единиц присоединяется теория механического подобия, краткий очерк которой мы здесь дадим.

Прежде всего, напомним, что две системы точек называются *геометрически подобными*, если между точками одной и другой системы можно установить двуоднозначное соответствие (взаимно однозначное соответствие) таким образом, что гомологичные (соответственные) отрезки всегда сохраняют одно и то же отношение λ. Отсюда, как известно, вытекает равенство соответствующих углов, а также пропорциональность гомологичных площадей и объемов соответственно в отношениях λ^2 и λ^3.

13. Кинематическое подобие. Рассмотрим две системы точек Σ и Σ', находящиеся в движении относительно одной и той же системы отсчета $\Omega\xi\eta\zeta$ — первая в промежутке времени от t_0 до t_1, вторая в промежутке времени, вообще отличном от первого, от t_0'

до t'_1, где t_0, t_1, t'_0, t'_1 представляют собой значения одной и той же независимой переменной — *абсолютного времени* (II, рубр. 3).

Обозначим через τ отношение $\frac{t_1 - t_0}{t'_1 - t'_0}$ и согласимся считать соответствующими или *гомологичными* два момента t и t' в интервалах этих двух движений, когда они связаны соотношением:

$$t - t_0 = \tau (t' - t'_0);$$

это влечет за собой соотношение между диференциалами, выражающееся пропорциональностью $dt = \tau\, dt'$. Предположим теперь, что возможно выбрать два ортогональных триэдра T и T', которые оба остаются в покое относительно системы $\Omega\xi\eta\zeta$, таким образом, чтобы в соответствующие моменты две фигуры (Σ, T) и (Σ', T'), хотя бы даже и деформируясь, сохраняли при движении систем Σ и Σ' геометрическое подобие с постоянным (т. е. не зависящим от времени) отношением λ каждого отрезка первой системы к соответствующему отрезку второй системы.

В таком случае говорят, что две системы Σ и Σ' *кинематически подобны*.

Мы здесь докажем, что для такого рода систем имеют место следующие предложения:

1) *Траектории, описанные различными точками системы Σ, в своей совокупности составляют фигуру, геометрически подобную фигуре, которая составлена из траекторий гомологичных точек фигуры Σ'.*

2) *Скорости и ускорения двух гомологичных точек системы Σ и Σ' имеют в соответствующие моменты гомологичные напряженности и стороны обращения в геометрическом подобии соответствующих конфигураций их траекторий; напряженности же их находятся в постоянных отношениях соответственно* $\lambda\tau^{-1}$ и $\lambda\tau^{-2}$.

В самом деле, если P и P' суть произвольные гомологичные точки систем Σ и Σ', то две фигуры (P, T) и (P', T') в соответствующие моменты t и t' геометрически подобны; если поэтому обозначим через x, y, z координаты точки P относительно триэдра T, через x', y', z' координаты точки P' относительно триэдра T', то неизбежно будем иметь:

$$x(t) = \lambda x'(t'), \quad y(t) = \lambda y'(t'), \quad z(t) = \lambda z'(t');$$

так как эти уравнения должны иметь место для каждой пары гомологичных точек и для каждой пары соответствующих моментов, то они доказывают утверждение, относящееся к траекториям.

Если теперь продиференцируем эти уравнения относительно t и примем во внимание, что $dt = \tau\, dt'$, то получим:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda\tau^{-1}\frac{dx'}{dt'}, \quad \frac{dy}{dt} = \lambda\tau^{-1}\frac{dy'}{dt'}, \quad \frac{dz}{dt} = \lambda\tau^{-1}\frac{dz'}{dt'},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda\tau^{-2}\frac{d^2x'}{dt'^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \lambda\tau^{-2}\frac{d^2y'}{dt'^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \lambda\tau^{-2}\frac{d^2z'}{dt'^2};$$

эти уравнения, в свою очередь, доказывают утверждение, относящееся к скоростям и ускорениям.

14. Критерии кинематического подобия. Из определения кинематического подобия, данного в предыдущей рубрике, можно вывести критерий, который позволяет распознать такое подобие путем сопоставления начальных состояний движения и одних только ускорений в произвольные соответственные моменты; этот критерий приводит к весьма замечательным выводам.

Рассмотрим две системы точек Σ и Σ', находящиеся в движении относительно одной и той же системы отсчета $\Omega\xi\eta\zeta$; предположим, что можно зафиксировать два триэдра T и T', неподвижные относительно $\Omega\xi\eta\zeta$, и установить двуоднозначную зависимость между точками этих систем таким образом, что:

а) *конфигурация, которую образует система* (Σ, T) *в момент* t_0, *геометрически подобна конфигурации, которую образует система* (Σ', T') *в определенный момент* t'_0, *вообще отличный от* t_0.

b) *скорости, которые имеют в эти два начальные момента точки системы* Σ *и гомологичные точки системы* Σ', *одинаково ориентированы относительно соответствующих триэдров* T *и* T' *и имеют пропорциональные напряженности.*

Если λ и ν суть отношения пропорциональности между длинами и скоростями систем Σ и Σ' в начальные моменты t_0 и t'_0, то мы положим $\nu=\lambda\tau^{-1}$, т. е. $\tau=\lambda\nu^{-1}$. Принимая теперь, что движение систем Σ и Σ' происходит от соответствующих начальных моментов t_0 и t'_0, мы установим между моментами t, следующими за t_0, и t', следующими за t'_0, соотношение, выражаемое равенством:

$$t=t_0+\tau(t'-t'_0); \tag{9}$$

в этих условиях мы утверждаем, что для существования механического подобия двух движущихся систем достаточно, чтобы

с) *в соответствующие моменты* t *и* t' *ускорения гомологичных точек систем* Σ *и* Σ' *были одинаково ориентированы относительно триэдров* T *и* T' *и имели пропорциональные напряженности в отношении* $a=\lambda\tau^{-2}$.

В самом деле, при обозначениях предыдущей рубрики, вследствие соотношения с), имеем:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\lambda\tau^{-2}\frac{d^2x'}{dt'^2},\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\lambda\tau^{-2}\frac{d^2y'}{dt'^2},\quad \frac{d^2z}{dt^2}=\lambda\tau^{-2}\frac{d^2z'}{dt'^2};$$

интегрируя эти уравнения по t и припоминая, что в силу соотношения (9) $dt=\tau\,dt'$, получим:

$$\frac{dx}{dt}=\lambda\tau^{-1}\frac{dx'}{dt'}+c_1,\quad \frac{dy}{dt}=\lambda\tau^{-1}\frac{dy'}{dt'}+c_2,\quad \frac{dz}{dt}=\lambda\tau^{-1}\frac{dz'}{dt'}+c_3;$$

теперь достаточно учесть начальную пропорциональность скоростей и соотношение $\nu=\lambda\tau^{-1}$, чтобы убедиться, что три постоянные интегрирования равны нулю.

Новое интегрирование в связи с условием b) геометрического подобия в начальный момент (при отношении λ) приводит к равенствам:

$$x = \lambda x'(t'), \quad y(t) = \lambda y'(t'), \quad z(t) = \lambda z'(t'),$$

которые устанавливают кинематическое подобие наших двух систем.

15. Материальное подобие и механическое подобие. Относительно двух систем материальных точек Σ и Σ', приведенных в двуоднозначное соответствие, говорят, что они *материально подобны*, если массы соответствующих элементов находятся между собой в постоянном отношении.

Следует здесь же отметить, что в случае геометрически подобных систем такое материальное подобие с наибольшей простотой реализуется, если составить гомологичные элементы из того же материала.

Теперь предположим, что нам даны две системы Σ и Σ' в движении и что возможно установить двуоднозначное соответствие между точками обеих систем, а также двуоднозначное соответствие между моментами промежутков времени, в течение которых совершается движение, и притом так, что обе системы будут иметь одновременно как материальное, так и кинематическое подобие. В этом случае говорят, что эти системы *механически подобны*.

Если m есть масса точки системы Σ, $\boldsymbol{a}$ — ее ускорение, $\boldsymbol{F}$ — полная действующая на нее сила, а с другой стороны, m', $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{F}'$ суть аналогичные элементы, отвечающие соответствующей точке системы Σ', то будем иметь:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{F}' = m'\boldsymbol{a}'.$$

Так как $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}'$ в соответствующие моменты имеют гомологичные направления по их геометрическому подобию, то отсюда вытекает, что то же самое имеет место также для сил $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}'$; более того, так как

$$m = \mu m', \quad a = \lambda\tau^{-2} a',$$

то между гомологичными силами в соответствующие моменты будет иметь место соотношение:

$$\boldsymbol{F} = \lambda\tau^{-2}\mu\boldsymbol{F}';$$

иными словами, силы, действующие в системе Σ, находятся к гомологичным силам, действующим в системе Σ', в постоянном отношении $\lambda\tau^{-2}\mu$. Если поэтому обозначим через φ отношение подобия сил, то между четырьмя отношениями λ, τ, μ, φ имеет место уравнение:

$$\varphi = \lambda\tau^{-2}\mu; \tag{10}$$

благодаря этому, когда указаны три из этих отношений, то ими определяется четвертое; таким образом, на основе размеров будут определены отношения подобия всех остальных механических величин, соответствующие друг другу в двух системах.

Соотношение (10), по существу, исходит от Ньютона, которому мы обязаны понятием о механическом подобии.

16. Теорема Ньютона. Изложенные выше соображения существенным образом зависят от сделанного предположения, что для двух систем Σ и Σ' действительно имеет место механическое подобие; оно по самому определению своему включает подобие кинематическое, а в силу этого и геометрическое, а вместе с тем и материальное.

Даже и в том случае, когда речь идет о деформирующихся системах, материальное подобие может быть, по крайней мере в определенный момент, как и геометрическое, фактически осуществлено; как уже было указано, это можно сделать при помощи простых конструктивных средств (сделать гомологичные части подобными по форме из того же материала); совершенно иначе обстоит дело в случае кинематического подобия; в самом деле, если даже начальное состояние движения двух материальных систем и представляет требуемое подобие, то в дальнейшем они двигаются по условиям, определяемым окружающими физическими обстоятельствами (связями, силами, сопротивлениями), которым они подчинены; и в общем нет основания ожидать, что их механическое подобие повторится при таком движении.

В этом порядке идей имеет место важное предложение, также исходящее от Ньютона. Положим, что для двух материальных систем Σ и Σ' оправдываются начальные условия подобия a) и b) рубр. 14, но вместо третьего соотношения c) имеют место два следующие:

c′) *две системы Σ и Σ' материально подобны, причем между гомологичными массами имеет место соотношение* $m = \mu m'$, где μ есть постоянная;

c″) *в соответствующие моменты t и t', связанные соотношением* (9), *полные гомологические силы F и F' одинаково ориентированы относительно соответствующих триэдров отсчета T и T', и между их напряжениями также имеет место пропорциональность $F = \varphi F'$, где $\varphi = \lambda\mu\tau^{-2}$.*

При этих условиях мы непосредственно убеждаемся, что наши две системы механически подобны. В самом деле, если примем во внимание, что для каждой пары гомологических точек ускорения задаются соотношениями $a = \frac{F}{m}$ и $a' = \frac{F}{m'}$, то достаточно скомбинировать задания c′) и c″), чтобы вывести из них третье условие c) рубр. 14. Поэтому имеет место кинематическое подобие, а так как, по предположению, имеет также место и подобие материальное, то эти две системы механически подобны.

Этот последний результат приобретает особое значение в конкретных приложениях, так как он остается даже в силе (по крайней мере в идеальном случае систем, свободных от трения), если *основное предположение* c″) *относится только к непосредственно приложенным силам*, которые, в отличие от реакции связей, входят в состав величин, предполагаемых в проблеме данными.

Мы здесь ограничимся только формулировкой этого предложения и заметим, что это замечательное расширение результата Ньютона[1]) представляет собой следствие начала виртуальных работ, которым мы займемся ниже.

17. Модели. Учение о механическом подобии находит себе важное приложение при изучении уменьшенных моделей машины.

Изобретатель какой-либо машины всегда желает, раньше чем осуществить свое изобретение, на деле убедиться, что оно будет функционировать так, как это следует из его соображений; он прибегает для этого к исследованию действия модели, надлежащим образом построенной в малом масштабе. Если эта модель в своем действии подобна механически проектируемой машине, то изобретатель может обнаружить по каждой величине, измеряемой непосредственно на модели, значение соответствующей механической величины при действии самой машины, в предположении, конечно, что он знает отношение механического подобия.

Однако возможность построить модель, которую хотя бы приближенно можно было действительно считать подобной проектируемой машине, зависит от совокупности обстоятельств, которые необходимо рассчитать и обсудить в каждом отдельном случае; иногда они представляют совершенно непреодолимые препятствия для практического осуществления такого плана.

С точки зрения исторической, следует отметить, что уже Галилей ставил себе вопрос, почему иногда случается, что такого рода модель в миниатюре действует в совершенстве, между тем как построенная вслед за этим машина в нормальном размере не дает удовлетворительных результатов; с гениальной интуицией он приписал этот факт различному соотношению пассивных сопротивлений в модели и машине.

Мы постараемся здесь выяснить указанные трудности и, с другой стороны, чтобы иллюстрировать на примерах полезность этого метода в благоприятных случаях, рассмотрим некоторые конкретные вопросы.

18. Предположим, что построена модель ω машины Ω, подобная ей не только с геометрической точки зрения, но также и по структуре отдельных гомологичных частей, которые мы будем считать построенными в Ω и ω из того же материала; пусть λ будет отношение геометрического подобия между Ω и ω.

---

[1]) Оно принадлежит Бертрану: *J. Bertrand*, Nôte sur la similitude en Mécanique, „Journal de l'École Polytechnique", Cahier XXXII, 1848.

Соответствующие детали той и другой машины, будучи геометрически подобны и имея ту же материальную структуру, имеют веса, пропорциональные соответствующим объемам, которые находятся между собой в отношении λ^3; а так как ускорение силы тяжести g не меняется при переходе от машины Ω к ее модели ω (поскольку мы можем считать, что та и другая находятся на ограниченном участке земли), то отношение подобия μ между массами также равно λ^3. В большей части конкретных случаев при изучении хода машины и ее модели нельзя пренебрегать влиянием веса отдельных их частей; нужно поэтому учитывать эти веса в числе сил, действующих на Ω и ω; и поскольку аналогичные веса при поставленных условиях сохраняют отношение λ^3, то механическое подобие между Ω и ω может осуществиться только в том случае, если и другие гомологичные силы, действующие в этих механизмах, находятся в том же отношении λ^3.

Однако часто проявляются специальные силы (как сопротивления среды и трения), которые по самой своей природе не могут при прочих равных условиях меняться от машины к модели в отношении λ^3. В этих случаях приходится пытаться преодолеть эту трудность, считаясь с особенностями каждого случая; обычно для этого приходится отказаться от материального подобия и стараться подходящим образом подобрать материальную структуру отдельных частей модели, физические условия, в которых она будет функционировать, и т. д.; но здесь невозможно входить в эти проблемы, которые относятся уже к области техники.

Здесь мы будем все же исходить из гипотезы, что в благоприятном случае все гомологичные силы, действующие в Ω и ω, находятся между собой в отношении весов λ^3; полагая поэтому в уравнении (10)

$$\mu = \varphi = \lambda^3, \tag{11}$$

мы сейчас же приходим к выводу, что для возможности механического подобия отношение времен должно быть равно:

$$\tau = \lambda^{\frac{1}{2}}, \tag{12}$$

Мы видим таким образом, что в тех случаях, когда веса частей существенным образом влияют на ход машины, механическое подобие в наиболее благоприятных предположениях зависит от одного только отношения λ гомологичных длин.

В этих условиях произвольный коэфициент приведения

$$\chi = \lambda^{n_1}\tau^{n_2}\mu^{n_3}$$

соотношений (11) и (12) приобретает значение:

$$\chi = \lambda^{n_1 + \frac{n_2}{2} + 3n_3};$$

мы можем, таким образом, формулировать следующее правило Ньютона: *если построена модель ω машины Ω, геометрически и* *механически ей подобная, — если, сверх того, удовлетворено существенное условие, что гомологичные силы находятся между собой в отношении λ^3, то можно предучесть значение Q какой угодно механической величины, имеющей размеры n_1, n_2, n_3, в машине Ω, определяя на модели ω меру q рассматриваемой величины и применяя формулу:*

$$Q = \lambda^{n_1 + \frac{n_2}{2} + 3n_3}\, q. \tag{13}$$

19. В качестве простейшего примера предыдущей теоремы рассмотрим два маятника, сколь угодно сложных, но подобных по своей геометрической и материальной структуре, и разыщем отношение соответствующих продолжительностей T и T' их колебаний.

В первом приближении можно пренебречь сопротивлением воздуха и трением маятника о ребра привеса; в таком случае единственными силами, непосредственно приложенными к обоим маятникам, являются их веса. Отношение же весов есть λ^3, если λ есть отношение геометрического подобия. При этих условиях оказывается применимой теорема предыдущей рубрики, и соотношение (13) дает непосредственно:

$$T = \lambda^{\frac{1}{2}} T'.$$

Отношение подобия λ (двух гомологичных отрезков) можно, в частности, толковать как отношение длин двух маятников; мы приходим, таким образом, к следующему наглядному выражению теоремы: *продолжительности колебаний двух подобных маятников находятся в отношении корней квадратных из их длин.*

20. Полезно отметить, что при учете сопротивления воздуха два маятника уже не могут считаться механически подобными; точнее, в этом случае не удовлетворяется существенное условие применимости теоремы рубр. **18**. Действительно, опыт показывает, что для медленных движений (каковыми обыкновенно являются колебания маятника) сопротивление, которое встречает со стороны воздуха каждый элемент поверхности, при прочих равных условиях прямо пропорционально площади элемента и скорости. Так как отношение подобия площадей равно λ^2, а отношение скоростей в силу соотношения (13), в котором нужно положить $n_1 = 1$, $n_2 = -1$, $n_3 = 0$, есть $\lambda^{\frac{1}{2}}$, то мы отсюда заключаем, что сопротивления, которые преодолевают маятники, находятся между собой в отношении

$$\lambda^2 \lambda^{\frac{1}{2}} = \lambda^{\frac{5}{2}},$$

а не λ^3, как это требовало бы применение теоремы рубр. 18.

21. Отношение $\lambda^{\frac{5}{2}}$ имеет место в случаях геометрически и материально подобных систем для сопротивления какого угодно рода, если только они пропорциональны площади, на которую они действуют, и скорости. Такого рода сопротивления, как мы увидим в динамике, называются *вязкими*.

Если же, напротив того, приходится иметь дело с так называемыми *гидравлическими* сопротивлениями, т. е. пропорциональными площади действия и *квадрату* скорости, то соответствующее отношение, в том же предположении геометрического и материального подобия, выражается через

$$\lambda^2 (\lambda^{\frac{1}{2}})^2 = \lambda^3.$$

Таким образом в этом случае сопротивления удовлетворяют требованиям, при которых можно применять теорему рубр. 18.

К гидравлическому типу, сейчас определенному, можно отнести, по крайней мере в первом приближении, сопротивление, которое встречает судно, например, влекомое на буксире. Если в таком случае рассмотрим судно Ω и его модель ω, подобные геометрически и материально, то сопротивления R и r, которые в условиях гомологичного движения встречают судно и его модель, связаны, как указано выше, соотношением:

$$R = \lambda^3 r.$$

Чтобы точно установить условия соответствия в этом подобии, мы прибегнем к скорости, которая представляет собой кинематический элемент, наиболее просто вычисляемый; соотношение, определенное выше для сопротивлений, остается в силе для скоростей, которые находятся между собой в отношении $\lambda^{\frac{1}{2}}$, т. е. связаны зависимостью:

$$V = \lambda^{\frac{1}{2}} v.$$

Мы приходим, таким образом, к правилу Фруда: *если построена модель судна, геометрически и материально ему подобная, причем отношение между гомологичными длинами судна и модели есть λ, и если при скорости v модель встречает сопротивление r, то судно при скорости $v\lambda^{\frac{1}{2}}$ встретит сопротивление $r\lambda^3$.*

Аналогично этому между мощностями Π и π, необходимыми для продвижения и для тяги судна и модели, в указанных выше условиях скоростей мы получаем на основе соотношения (13), в котором нужно положить размеры $n_1 = 2$, $n_2 = -3$, $n_3 = 1$ (рубр. 7), следующую зависимость:

$$\Pi = \lambda^{\frac{1}{2}} \pi.$$

22. До сих пор мы рассуждали в предположении, что между приложенными силами фигурируют веса; но бывают случаи, в которых действием тяжести можно пренебречь; в некоторых

случаях оно нейтрализуется другими силами, действие которых исключительно в этом только и проявляется.

Вернемся, например, к случаю судна; совершенно ясно, что на ход судна в навигации действует его вес; но при этом все-таки можно принять, что на *спокойной* воде, в нормальных условиях погружения, этот вес нейтрализуется давлением воды; таким образом можно ту и другую силу вовсе опустить. Заметим, кстати, что то же можно сказать о подводных судах, а в воздухе об аэростатах и дирижаблях.

Имея это в виду, рассмотрим, как в предыдущей рубрике, судно Ω и его модель ω, подобную ему геометрически и материально при отношении λ геометрического подобия. И здесь материальное подобие судов Ω и ω приводит массы к отношению $\mu=\lambda^3$; но так как в установленном сейчас смысле мы здесь можем весами пренебречь, то отношение гомологичных сил a priori остается неопределенным. Иными словами, здесь представляется возможность такого механического подобия, которое зависит уже не от одного произвольного отношения (т. е. отношения длин), как в предыдущих примерах, но от *двух* произвольных отношений: от геометрического отношения λ и другого отношения механического типа. Таким образом при определении подобия мы можем предуказать, кроме λ, еще отношение φ гомологичных сил или же отношение τ времен или, наконец, отношение гомологичных значений какой бы то ни было механической величины, не зависящей исключительно от длин и масс. Мы здесь предположим, что предуказано отношение ν скоростей, поскольку скорости сами по себе имеют в том случае, который нас теперь занимает, особенно важное значение с точки зрения практического применения этой задачи. Отношение ν скоростей связано с отношениями λ и τ длин и времен соотношением

$$\nu=\lambda\tau^{-1} \quad \text{или} \quad \tau=\lambda\nu^{-1}\,; \tag{14}$$

вместе с тем, для механических величин, имеющих относительно длин, времен и масс размеры n_1, n_2, n_3, отношение

$$\lambda^{n_1}\tau^{n_2}\mu^{n_3}$$

принимает в нашем случае значение:

$$\lambda^{n_1}(\lambda\nu^{-1})^{n_2}\lambda^{3n_3}=\lambda^{n_1+n_2+3n_3}\nu^{-n_2}$$

ввиду того, что, с одной стороны, имеет место соотношение (14), а с другой стороны, вследствие материального подобия, $\nu=\lambda^3$.

Если теперь через Q и q обозначим меры (т. е. численные значения, выраженные в одной и той же системе единиц) какой-либо величины с размерами n_1, n_2, n_3 для судна и для модели, то будем иметь:

$$Q=\lambda^{n_1+n_2+3n_3}\nu^{-n_2}q.$$

Таким образом, например, между мощностями Π и π, необходимыми для сообщения судну и модели скоростей, находящихся в отношении ν, будет иметь место зависимость:

$$\Pi = \lambda^2 \nu^3 \pi. \tag{15}$$

23. Чтобы дать интересное приложение формулы (15), покажем, в какой мере она оправдывает тенденцию, доминирующую в современном судостроении, увеличивать размеры пароходов даже независимо от усовершенствования типа судна.

Чтобы не менять принятых уже обозначений, будем разуметь под Ω и ω два парохода, подобные между собой геометрически и материально во всех своих частях, а следовательно, и в отношении машин, винтов и т. д. Поставим себе, прежде всего, целью рассмотреть, в каком отношении находятся между собой скорости этих двух пароходов, когда соответствующие машины функционируют одинаковым образом.

Естественно, чтобы самая задача имела смысл, нужно, прежде всего, точно установить, что мы, собственно, разумеем под одинаковым функционированием машин. Мы, конечно, предполагаем, что тип обеих машин один и тот же; при этих условиях целесообразно говорить, что они одинаково функционируют, если в равные промежутки времени они поглощают количества угля, пропорциональные емкости соответствующих печей, т. е. имеющие отношение λ^3.

С другой стороны, заметим, что на ходу работа, производимая тепловой машиной за данное время, находится в постоянном отношении к количеству поглощаемого топлива; это отношение зависит только от типа машины; таким образом в нашем случае это отношение будет то же для машин Ω и ω.

Отсюда следует, что отношение количеств угля, поглощаемых обеими машинами в единицу времени, не может отличаться от отношения мощностей обеих машин, т. е. по формуле (15) от $\lambda^2\nu^3$; учитывая двоякий расчет, полученный для отношения количеств поглощаемого угля на обоих судах в условиях одинакового функционирования, мы заключаем, что должно иметь место равенство:

$$\lambda^3 = \lambda^2 \nu^3,$$

откуда следует, что

$$\nu = \sqrt[3]{\lambda};$$

вместе с тем искомое отношение скоростей V и v двух пароходов будет:

$$V = \sqrt[3]{\lambda} v;$$

это значит: *в условиях одинакового функционирования машин скорость возрастает, как корень кубичный из отношения длин.* С другой стороны, на обоих судах объемы, а следовательно, и тоннажи находятся, как и расходы топлива, в отношении λ^3; мы видим, таким образом, что при равных временах стоимость транспорта, отнесенная к тонне, остается та же в обоих случаях. Но при равенстве пробега более быстрое судно имеет, очевидно, преимущество, так как расходы по транспорту (отнесенные, например, к тонне на километр) оказываются обратно пропорциональными скоростям. Таким образом стоимость перевозки тонны на километр на судне Ω составляет

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda}}$$

аналогичной стоимости на судне ω.

Положим, например, что ω есть судно длиной в 100 *м*, которое делает нормально 20 узлов в час (один узел равен одной морской миле или 1852 *м*); если построим подобное судно в 130 *м* длины, то будем располагать скоростью в

$$20\sqrt[3]{\frac{130}{100}} = 20 \cdot 1{,}091 = 21{,}82,$$

т. е. почти 22 узла; стоимость провоза тонны на километр снизится на $\frac{1}{1{,}091} = 0{,}916$ цены на пароходе ω; мы получили бы, таким образом, экономию, превосходящую 8%, помимо преимущества более быстрой доставки.

24. Примем теперь для обоих судов Ω и ω ту же самую скорость ($\nu = 1$); соотношение (15) показывает, что отношение мощностей, которыми для этого должны располагать машины, должно быть равно λ^2. Предположим далее, по крайней мере в пределах довольно грубого приближения, что отношение мощностей совпадает с отношением количеств топлива, поглощаемых в одинаковое время; тогда для соответствующих расходов S и s мы можем положить:

$$\frac{S}{s} = \lambda^2;$$

с другой стороны, отношение тоннажей $\frac{K}{k}$ всегда совпадает с отношением объемов; отсюда следует, что

$$\frac{S}{K} : \frac{s}{k} = \frac{1}{\lambda}.$$

S и s представляют расходы в одинаковые промежутки времени; относя их, в частности, к промежутку времени (одинаковому ввиду принятого равенства скоростей), в которое оба судна проходят 1 *км*, мы замечаем, что два отношения $\frac{K}{S}$ и $\frac{s}{k}$ представляют собой не что иное, как стоимости перевозки тонны на километр. Этот расход для судна Ω составляет, таким образом, приблизительно $\frac{1}{\lambda}$ часть аналогичного расхода на судне ω.

В предыдущем примере $\frac{1}{\lambda} = \frac{100}{130} = 0{,}769$. Экономия достигает, таким образом, 23% без потери в скорости.

Эти соображения не имеют вполне точного количественного значения; но они достаточно определенно свидетельствуют, что тенденция к строению морских колоссов имеет ясно выраженные преимущества.

25. Итак, в случаях, когда можно пренебречь влиянием тяжести, мы располагаем еще одним отношением, которое вместе с λ определяет механическое подобие. Приведем еще один пример для иллюстрации преимущества, которое это может дать.

Рассмотрим так называемые винтовые пропеллеры, применяемые на судах и дирижаблях (в случае самолетов совершенно пренебрегать весом невозможно).

Наиболее отчетливой характеристикой действия пропеллера является число оборотов винта в секунду; как механическая величина, оно представляет собой, очевидно, не что иное, как угловую скорость, а потому имеет размерность $[t^{-1}]$.

Если мы теперь сравним два пропеллера Ω и ω, подобные геометрически и материально, то отношение γ между числами оборотов соответствующих винтов в секунду выразится, в условиях механического подобия, через

$$\gamma = \tau^{-1}.$$

С другой стороны, материальное подобие налагает, как обыкновенно, на массы и объемы соотношение $\mu = \lambda^3$; вследствие этого гомологичные значения Q и q одной и той же механической величины с размерами n_1, n_2, n_3, вычисленные для Ω и ω, связаны равенством:

$$Q = \lambda^{n_1 + 3n_3} \gamma^{-n_2} q.$$

Таким образом, в частности, для движущих сил F и f ($n_1 = 1$, $n_2 = -2$, $n_3 = 1$) и для мощностей Π и π ($n_1 = 2$, $n_2 = -3$, $n_3 = 1$) имеют место соотношения:

$$F = \lambda^4 \gamma^2 f, \quad \Pi = \lambda^5 \gamma^3 \pi. \tag{16}$$

В первую очередь, мы эти формулы применим к одному и тому же пропеллеру ($\lambda = 1$) в двух различных режимах его действия; положим, что γ есть отношение чисел оборотов, производимых винтом в секунду в одном и другом режиме; мы легко найдем, что отношение

$$\frac{F^3}{\Pi^2} \tag{17}$$

не зависит от γ; иными словами, отношение между кубом продвигающей силы и квадратом мощности представляет собой постоянную, характерную для пропеллера (размерности $l^{-1}m$).

Теперь сравним функционирование двух каких-либо подобных пропеллеров. Исключая γ из соотношений (16), мы найдем:

$$F = \frac{t}{\pi^{\frac{2}{3}}} \lambda^{\frac{2}{3}} \Pi^{\frac{2}{3}};$$

обозначая поэтому через c отношение

$$\frac{f}{\pi^{\frac{2}{3}}}$$

[кубичный корень из характеристической постоянной (17) пропеллера ω], мы видим, что можно считать раз навсегда

$$F = c\lambda^{\frac{8}{3}}\Pi^{\frac{2}{3}}.$$

Эта формула приводит к интересному выводу; диаметр λ винта и мощность, с которой функционирует мотор, по крайней мере в известных границах, находятся в распоряжении экспериментатора и потому могут быть рассматриваемы как две независимые переменные (предполагается, конечно, что эксперименты производятся над пропеллерами одного и того же типа).

Мы не будем здесь останавливаться долее на этом соображении; прибавим только, что Ренар (Rénard, умер в 1905 г.) вывел из этих принципов очень изящные теоремы и замечательные практические следствия для так называемых геликоптеров (аппараты для поддержания определенной высоты, схематически состоящие из винта, вращающегося вокруг вертикальной оси). Ныне геликоптеры отошли на второй план по сравнению с аэропланами.

УПРАЖНЕНИЯ
к гл. VII—IX.

1. Компоненты позиционной силы выражаются уравнениями:

$$X = -ky, \quad Y = kx, \quad Z = 0,$$

где k обозначает какую угодно функцию места. Показать, что силовыми линиями служат окружности, центры которых расположены на оси z. Применить к примеру d) гл. VII, рубр. **29**.

2. В плоском поле компоненты силы принадлежат к типу

$$X = -k\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad Y = k\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

где k и ψ суть функции места. Показать, что силовые линии выражаются уравнением $\psi(x, y) = \text{const}$.

3. Сила, компоненты которой X, Y, Z выражаются по порядку функциями одного только x, одного только y, одного только z, принадлежит консервативному полю. Указать потенциал и применить к частному случаю, в котором при постоянных k и n

$$X = kx^n, \quad Y = ky^n, \quad Z = kz^n.$$

4. Пруд, занимающий площадь в 1 *км*^{2} и средней глубиной в 20 *см*, осушается центробежными насосами, которые выбрасывают воду на высоту 5 *м* над уровнем пруда. Какую работу должны выполнить насосы, чтобы осушить весь пруд (для простоты следует допустить, что каждая частица воды выбрасывается на высоту в 5,1 *м*).

5. Тело весом в 50 *кг* скатывается на 8 *м* по линии наибольшего ската плоскости, наклоненной к горизонту на 30°; оно испытывает при этом сопротивление, направленное противоположно движению, в 20 *кг*. Вычислить работу, производимую при этом спуске обеими силами — весом и сопротивлением.

6. Тяжелое тело весом в 0,8 *кг* находится на высоте 14 *м* над уровнем земли; оно брошено вертикально вниз с начальной скоростью 4 *м* в секунду. Показать, что кинетическая энергия, с которой тело достигает точки падения, составляет 11,85 *кг* (сопротивлением воздуха при этом пренебрегаем).

7. Какова кинетическая энергия T, которой обладает снаряд весом в 129 *кг*, брошенный в пустоте с начальной скоростью в 600 *м/сек* под углом в 30° к горизонту, в момент, когда он достигает верхней точки траектории? ($T = 165\,306$ *кг*).

8. Какова мощность мотора, способного поднять 10 раз в минуту вес в 80 *кг* на высоту в 4,5 *м*, предполагая, что 25% мощности поглощается внутренними сопротивлениями (1,066 HP).

9. Известно, что киловатт-час электрической энергии для нужд отопления стоит 0,45 лиры и что 1 $м^3$ газа, дающий 3800 *кал*, стоит 0,75 лиры. Определить отношение расходов при том же количестве использованных калорий, полученных одним и другим способами.

При указанных заданиях электрическое отопление обходится, примерно, в 2,5 раза дороже газового.

10 Современный локомотив, мощность которого достигает 1200 HP, может тащить по плоскости и прямолинейной колее при наибольшей скорости в 108 *км* в час поезд весом в 450 *т* (включая сюда и вес локомотива). Принимая, что при наибольшей скорости вся мощность локомотива затрачивается на преодоление сопротивлений (которые можно считать постоянными), требуется:

1) вычислить полное сопротивление (в килограммах),

2) определить, на каком расстоянии остановится поезд, если локомотив перестанет действовать при наибольшей скорости поезда (6888 *м*).

11. Из элементов электростатики известно, что две электрические массы e и e' того же рода (поскольку их можно рассматривать как точечные заряды) на расстоянии r оказывают друг на друга притяжение, пропорциональное

$$\frac{ee'}{r^2}.$$

Требуется установить единицу электрического заряда (или, как говорят также, „количества электричества“) таким образом, чтобы коэфициент пропорциональности обратился в единицу. Показать, что размерность количества электричества выражается формулой $l^{\frac{3}{2}} t^{-1} m^{\frac{1}{2}}$.

12. В абсолютной системе единиц, которой пользуются в электротехнике, единицей длины служит 10^7 *м*, единицей времени служит секунда, а единицей массы 10^{-11} *г*. Показать, что единицей (производной) работы служит как раз джоуль, равный 10^7 эргов (IX, рубр. 6).

13. Метод нулевых размерностей [1]**. Алгебраические предпосылки.** Три одночлена, определяемые формулами

$$\xi = x^{a_1} y^{b_1} z^{c_1}, \quad \eta = x^{a_2} y^{b_2} z^{c_2}, \quad \zeta = x^{a_3} y^{b_3} z^{c_3}. \tag{1}$$

называются независимыми, если уравнения (1) могут быть разрешены относительно x, y, z.

Если мы возьмем логарифмы обеих частей каждого из этих уравнений, то при независимости этих одночленов вновь полученные уравнения должны разрешаться относительно $\lg x$, $\lg y$, $\lg z$. Отсюда следует, что необходимое и достаточное условие независимости трех одночленов заключается в том, чтобы

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

[1]) Заимствовано из исследований Д. Рябушинского („Известия Аэродинамического института в Кучино, Москва, 1912 г.) и Странео (*P. Straneo*, Rend. della R. Accademia dei Lincei, 2-e sem. 1917).

Аналогично этому определяется также независимость одночленов, представляющих функции двух переменных

$$\xi = x^{a_1}y^{b_1}, \quad \eta = x^{a_2}y^{b_2}.$$

Из этих определений непосредственно вытекает следующая теорема: *если* ξ, η, ζ *суть три одночлена, независимые относительно* x, y, z, *то каждый одночлен вида* $x^a y^b z^c$ *можно представить* в форме $\xi^\alpha\eta^\beta\zeta^\gamma$.

В самом деле, в силу исходных соотношений (1), можно написать:

$$\xi^\alpha\eta^\beta\zeta^\gamma = x^{a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma} \quad y^{b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma}, \quad z^{c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma};$$

но, поскольку удовлетворено условие (2), мы всегда можем определить α, β, γ из линейных уравнений:

$$\begin{aligned} a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma &= a, \\ b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma &= b, \\ c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma &= c; \end{aligned}$$

после этого предыдущее равенство примет вид:

$$\xi^\alpha\eta^\beta\zeta^\gamma = x^a y^b z^c,$$

как это и требовалось доказать.

14. Независимость размерностей. Как было показано в рубр. 7 гл. IX, для любой величины Q в абсолютной системе имеет место символическое равенство:

$$[Q] = l^{n_1} t^{n_2} m^{n_3};$$

коэфициент приведения для численного значения q этой величины равен (IX, рубр. 9):

$$\chi = \lambda^{n_1}\tau^{n_2}\mu^{n_3}.$$

Мы будем говорить, что три величины Q', Q'', Q''' независимы по своим размерностям, если независимы их коэфициенты приведения. Иначе говоря, если соответствующие коэфициенты приведения выражаются формулами:

$$\begin{aligned} \chi' &= \lambda^{n_1'}\tau^{n_2'}\mu^{n_3'}, \\ \chi'' &= \lambda^{n_1''}\tau^{n_2''}\mu^{n_3''}, \\ \chi''' &= \lambda^{n_1'''}\tau^{n_2'''}\mu^{n_3'''}, \end{aligned} \tag{3}$$

то эти величины независимы, когда

$$\begin{vmatrix} n_1' & n_2' & n_3' \\ n_1'' & n_2'' & n_3'' \\ n_1''' & n_2''' & n_3''' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пример I. Скорость, ускорение и энергия являются независимыми механическими величинами, ибо их коэфициенты приведения имеют вид:

$$\nu = \lambda\tau^{-1}, \quad \alpha = \lambda\tau^{-2}, \quad \varepsilon = \lambda^2\tau^{-2}\mu.$$

Вместе с тем

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Пример II. Скорость, сила и мощность суть зависимые по размерности величины, ибо

$$\nu = \lambda\tau^{-1}, \quad \varphi = \lambda\tau^{-2}\mu, \quad \pi = \lambda^2\tau^{-3}\mu;$$

определитель размерностей

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

ТЕОРЕМА. *Если Q', Q'', Q''' суть три независимые физические величины с коэфициентами приведения χ', χ'', χ''', выражаемыми уравнениями* (3), *то для всякой четвертой величины Q коэфициент приведения χ можно будет представить в виде:*

$$\chi = \chi'^{\alpha} \chi''^{\beta} \chi'''^{\gamma}. \tag{4}$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно сообразить, что всякая физическая величина Q имеет коэфициент приведения вида:

$$\chi = \lambda^{n_1} \tau^{n_2} \mu^{n_3},$$

и применить теорему, установленную выше среди алгебраических предпосылок.

Если теперь примем во внимание, что, в силу соотношения (4), мера q величины Q является трехкратно однородной относительно мер q', q'', q''' рассматриваемых трех величин, то это соотношение, очевидно, может быть заменено символическим уравнением:

$$[q] = q'^{\alpha} q''^{\beta} q'''^{\gamma}. \tag{5}$$

Пример. Мы убедились выше, что скорость, ускорение и энергия суть три независимые величины. Выведем теперь размерность силы через v, a, e. Для этого достаточно определить α, β, γ из соотношения:

$$\lambda\tau^{-2}\mu = (\lambda\tau^{-1})^{\alpha}(\lambda\tau^{-2})^{\beta}(\lambda^2\tau^{-2}\mu)^{\gamma} = \lambda^{\alpha+\beta+2\gamma}\tau^{-\alpha-2\beta-2\gamma}\mu^{\gamma}.$$

Приравнивая показатели обеих частей этого уравнения, находим непосредственно, что $\gamma = 1$, а потому

$$\alpha + \beta + 2 = 1, \quad -\alpha - 2\beta - 2 = -2;$$

отсюда следует, что

$$\alpha = -2, \quad \beta = 1.$$

Итак, по отношению к скорости, ускорению и энергии сила имеет размеры:

$$[f] = v^{-2}ae.$$

Замечание. Полезно отметить как следствие предыдущих результатов, что *отношение между q и произведением $q'^{\alpha} q''^{\beta} q'''^{\gamma}$, в силу соотношения* (5), *представляет собой чистое число; иначе говоря, для этого отношения все показатели размерности равны нулю.*

Правило приведения к нулевым размерам. Предположим, что мера q некоторой физической величины может быть выражена через меры $q_1, q_2, \ldots, q_n$ других физических величин и некоторые другие числа, совокупность которых обозначим через r. Это значит:

$$q = f(q_1, q_2, \ldots, q_n \mid r). \tag{6}$$

Допустим, далее, что три из этих величин, скажем три первые, по своим размерностям независимы; согласно вышеприведенному замечанию, меры $n-3$ остальных величин могут быть выражены в виде произведения некоторых степеней количеств q_1, q_2, q_3 на чистые числа. Если совокупность последних обозначим через r', то соотношение (6) в конечном результате приведется к виду:

$$q = F(q_1, q_2, q_3 \mid r \mid r'). \tag{6'}$$

Но как мера физической величины q обладает трехкратной однородностью относительно трех независимых мер q_1, q_2, q_3; если поэтому α, β, γ суть показатели однородности q относительно q_1, q_2, q_3, то уравнение (6') можно написать в виде:

$$q = q_1^{\alpha}\, q_2^{\beta}\, q_3^{\gamma}\, F(1, 1, 1, \mid r, r'). \tag{6''}$$

К совершенно аналогичному результату мы приходим и в том случае, когда в числе n мер $q_1, q_2, \ldots, q_n$ имеются всего две независимые или даже только одна: множители при чистом числе F сводятся соответственно к двум или к одному.

Указанный прием, приводящий к соотношению (6″) или к аналогичным соотношениям (когда в правой части остаются только две независимые величины или даже только одна), получил название *метода нулевых размеров*. Он представляет собою, по существу, только следствие или алгорифмическое усовершенствование закона однородности, ограничивающего форму, в которой могут быть представлены зависимости между физическими величинами. В некоторых случаях он приводит к исчерпывающей характеристике такого рода соотношений.

ПРИМЕНЕНИЯ

1. Продолжительность колебания простого маятника. Проделать вновь вычисления рубр. **19** гл. IX, пользуясь методом нулевых размеров.

2. Сопротивление прямоугольной пластины. Прямоугольная пластина, настолько тонкая, что ее толщиной можно совершенно пренебречь, движется в среде, оказывающей ей сопротивление. Нужно определить, в каком виде может быть выражено это сопротивление, которое представляет собою результат давления, оказываемого жидкой средой на каждый элемент пластины.

Прежде всего непосредственно ясно, что мера r этого сопротивления должна зависеть, помимо размеров a, b прямоугольной пластины и ее наклона θ к направлению движения, еще от ее скорости v, а также от давления p и плотности ρ среды. Кроме того, опыты, систематически проводившиеся в последние годы для нужд воздухоплавания, обнаружили, что r существенно зависит также от *вязкости* жидкости; более того, основательные исследования *Рейнольдса* (Reynolds) показали, что в пределах обыкновенных скоростей (т. е. не достигающих скоростей снарядов или вообще скоростей, сравнимых со скоростью звука) именно это сопротивление вязкости имеет преобладающее значение.

Для вычисления *вязкости* представим себе внутри жидкости два смежных параллельных поверхностных элемента. Если dx есть расстояние между ними, dv — разность их скоростей (или относительная скорость одной площадки по отношению к другой), то опыт обнаруживает, что между двумя элементами проявляется отталкивательная сила, напряжение которой, отнесенное к единице площади, пропорционально *падению скорости* $\frac{dv}{dx}$; таким образом

$$\tau = \mu \frac{dv}{dx},$$

где μ есть так называемый *коэфициент вязкости*. Учитывая все это, мы приходим к предположению, что

$$r = f\,(a,\ b,\ \theta,\ v,\ p,\ \rho,\ \mu)\,.$$

Заменяя переменные a и b двумя другими k, σ, связанными с ними соотношениями

$$k = \frac{a}{b}, \quad \sigma = ab,$$

т. е. представляющими так называемую удлиненность пластины и ее плотность, а также выделяя переменные k и θ, выражаемые чистыми числами, представим предыдущую зависимость в виде:

$$r = f_1\,(\sigma,\ v,\ p,\ \rho,\ \mu\,|\,k,\ \theta)\,.$$

Так как, с другой стороны,

$$[\sigma] = l^2, \quad [v] = lt^{-1}, \quad [\rho] = l^{-3}m,$$

то совершенно ясно, что σ, v, ρ по *по своим размерам независимы*. Чтобы в этом убедиться, достаточно вычислить определитель размерностей или же просто принять во внимание, что σ и v равнонезависимы, а ρ зависит от массы, которая в выражение этих двух других величин не входит.

Через эти три переменные можно выразить давление p. Так как p есть давление, оказываемое средой на единицу площади, то оно представляет собою отношение силы к площади, а потому

$$[q] = l^{-1}t^{-2}m.$$

Поэтому μ (отношение давления на единицу площади к падению скорости) имеет размерность:

$$[\mu] = l^{-1}t^{-1}m.$$

Поступая, как выше, при установлении соотношения (5), найдем:

$$[p] = v^2\rho, \quad [\mu] = \sigma^{\frac{1}{2}} v\rho,$$

Поэтому два отношения

$$w^2 = \frac{v^2\rho}{p}, \qquad R = \frac{\sigma^{\frac{1}{2}} v\rho}{\mu}$$

представляют собою чистые числа. Значение первого выясняется, когда принимаем во внимание, что $\frac{p}{\rho}$ как раз представляет квадрат скорости звука в этой жидкости. Что касается R, то это есть так называемое *число Рейнольдса.*

Соотношение, выражающее r, можно поэтому представить в виде:

$$r = F\ (\sigma,\ v,\ \rho \mid k,\ \theta,\ w,\ R).$$

С другой стороны, r есть сила, а потому $[r] = lt^{-2}m$; вместе с тем вычисление, приводящее к общему соотношению (5), дает:

$$[r] = \sigma\rho v^2.$$

Таким образом окончательное выражение величины r будет иметь вид:

$$r = \sigma\rho v^2 \Phi\,(k,\ \theta,\ w,\ R),$$

где Φ есть функция одних только указанных аргументов.

Мы, таким образом, обнаружили, что сопротивление, которое встречает пластина, пропорционально произведению из ее площади на плотность среды и на квадрат скорости движения; коэфициент же пропорциональности представляет собой функцию некоторых чистых чисел, значение которых мы выше выяснили. Ньютон дал для r выражение $c\sigma\rho v^2$, где c есть постоянная. Как уже сказано, это допущение представляет собой только грубое приближение; наш анализ обнаруживает, от каких элементов еще зависит коэфициент c.

14. Мир в миниатюре [1]). В теории относительности скорость света при отсутствии возмущающих влияний представляет собой универсальную постоянную, в широких пределах не зависящую от передвижения наблюдателя. Современные взгляды на состав электричества (электронная теория) ведут к тому, что электрический заряд не представляет собой чего-либо сплошного, а есть дискретная совокупность элементарных зарядов, которые называются электронами. С этой точки зрения, мерой электрического заряда можно считать число электронов, из которых он состоит; электрон рассматривается, таким образом, как единица меры. Какова бы ни была принятая система мер число электронов в заряде всегда должно оставаться одно и то же.

Если мы желаем построить модель вселенной, в которой сохранялась бы, как и в действительной вселенной, скорость света и для которой оставался бы в силе электронный критерий измерения электрических зарядов, мы должны будем выбрать такие единицы длины, времени и массы, при которых коэфициенты приведения для измерения скоростей и электрических зарядов будут

[1]) Ср. *R. Tolman*, The principle of Similitode, „Physical Review", Vol. 3, 1914, стр. 244—255.

равны единице. Мы будем называть, как обыкновенно, λ, τ, μ **коэфициентами** приведения основных единиц. Так как $\lambda\tau^{-1}$ и (см. упражнение II) $\lambda^{\frac{3}{2}}\tau^{-1}\mu^{\frac{1}{2}}$ суть коэфициенты приведения скорости и электрического заряда, то должны иметь место равенства:

$$\lambda\tau^{-1} = 1, \quad \lambda^{\frac{3}{2}}\tau^{-1}\mu^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Разрешая эти уравнения относительно r и μ, получим:

$$r = \lambda, \quad \mu = \lambda^{-1}.$$

Найдя, таким образом, коэфициенты приведения для времен и масс в модели, которую требуется построить, мы уже найдем легко коэфициент приведения всякой величины Q, размеры которого суть n_1, n_2, n_3; он равен:

$$\lambda^{n_1}\tau^{n_2}\mu^{n_3} = \lambda^{n_1+n_2-n_3}.$$

Таким образом мера q' величины Q, определяемая в действительном мире, будет связана с мерой q, обнаруживаемой на модели, которую мы могли бы назвать *миром в миниатюре*, соотношением:

$$q' = \lambda^{n_1+n_2-n_3}q.$$

Пример. Так как для силы $n_1 = 1$, $n_2 = -2$, $n_3 = 1$, то

$$f' = \lambda^{-2}f;$$

для мощности $n_1 = 2$, $n_2 = -3$, $n_3 = 1$, а потому

$$\pi' = \lambda^{-2}\pi.$$

15. Припомним, что при установлении механического подобия мы ввели в качестве необходимых предпосылок следующие две: гомологичные части сделаны из одного и того же материала, так что $\mu = \lambda^3$; ускорение силы тяжести остается неизменным; поэтому $\lambda r^{-1} = 1$. Эти допущения, в общем, приняты для реализуемости подобия на поверхности земли. Но если вопрос рассматривается с теоретической точки зрения, то нет основания для такого рода предположений, касающихся веса и состояния вещества. По указанным причинам вместо допущения, что не меняется ускорение силы тяжести, принимается постоянство скорости света, а вместо гипотезы материального подобия — электронная точка зрения, согласно которой тела природы состоят из атомов, а эти последние из электронов. С этой точки зрения можно считать оправданным релятивистское атомистическое построение Тольмана: здесь оно, во всяком случае, приведено лишь в качестве примера глубоких соображений, которые могут быть построены на основе теории подобия.