ДОПОЛНЕНИЕ I.

О векторном алгорифме и точечном исчислении, применяемых авторами настоящего сочинения.

Как сказано в предисловии, в русском издании настоящего сочинения изменена схема векторного алгорифма, которым пользуются авторы. Внесенные изменения носят двоякий характер. Во-первых, для выполнения стандарта векторных обозначений, принятого Комитетом по стандартизации СССР, изменены некоторые обозначения. Во-вторых, то своеобразное соединение векторного исчисления с точечным, которым пользуются авторы, приведено к единой векторной схеме в соответствии с преподаванием векторного исчисления в наших высших учебных заведениях, более того — в соответствии с тем векторным алгорифмом, который принят в настоящее время во всем мире, кроме итальянской школы. Векторное исчисление еще ведет в нашей школе борьбу не только за свое преобладание, но часто даже за самое свое существование. Если при колеблющихся симпатиях к нему внести в схему и в алгорифм векторного исчисления разнобой, то это даст оружие в руки его противников и может привести если не к поражению, то к снижению того веса, который оно может и должно иметь в нашей литературе и в нашей школе. Таковы причины, которые заставили нас внести в символику и в алгорифм авторов некоторые изменения.

И все же нужно сказать, что мы не легко на это решились. Авторитет ученых, перу которых принадлежит настоящая книга, настолько велик, что позволить себе вносить в их текст изменения не так легко и не так просто. И это тем более существенно, что своеобразный алгорифм, которого придерживаются Леви-Чивита и Амальди, конечно, отнюдь не является случайным. Напротив, это принципиальная установка, за которую итальянская школа, в свою очередь, ведет борьбу. Поэтому, чтобы не вытравить воззрений авторов, чтобы дать четкое представление о том, чем отличается их схема от нашей, мы здесь изложим, в чем заключается расхождение.

В обозначениях скалярного и векторного произведений двух векторов в литературе царит большой разнобой. Так, скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ одни авторы [Гиббс (Gibbs), Лагалли

(Lagally)] обозначают символом $a \cdot b$, другие [Бурали-Форти (Burali-Forti), Марколонго (Marcolongo)] символом $a \times b$, третьи (Шпильрейн) пишут просто ab [1]), четвертые [Абрагам (Abraham)] часто употребляют круглые скобки (ab). Для обозначения векторного произведения одни авторы пользуются косым крестом $a \times b$ (Гиббс), другие особым знаком $a \wedge b$ (Бурали-Форти), третьи прямоугольными скобками $[ab]$ (Абрагам).

Различные авторы пользуются при совместном обозначении произведений того и другого типа разными комбинациями этих схем.

Тенденции к установлению единообразной схемы обозначений, как мы указали в предисловии, не привели к общему соглашению. Но две школы приобрели преобладающее значение.

Первая *немецкая* школа получила выражение в гёттингенской „Энциклопедии“ („Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften“), — она обозначает скалярное произведение через ab, векторное через $[ab]$.

Но если в немецкой „Энциклопедии“ векторный стандарт занимает небольшое и в то же время несколько случайное место, то вторая, итальянская векторная школа, руководимая Бурали-Форти и Марколонго, занялась вопросом стандартизации векторных обозначений весьма тщательно и принципиально. Принятый ими стандарт получил систематическое применение в своеобразной энциклопедии векторного исчисления, которую выпускают итальянцы [2]). Здесь скалярное произведение обозначается косым крестом $a \times b$, а векторное особым знаком: $a \wedge b$. Насколько нам известно, все итальянские геометры пользутся этим стандартом. Он проведен авторами и в настоящем сочинении.

Однако авторитет гёттингенской „Энциклопедии“, с одной стороны, и некоторые своеобразные, не всегда удачные, особенности итальянского стандарта, с другой стороны, дали немецкой схеме преобладание. Если итальянцы сохранили и развивают свой стандарт с выдержанной последовательностью, то в других странах долгое время почти безраздельно господствовала немецкая схема. Она была принята также Комитетом по стандартизации СССР. В соответствии с этим она проведена и в настоящем сочинении.

Нужно, однако, сказать, что в самые последние годы в западной литературе преобладает тенденция обозначать векторное произведение особым знаком, — чаще всего косым крестом. Заявление о внесении этого изменения в векторную схему внесено в Комитет по стандартизации и теперь обсуждается в различных математических учреждениях. Если в наш стандарт будут внесены изменения, то это, конечно, найдет отражение и в последующих изданиях настоящего сочинения.

---

[1]) В то же время Гиббс сохраняет символ ab для обозначения диады, а Шпильрейн, напротив, обозначает диаду через $a \cdot b$.

[2]) Analisi vettoriale generale e applicozioni Bologna, 1919—1931.

Вторая особенность, относящаяся уже к самому алгорифму векторного исчисления, также входит в состав итальянского стандарта. Она представляет собой своеобразное соединение векторного исчисления с точечным.

Точечное исчисление, как известно, ведет свое начало от Мёбиуса[1]). Его барицентрическое исчисление представляет собой геометрическую алгебру, в которой объектами алгебраических операций служат „метризованные точки“, т. е. геометрические точки, каждой из которых отнесено некоторое действительное число.

Представим себе k точек $A_1, A_2, \ldots, A_k$, которым отнесены числа $m_1, m_2 \ldots, m_k$. „Метризацию“ можно представлять себе так, что в каждой из этих точек сосредоточена некоторая масса, материальная или, лучше, электрическая (могущая иметь как положительное, так и отрицательное значение); точку A с сосредоточенной в ней массой m Мёбиус символически обозначает через mA, т. е. формально рассматривает метризованную[2]) точку как произведение из точки на число; действительный смысл этого соглашения заключается, однако, только в том, что под произведением mA нужно разуметь точку A, которой отнесено число m, или, конкретнее, в которой сосредоточена масса m.

Под суммой метризованных точек $m_1A_1, m_2A_2, \ldots, m_kA_k$ Мёбиус разумеет метризованную точку, совпадающую с центром масс данной системы точек и несущую массу, равную сумме масс, сосредоточенных в этих точках. Это Мёбиус выражает:

$$mA = m_1A_1 + m_2A_2 + \ldots + m_kA_k,$$
$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_k.$$

Таким образом установлена операция сложения метризованных точек; это соглашение служит основой всего барицентрического исчисления. В школе Грассмана точечное исчисление получило углубленное дальнейшее развитие[3]). Точкой отправления при этом служат следующие соображения.

В одном случае основное определение Мёбиуса становится дефектным; это имеет место, когда сумма масс системы равна нулю; центра масс в этом случае не существует. В частности, сумма двух метризованных точек не определена, когда они несут массы, равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку; центра масс не существует; две равные параллельные

---

[1]) A. Möbius, Der barycentrische Calcul, Leipzig 1827. Gesammelte Werke, Bd. I.

[2]) Термин „метризованная точка“ принадлежит Грассману.

[3]) Современное изложение точечного исчисления можно найти в сочинениях:

R. Mehmke, Verlesungen über Punkt und Vectorrechnung, Leipzig 1913, т. I.

H. Grassmann, Projektive Geometrie der Ebene unter Benutzung der Punktrechnung dargestellt, Leipzig 1909, т. I.

Lotze, Punkt und Vektorrechnung, Leipzig 1929.

силы, приложенные к двум различным точкам и обращенные в противоположные стороны, не имеют равнодействующей. Если принять общую величину этих масс (этих сил) за единицу, то придем к тому, что определение Мёбиуса не устанавливает, что такое $A_1 - A_2$, не определяет разности двух точек. Возникающее отсюда затруднение составляет несомненный дефект барицентрической алгебры, который Мёбиус восполняет обходным путем.

Грассман пришел к своеобразной идее восполнения этого пробела[1]); она заключается в следующем. Разность $B - A$ двух точек (B, A) есть нечто, что надлежит „придать" к точке A, чтобы притти к точке B. Рассматривая это „придаваемое" как путь, который нужно пройти, чтобы из точки A притти в точку B, Грассман принимает за разность $B - A$ вектор $\overline{AB}$, т. е. полагает

$$B - A = \overline{AB} \quad \text{или} \quad B = A + \overline{AB} \qquad [!]$$

(по вектору $\overline{AB}$ мы кратчайшим путем приходим из точки A в B).

Нужно сказать, что это соглашение менее искусственно, чем это кажется на первый взгляд. Оно положило начало так называемой „экстенсивной алгебре", т. е. такой алгебре, в которой результатом той или иной операции может служить объект более высокой ступени, нежели те объекты, над которыми эта операция производится. (Разность двух точек есть отрезок.)

В этом порядке идей уже Грассман широко развил точечную алгебру. Однако из всей схемы Грассмана итальянская школа сохранила только основное положение [!]. В соответствии с этим в итальянском стандарте вектор $\overline{AB}$ систематически обозначается через $B - A$; замена точки B суммой $A + \overline{AB}$ производится в вычислениях всегда, когда это представляется целесообразным. Хотя это часто действительно полезно, но это соединение „интенсивной" векторной алгебры с „экстенсивной" точечной вне Италии не привилось, — в частности, не вошло ни в наш стандарт, ни в нашу школу. Мы от этой схемы были поэтому вынуждены отказаться и перешли к чисто векторному алгорифму. Заметим, что каких-либо существенных изменений текста это нигде не потребовало.

В механике, конечно, целесообразно рассматривать положение P, занимаемое движущейся точкой в момент t, как функцию времени: $P = P(t)$. С точки зрения точечного исчисления элемент пути можно представить бесконечно малым вектором $P(t + \Delta t) - P(t)$ и поэтому скорость в момент t можно рассматривать как предел отношения:

$$\frac{P(t + \Delta t) - Pt}{\Delta t}$$

при $\Delta t \to 0$. Сообразно этому авторы обозначают скорость свое-

---

[1]) К совершенно той же идее к концу жизни пришел Мёбиус независимо от Грассмана.

образной „точечной производной“ $\frac{dP}{dt}=p(t)$ или просто P. Но мы придем к тому же, если будем обозначать через $\overline{P}$ радиус-вектор точки P от неподвижного начала O. Скорость представляется производной $\frac{dP}{dt}$. Чтобы возможно меньше менять текст оригинала, мы сохранили обозначение P для производной $\frac{dP}{dt}$: читатель может понимать ее как производную точки — функции времени — или, не отходя от векторного алгорифма, как производную радиуса-вектора по времени.

ДОПОЛНЕНИЕ II.

О гауссовых координатах.

В рубр. 23 гл. IV авторы вводят гауссовы координаты точки на сфере. В знаменитом своем мемуаре „Disquisitiones generales circa superficies curvas“ (1827) Гаусс задает поверхность аналитически, выражая декартовы координаты точки этой поверхности в функции от двух независимых параметров:

$$x=x(u,\ v),\quad y=y(u,\ v),\quad z=z(u,\ v);$$

исключая параметры u и v этих уравнений, получим декартово уравнение поверхности:

$$f(x,\ y,\ z)=0.$$

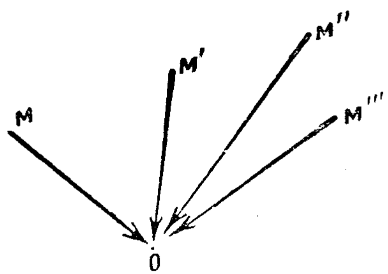
Гаусс, однако, стал на путь исследования поверхности при параметрическом ее задании и тем положил начало современной дифференциальной геометрии. Каждая пара значений параметров u и v таким образом определяет точки на поверхности: в этом смысле параметры u и v можно рассматривать как своеобразные координаты точки поверхности: это и есть „гауссовы координаты“. Если возьмем плоскость в трехмерном пространстве и в ней установим систему декартовых координат, то таковые, конечно, можно будет рассматривать как гауссовы координаты этой плоскости. Координатными линиями при этом будут служить параллельные прямые. Но вообще координаты линии (т. е. линии, на которых тот или иной параметр сохранит постоянное значение) будут кривыми; гауссовы координаты суть криволинейные координаты на поверхности.

На каждой поверхности гауссовы координаты могут быть, конечно, выбраны чрезвычайно разнообразно. На сфере за гауссовы координаты чаще всего принимают долготу и широту точки. Но это далеко не всегда наиболее целесообразно; в картографии в большом ходу также стереографические координаты и бельтрамиевы координаты сферы. Очень замечательная система гауссовых координат определяет положение точки на сфере двумя сопряженными комплексными числами. Этими именно гауссовыми координатами на сфере авторы пользуются в тексте; их аналитическое определение содержится в формулах (22). Координаты λ и μ определяются координатами u_x, u_y, u_z радиуса-вектора точки; из этих уравнений и уравнения поверхности (21) по данным λ и μ, в свою очередь, определяются значения u_x, u_y, u_z, т. е. определяется точка на поверхности шара.

ДОПОЛНЕНИЕ III.

О градиентном векторном поле.

Учение о консервативном силовом поле (VII, рубр. 26—29) представляет собой по существу, частный случай в теории градиентного векторного поля; вообще силовое поле в геометрическом представлении есть частный случай векторного поля. Эту геометрическую сторону дела нам кажется полезным здесь выяснить несколько подробнее.



Под векторным полем разумеют сплошную часть пространства, в каждой точке которой приложен вектор. Если к каждой точке пространства приложим вектор, равный и противоположный ее радиусу-вектору (исходящему от постоянного начала O), то будем иметь векторное поле, это один из простейших примеров векторного поля. Различного рода векторных полей можно себе представить бесчисленное множество. Всякое силовое поле, при векторном изображении сил можно рассматривать как векторное поле.

Если F есть вектор, приложенный в точке $M(x, y, z)$ поля, то его координаты X, Y, Z суть функции от x, y, z:

$$X = X(x, y, z),$$
$$Y = Y(x, y, z),$$
$$Z = Z(x, y, z).$$

Представим себе некоторую кривую MN в векторном поле; ее дугу, содержащуюся между точками M и N, разобьем на элементы; каждый элемент можно рассматривать, как бесконечно малый вектор ds. Пусть F есть вектор поля, приложенный в какой-либо точке элемента кривой. Вычислим скалярное произведение Fds для каждого элемента и составим сумму этих произведений, взятых для всех элементов дуги. Если эта сумма стремится к определенному пределу, когда все элементы кривой стремятся к нулю, то этот предел называют криволинейным интегралом поля, взятым по кривой MN от точки M до точки N.

Так как бесконечно малый вектор ds имеет координаты (компоненты) dx, dy, dz, то

$$\boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{s} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Криволинейный интеграл можно поэтому представить в виде:

$$\int X dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Если координаты точки кривой выразить через параметр t:

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t),$$

то

$$dx = x'(t)\,dt,\quad dy = y'(t)\,dt,\quad dz = z'(t)\,dt.$$

Так как X, Y, Z также выражается в функции от t, то значение криволинейного интеграла всегда выражается квадратурой

$$\int_{t_0}^{t_1} w(t)\,dt, \qquad [!!]$$

где t_0 и t_1 — значения параметра в точках M и N, а $w(t)$ есть функция от (t):

$$w(t) = X(t)\,x'(t) + Y(t)\,y'(t) + Z(t)\,z'(t).$$

Значение криволинейного интеграла в векторном поле, взятого между точками M и N, таким образом, обычно существенно зависит от того, по какой кривой произведено интегрирование. В частных случаях может, однако, оказаться, что значение любого криволинейного интеграла в заданном векторном поле зависит только от положения начальной и конечной точки, а не от пути, по которому интегрирование между этими точками производится. В этом случае векторное поле называется *градиентным*.

Основная относящаяся сюда теорема заключается в том, что криволинейный интеграл (!!) не зависит от пути интегрирования, т. е. векторное поле является градиентным в том и только в том случае, если диференциальный трехчлен $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ есть полный диференциал некоторой функции u, т. е. если имеет место тождество:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dU. \qquad [!!!]$$

Доказательство этого предложения в том или ином его выражении можно найти как в любом курсе векторного анализа, так и в общих курсах анализа[1]).

[1]) Такое доказательство можно найти даже в наиболее элементарном учебнике интегрального исчисления Римана.

С другой стороны, чтобы тождественно существовало равенство [!!!], необходимо и достаточно, чтобы компоненты вектора X, Y, Z были связаны соотношениями, приведенными в начале рубр. 27 текста:

$$\frac{\partial Y}{dz}=\frac{\partial Z}{dy},\quad \frac{\partial Z}{dx}=\frac{\partial X}{dz},\quad \frac{\partial X}{dy}=\frac{\partial Y}{dx}.$$

Если это имеет место, то векторное поле, как сказано, будет градиентным, а вектор F называется градиентом функции U.

Таким образом силовое поле, о котором идет речь в рубр. 26—29 текста, является консервативным, если представляющее его геометрически векторное поле градиентное. Сила поля в этом случае есть градиент потенциальной функции.

Редакция *Н. И. Февралевой.* Оформление *О. Н. Персияниновой.*
Корректуру читала бригада корректоров. Наблюдал за выпуском *Л. М. Волкович.*
Сдано в набор 14/III 1933 г. Формат $62 \times 94/_{16}$. Подписано к печати 25/XII 1934 г.
Бум. листов 12. Авт. л. $32^1/_2$. Тираж 5000. Тип. зн. в 1 бум. л. 108 864.
Уполномоченный Главлита № В-77291. ГТТИ № 32. Заказ № 554.

СПИСОК ОПЕЧАТОК

в книге **„Курс теоретической механики“** Т. Леви-Чивита и У. Амальди, том I, часть 1.

Страница и строка	Напечатано	Должно быть
79 (14 св.)	$\overline{P} = t$	$\dot{P} = \boldsymbol{t}$
79 (19 св.)	$\ddot{P} = \frac{dc}{ds}\boldsymbol{n}$	$\dddot{P} = \frac{dc}{ds}\boldsymbol{n} -$
79 (21 св.)	$\ddot{P}\boldsymbol{b} = -c\tau$	$\dddot{P}\boldsymbol{b} = -c\tau$
111 (20 св.)	$\frac{\Delta\ddot{s}}{\Delta t} = a$	$\frac{\Delta\dot{s}}{\Delta t} = a$
115 (13 св.)	$\ddot{a}_z = \ddot{z}(t)$	$a_z = \ddot{z}(t)$
121 (12 сн.)	$y = \frac{1}{2}gt^2 + y_0t$	$y = \frac{1}{2}gt^2 + \dot{y}_0t$
145 (2 св.)	$\dot{\rho}\boldsymbol{u} + \rho\boldsymbol{u} = \rho\sigma\boldsymbol{u}$	$\dot{\rho}\boldsymbol{u} + \rho\dot{\boldsymbol{u}} = \rho\sigma\boldsymbol{u}$
146 (3 сн.)	$a_\rho = -\dot{\rho}\dot{\theta}^2$	$a_\rho = -\rho\dot{\theta}^2$
286 (17 св.)	оставаться на окружности, центр	оставаться на окружности (фиг. 73), центр
327 (7 сн.)	$my = Y($	$m\ddot{y} = Y($
332 (12 св.)	$dL = \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}dt = (Xx$	$dL = \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}dt = (X\dot{x} +$
337 (2 св.)	$T = \frac{1}{2}(m\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}mv^2$	$T = \frac{1}{2}(m\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2$
Последняя страница, в выходных сведениях	Редакция *Н. И. Февралевой*	Редакция *Н. И. **Февралева.***

Зак. 554