

ГЛАВА III

КОЛЕБАНИЯ

Эта глава не дает ничего нового в вопросе об основных принципах механики; однако, колебательные процессы, ввиду их большого значения для физики и техники, требуют отдельного систематического рассмотрения.

§ 15. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

Колеблющимся телом является в данном случае материальная точка m , связанная невесомым твердым стержнем длины l (называемой длиной маятника) с неподвижной точкой O . Таким образом, траектория материальной точки m будет дугой окружности. Если не принимать во внимание трения в точке подвеса и сопротивления воздуха, то единственной действующей силой будет сила тяжести со слагающей $-mg \sin \varphi$ в направлении возрастания угла φ (рис. 24). Из общего уравнения (11.4) для движения по любой траектории и соотношения $v = l\dot{\varphi}$ (для круговой траектории) получаем точное уравнение маятника:

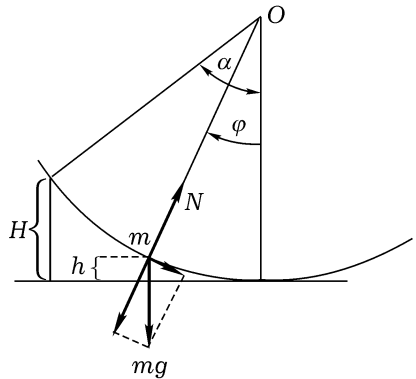


Рис. 24. Математический маятник. Слагающая силы тяжести в направлении траектории

$$ml \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mg \sin \varphi. \quad (15.1)$$

Для достаточно малых колебаний, т.е. при $\varphi \ll 1$, можно принять $\sin \varphi = \varphi$. Тогда, вводя обозначение

$$\frac{g}{l} = \omega^2, \quad (15.2)$$

получим линейное уравнение маятника:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0. \quad (15.3)$$

Это есть дифференциальное уравнение «гармонических колебаний», рассмотренное нами в §3 (раздел 4), оно совпадает (с точностью до обозначений функций) с уравнением (3.23). Определенная соотношением (3.22) «угловая частота» ω дается теперь вышеприведенным равенством (15.2). Таким образом,

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (15.4)$$

Время τ не зависит от массы m . Последняя выпадает уже из уравнения (15.1), следовательно, материальные точки, различные по массе, имеют при одинаковой длине маятника один и тот же период колебания. Время τ и является полным периодом колебания маятника, т.е. продолжительностью его однократного движения вперед и назад. Часто половину этого времени также называют периодом колебания. Например, говорят о «секундном маятнике», если $\frac{\tau}{2}$ равно одной секунде. Длина такого маятника, согласно уравнению (15.4), равна:

$$l = \frac{g}{\pi^2} \sim 1 \text{ метру.}$$

В пределах применимости уравнения (15.3) период колебания не зависит также и от величины амплитуды. Это выражают словами: *малые колебания маятника изохронны*.

Общее решение уравнения (15.3) можно представить в виде

$$\varphi = a \sin \omega t + b \cos \omega t.$$

Потребуем, чтобы $\varphi = 0$ при $t = 0$ и $\varphi = \alpha$ при $t = \frac{\tau}{4}$. Тогда $b = 0$ и $a = \alpha$, т.е.

$$\varphi = \alpha \sin \omega t. \quad (15.5)$$

Здесь α означает угловую амплитуду, т. е. максимальное отклонение от положения равновесия, выраженное в радианах.

При конечном отклонении φ изохронизм нарушается ввиду нелинейности точного уравнения (15.1). Для интегрирования уравнения (15.1) умножаем его на $\frac{d\varphi}{dt}$, что соответствует переходу от уравнения движения к уравнению энергии. Путем интегрирования получаем

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2\omega^2 \cos \varphi + C. \quad (15.6)$$

Постоянная C определяется из условия, что $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ при $\varphi = \alpha$. Следовательно,

$$C = -2\omega^2 \cos \alpha.$$

Непосредственное применение закона сохранения энергии дало бы [принимая во внимание значение H (рис. 24)]:

$$\frac{m}{2}l^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + mgh = mgH; \quad \left\{ \begin{array}{l} h = l(1 - \cos \varphi), \\ H = l(1 - \cos \alpha), \end{array} \right\} \quad (15.6a)$$

что, очевидно, совпадает с уравнением (15.6).

Принимая во внимание, что

$$\cos \varphi - \cos \alpha = 2 \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right),$$

из уравнения (15.6) выводим:

$$\frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = \omega dt; \quad (15.7)$$

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = \omega t. \quad (15.8)$$

Таким образом, мы пришли к «эллиптическому интегралу первого рода». Для пояснения этого термина нужно коснуться «спрямления» дуг

эллипса (т. е. измерения их длины). В качестве уравнения эллипса мы воспользуемся его представлением в параметрической форме:

$$\begin{aligned}x &= a \sin v, \\y &= b \cos v.\end{aligned}$$

В соответствии с этим получаем:

$$\begin{aligned}ds^2 &= dx^2 + dy^2 = (a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v) dv^2, \\ds &= \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 v} dv.\end{aligned}$$

Полагая

$$k^2 = + \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (< 1, \text{ если } a > b),$$

получаем для длины дуги эллипса, заключенной между конечной точкой малой оси $v = 0$ и произвольной точкой v эллипса, следующее выражение

$$s = a \int_0^v \sqrt{1 - k^2 \sin^2 v} dv. \quad (15.9)$$

Это так называемый «эллиптический интеграл второго рода».

Более простой с точки зрения теории функций «интеграл первого рода», если его написать в той же «нормальной форме Лежандра», имеет следующий вид:

$$\int_0^v \frac{dv}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 v}}.$$

К этой форме приводим наш интеграл (15.8) с помощью преобразования

$$\begin{aligned}\sin \frac{\varphi}{2} &= \sin \frac{\alpha}{2} \sin v, \\ \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}} &= \sin \frac{\alpha}{2} \cos v, \\ \frac{d\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} &= \frac{dv}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{dv}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 v}}.\end{aligned} \quad (15.10)$$

«Модуль» k здесь равен:

$$k = \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (15.11)$$

Чтобы вычислить период колебаний τ , нужно в формуле (15.8) положить $t = \frac{\tau}{4}$ и $\varphi = \alpha$, т. е., согласно (15.10), $v = \frac{\pi}{2}$. Таким путем мы получим так называемый «полный интеграл первого рода», который обозначается через K :

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{dv}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 v}}. \quad (15.12)$$

Итак, формула (15.8) после подстановки ω из равенства (15.2) дает:

$$\tau = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K. \quad (15.13)$$

Из определения (15.12) непосредственно следует, что $K = \frac{\pi}{2}$ при $k \rightarrow 0$, т. е., согласно условию (15.11), для достаточно малых амплитуд α ; $K = \infty$ при $k \rightarrow 1$, т. е., согласно условию (15.11), для $\alpha = \pi$ (отклонение до вертикального положения).

В первом случае мы, естественно, снова получаем нашу прежнюю формулу (15.4). В последнем же случае имеет место максимальное отклонение от этой формулы.

В общем случае, путем разложения в ряд по формуле бинома и почленного интегрирования выражения (15.12), находим:

$$K = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^4}{64} + \dots \right).$$

Этому соответствует общее выражение для периода колебания τ :

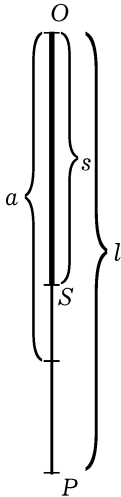
$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots \right), \quad (15.14)$$

которым количественно определяется отклонение от изохронизма при конечных амплитудах α .

Астрономические часы снабжены маятником простой конструкции с амплитудой $\alpha \leq 1\frac{1}{2}^\circ$. Для таких часов первый поправочный член в скобках формулы (15.14) равен приблизительно $1/20\,000$.

§ 16. ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

Эта задача отличается от задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной оси, уже рассмотренной нами в § 11 (раздел 1), только



тем, что здесь под внешними силами подразумеваются специально силы тяжести. Обозначим через s расстояние между центром тяжести S и неподвижной осью (здесь термин «центр тяжести» следует понимать в собственном смысле слова — как «центр сил тяжести», тогда как обычно этим термином обозначают, строго говоря, «центр инерции»); через φ — угол, образованный осью OS с вертикалью (мы можем считать массу тела распределенной приблизительно симметрично относительно оси OS). Тогда полный момент (относительно оси O) сил тяжести, приложенных к отдельным элементам массы dm (сумма которых равна массе маятника m), будет, очевидно, равен:

$$M = -mgs \sin \varphi, \quad (16.1)$$

Рис. 25. Физический маятник. Точка подвеса O , центр тяжести S и центр качаний P . Радиус инерции a как среднее геометрическое между длиной маятника l и расстоянием s центра тяжести от точки подвеса

и уравнение движения, согласно формуле (11.4), примет вид:

$$\Theta \ddot{\varphi} = -mgs \sin \varphi. \quad (16.2)$$

Из сравнения этого уравнения с уравнением движения (15.1) математического маятника получаем длину l эквивалентного математического маятника, т. е. математического маятника, имеющего тот же период, что и данный физический маятник:

$$l = \frac{\Theta}{ms}. \quad (16.3)$$

Величина l называется также «приведенной длиной» физического маятника.

Введем еще вместо Θ так называемый «радиус инерции» a , определяемый соотношением

$$\Theta = ma^2. \quad (16.4)$$

Таким образом, радиус инерции означает то расстояние от точки подвеса маятника O , на котором нужно сконцентрировать всю его массу m , чтобы получить тот же момент инерции Θ , как и при истинном распределении масс. При этом следует обратить внимание на следующее противопоставление. При введении с помощью формулы (11. 8) понятия «приведенной массы» задается радиус r , на котором должна быть помещена искомая масса $m_{\text{прив.}}$; напротив, при нашем теперешнем определении «радиуса инерции» [уравнение (16.4)] задается масса m и требуется найти расстояние a , на котором нужно поместить эту массу.

Из сравнения равенств (16.3) и (16.4) видно, что длина a является средним геометрическим длин s и l :

$$a^2 = l \cdot s. \quad (16.5)$$

Отложим из точки O по оси маятника OS приведенную длину маятника l . Полученная таким образом точка P называется (по Гюйгенсу) *центром качаний*. На рис. 25 показано относительное расположение точек O , S и P , а также отрезков s , a и l .

Мы утверждаем далее, что точки O и P «взаимозаменяемы» (или, как часто говорят, O и P — «*взаимно сопряженные точки*»). До сих пор точка O была точкой подвеса, а P — центром качаний. Теперь сделаем P точкой подвеса и покажем, что тогда точка O станет центром качаний. В этом заключается идея *оборотного маятника*.

В приводимой таблице сопоставлены применявшиеся нами до сих пор обозначения:

Точка подвеса	Центр качаний	Приведенная длина маятника	Момент инерции	Радиус инерции	Расстояние центра тяжести от точки подвеса
O	P	l	Θ	a	s
P	O'	l_P	Θ_P	a_P	$l - s$

Наше утверждение состоит в следующем:

$$l_P = l, \text{ т. е. точки } O' \text{ и } O \text{ совпадают.}$$

Для доказательства выразим l_P с помощью надлежащим образом переписанных уравнений (16.3) и (16.4):

$$l_P = \frac{\Theta_P}{m(l-s)} = \frac{a_P^2}{l-s}. \quad (16.6)$$

Но, согласно уравнению (16.10), приведенному в добавлении,

$$a_P^2 = l(l-s). \quad (16.6a)$$

Следовательно, правая часть равенства (16.6) действительно равна l .

Маятник является прибором для определения ускорения силы тяжести g в различных точках земной поверхности или в недрах Земли. Так как практически мы не располагаем математическим маятником и так как для физического маятника невозможно точно вычислить момент инерции Θ (не только ввиду сложной формы маятника, но также ввиду возможной неоднородности его плотности), мы принуждены удовлетвориться экспериментальным определением его приведенной длины по методу оборотного маятника. Представьте себе на рис. 25 опорную призму (выступающую вперед из плоскости рисунка) не только у точки O , но также и у точки P (ребром кверху); опора у точки P может перемещаться с помощью микрометрического винта. Так как число колебаний за продолжительное время можно сосчитать *чрезвычайно точно*, то равенство и неравенство периодов колебаний маятника при точках опоры O или P можно установить *точнейшим образом* и, в случае необходимости, внести соответствующую поправку при помощи микрометрического винта.

Теорема об оборотном маятнике является первым примером весьма общих соотношений взаимности, справедливых во всех областях физики; вполне аналогична, например, взаимозаменяемость («сопряженность») точек «источка» и «наблюдения» в акустике и электродинамике.

ДОБАВЛЕНИЕ: ТЕОРЕМА О МОМЕНТЕ ИНЕРЦИИ

Речь идет о теореме *Штейнера*; момент инерции тела относительно оси, проходящей через произвольную точку O , равен моменту инерции этого тела относительно параллельной оси, проходящей через его центр тяжести S , увеличенному на ms^2 , где s означает расстояние OS .

Если y — рассматриваемое направление оси, а x — направление от точки O к S , то для некоторого элемента массы dm имеем:

$$r^2 = x^2 + z^2.$$

При этом x отсчитывается от точки O . Если же x отсчитывать от точки S и положить $OS = s$, как на рис. 25, то

$$r^2 = (x + s)^2 + z^2 = x^2 + z^2 + 2xs + s^2.$$

Отсюда, после суммирования по всем dm , следует:

$$\Theta = \Theta_S + 2s \int x \, dm + ms^2. \quad (16.7)$$

Средний член обращается в нуль [ср., например, уравнение (13.36)], если плоскость $x = 0$ проходит через центр тяжести. Таким образом,

$$\Theta = \Theta_S + ms^2. \quad (16.8)$$

что и требовалось доказать.

Аналогично, принимая во внимание рис. 25, имеем:

$$\Theta_P = \Theta_S + m(l - s)^2. \quad (16.8a)$$

Из соотношений (16.8) и (16.8a) следует:

$$\Theta_P - \Theta = ml^2 - 2mls.$$

Вместо этого на основании (16.4) можно написать:

$$a_P^2 - a^2 = l^2 - 2ls, \quad (16.9)$$

и, подставляя a^2 из условия (16.5), окончательно получим

$$a_P^2 = l^2 - l_S = l(l - s). \quad (16.10)$$

Это уравнение мы уже использовали выше [уравнение (16.6a)].

§ 17. ЦИКЛОИДАЛЬНЫЙ МАЯТНИК

Циклоидальный маятник был изобретен Христианом Гюйгенсом¹, крупным ученым XVII столетия и гениальнейшим часовым мастером всех времен. Этот маятник свободен от недостатка, присущего обычному математическому маятнику неполного изохронизма, благодаря тому, что в этом случае материальная точка движется не по дуге окружности, а по дуге циклоиды. Позже мы увидим, как это можно осуществить практически.

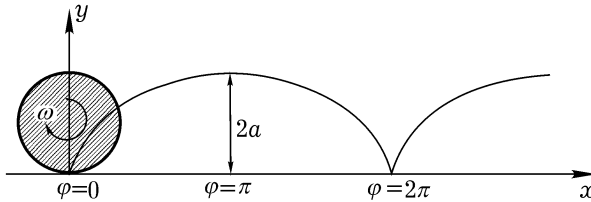


Рис. 26. Качение колеса образует обыкновенную циклоиду. Определение угла качения φ

Параметрическое представление обычной циклоиды имеет вид:

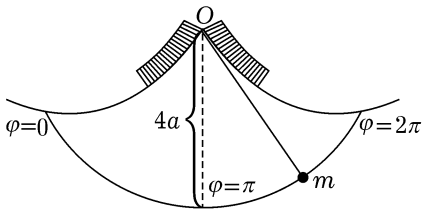


Рис. 27. Циклоидальный маятник Гюйгенса для осуществления изохронизма

$$\left. \begin{aligned} x &= a(\varphi - \sin \varphi), \\ y &= a(1 - \cos \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (17.1)$$

Параметр φ означает угол, на который повернулось от своего исходного положения колесо радиуса a , катящееся по горизонтальной оси x . В случае обычной циклоиды точка, описывающая циклоиду, находится на окружности колеса.

Но для нашего маятника нам нужна циклоида, острия (точки возврата) которой обращены не вниз, а вверх (рис. 27) и которая образуется при качении колеса по нижней стороне оси x . Ее абсцисса x выражается по-прежнему уравне-

¹Horologium Oscillatorium, Paris, 1673 г. — Ges. Werke, Bd. 18, Haag, 1934.

нием (17.1), тогда как ордината y получается вычитанием выражения (17.1) из $2a$:

$$\left. \begin{aligned} x &= a(\varphi - \sin \varphi), \\ y &= a(1 + \cos \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (17.2)$$

Слагающая силы тяжести mg в направлении касательной к кривой (в данном случае к циклоиде) равна

$$F_s = -mg \cos(y, s) = -mg \frac{dy}{ds}.$$

Следовательно, из общего уравнения (11.14) получаем

$$mv = -mg \frac{dy}{ds}, \quad (17.3)$$

причем, как и в случае «кругового» маятника, масса m сокращается. Дифференцируя уравнения (17.2), получаем далее:

$$\begin{aligned} dx &= a(1 - \cos \varphi)d\varphi, & dy &= -a \sin \varphi d\varphi. \\ ds^2 &= a^2(2 - 2 \cos \varphi)d\varphi^2, & ds &= 2a \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi. \end{aligned}$$

Поэтому в нашем случае имеем

$$v = \frac{ds}{dt} = 2a \sin \frac{\varphi}{2} \frac{d\varphi}{dt} = -4a \frac{d}{dt} \cos \frac{\varphi}{2} \quad (17.4)$$

и

$$\frac{dy}{ds} = -\frac{1}{2} \frac{\sin \varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} = -\cos \frac{\varphi}{2}. \quad (17.5)$$

Подставив выражения (17.4) и (17.5) в уравнение движения (17.3), найдем:

$$\frac{d^2}{dt^2} \cos \frac{\varphi}{2} = -\frac{g}{4a} \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (17.6)$$

Это уравнение отличается от уравнения (15.3) математического маятника только тем, что теперь функцией является не φ , а $\cos \frac{\varphi}{2}$. Для

интегрирования это, разумеется, безразлично. Поэтому остается полностью справедливым прежнее уравнение (15.4), а именно:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \text{где } l = 4a, \quad (17.7)$$

так как в нашем теперешнем уравнении (17.6) вместо прежнего l стоит $4a$.

Но в то время как прежнее уравнение (15.3) описывало только малые колебания математического маятника и получалось лишь приближенно из точного уравнения (15.1), наше теперешнее уравнение (17.6) и, следовательно, полученная из него путем интегрирования формула (17.7) *точно справедливы для любых амплитуд*. Таким образом, *циклоидальный маятник строго изохронен, т. е. его период колебания вообще не зависит от величины амплитуды*¹.

С методической точки зрения отметим, что в уравнении (17.6) мы представили движение материальной точки отнюдь не с помощью ее прямоугольных координат или какой-либо иной величины, непосредственно измеряемой на циклоиде, а с помощью половины угла поворота φ , фигурирующего при построении циклоиды. Этот параметр, лишь косвенно связанный с циклоидой, дает возможность, как мы убедились, рассмотреть задачу наиболее простым образом. Введение этого параметра уже здесь могло бы подвести нас к общему методу Лагранжа, который будет изложен в гл. VI и даст нам возможность вводить в уравнения движения любые параметры в качестве независимых переменных.

Столь же изумительным, как и открытие Гюйгенсом изохронизма циклоидального маятника, является и его способ реализации движения без трения по циклоиде. Этот способ основан на теореме: «Эволюта циклоиды является также циклоидой, тождественной с исходной». Таким образом, если в точке O (рис. 27), в которой соприкасаются две изображенные там верхние дуги циклоиды, закрепить нить длиной $l = 4a$ и натянуть ее так, чтобы она частично легла на правую (или при отклонении влево — на левую) ветвь циклоиды, то конечная точка P нити

¹Циклоида называется поэтому *таутохроной* (колебания по ней совершаются «сами собой изохронно»); она называется также *брахистохроной* (при одинаковых начальном и конечном положениях тело при скольжении по циклоиде затрачивает кратчайшее время по сравнению с временем, которое оно затратило бы при скольжении по наклонной плоскости или какой-либо другой кривой). Задача о брахистохроне особенно замечательна тем, что с нее началось развитие вариационного исчисления.

опишет нижнюю дугу циклоиды. Полученное таким образом движение материальной точки по нижней дуге циклоиды будет (приближенно) происходить без трения так же, как и движение по дуге окружности в случае обычного математического маятника.

Впрочем, на практике в конструкциях маятниковых часов идея Гюйгенса не используется; если прикрепить к верхнему концу маятника *пружину* (обычно короткую упругую пластинку), то, согласно исследованиям Бесселя и других, при соответствующем выборе длины этой пружины и массы маятника будет обеспечен достаточный изохронизм.

§ 18. СФЕРИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

Подвесим маятник таким образом, чтобы материальная точка m могла свободно двигаться по поверхности шара радиуса l (l называется длиной маятника). В этом случае на маятник будет наложена связь, выражаемая уравнением:

$$F = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - l^2) = 0 \quad (18.1)$$

(множитель $\frac{1}{2}$ — введен ради удобства).

В соответствии с этим, уравнения Лагранжа первого рода (12.9) (r , т. е. число условий связи, здесь равно 1; кроме того, $X_1 = X_2 = 0$; $X_3 = -mg$) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda x, \\ m\ddot{y} &= \lambda y, \\ m\ddot{z} &= -mg + \lambda z. \end{aligned} \right\} \quad (18.2)$$

Исключение λ из первых двух уравнений (18.2) дает, в согласии с уравнениями (13.13) и (13.13а), постоянство момента импульса относительно оси z или, что то же самое, неизменность секториальной скорости

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = 2 \frac{dS}{dt} = C. \quad (18.3)$$

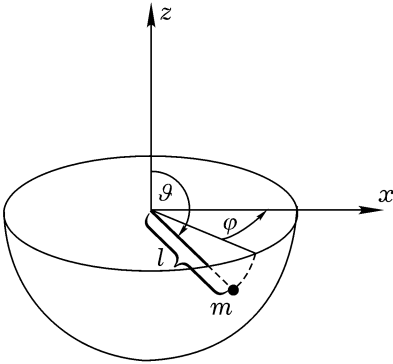


Рис. 28. Сферический маятник как материальная точка m , движущаяся под влиянием силы тяжести по шаровой поверхности радиуса l

С другой стороны, если мы умножим уравнения Лагранжа (18.2) соответственно на \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} , то мы должны получить закон сохранения энергии, так как условие связи (18.1) не зависит от t (см. стр. 92). Сперва получаем:

$$\begin{aligned} m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) &= \\ &= -mg\dot{z} + \lambda(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}). \end{aligned} \quad (18.4)$$

Но, согласно условию (18.1), имеет место

$$\frac{dF}{dt} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0.$$

С другой стороны,

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt}.$$

Следовательно, путем интегрирования по t уравнения (18.4) получим:

$$\frac{m}{2} v^2 = -mgz + \text{const}, \quad (18.5)$$

что мы запишем в виде:

$$T + V = W, \quad \text{где } V = mgz. \quad (18.5a)$$

Общие соображения по поводу понятия потенциальной энергии V мы приведем в добавлении к этому параграфу.

Если мы, наконец, умножим уравнения Лагранжа соответственно на x , y , z , то, используя условие (18.1), мы сможем вычислить λ :

$$\lambda l^2 - mgz = m(x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z})$$

или

$$\lambda l = mg \frac{z}{l} + m \left(\frac{x}{l} \ddot{x} + \frac{y}{l} \ddot{y} + \frac{z}{l} \ddot{z} \right). \quad (18.6)$$

Но так как нормаль к шаровой поверхности в точке с координатами x , y , z имеет направляющие косинусы $\frac{x}{l}$, $\frac{y}{l}$, $\frac{z}{l}$, то второй член справа

с точностью до знака равен силе инерции F_n^* , нормальной к шаровой поверхности; первый же член справа, также с точностью до знака, равен слагающей силы тяжести F_n в том же направлении. По принципу Даламбера, сумма обеих этих сил должна уравниваться реакцией R_n на шаровой поверхности (с точки зрения физической, натяжением нити маятника). Таким образом, смысл уравнения (18.6) можно кратко выразить формулой

$$\lambda l = -(F_n + F_n^*) = R_n. \quad (18.7)$$

Отсюда видно, что, с точностью до множителя l , λ означает силу реакции, развиваемую связью (18.1) и действующую нормально к направлению движения. Аналогично обстоит дело и в более общих случаях, когда имеется несколько условий связи и соответственное число лагранжевых множителей λ .

Чтобы продолжить интегрирование, введем сферические координаты:

$$\begin{aligned} x &= l \cos \varphi \sin \vartheta, \\ y &= l \sin \varphi \sin \vartheta, \\ z &= l \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Дифференцируя, получим:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= l \cos \varphi \cos \vartheta \cdot \dot{\vartheta} - l \sin \varphi \sin \vartheta \cdot \dot{\varphi}, \\ \dot{y} &= l \sin \varphi \cos \vartheta \cdot \dot{\vartheta} + l \cos \varphi \sin \vartheta \cdot \dot{\varphi}, \\ \dot{z} &= -l \sin \vartheta \cdot \dot{\vartheta}. \end{aligned}$$

Тогда закон площадей (18.3) примет следующий вид:

$$2 \frac{dS}{dt} = x\dot{y} - y\dot{x} = l^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} = C. \quad (18.8)$$

Закон сохранения энергии (18.5a) переписется в виде:

$$\frac{ml^2}{2} (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}^2) + mgl \cos \vartheta = W. \quad (18.9)$$

Вводя обозначения

$$u = \cos \vartheta, \quad \dot{\vartheta} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dt},$$

получаем из уравнения (18.8):

$$\dot{\varphi} = \frac{C}{l^2(1-u^2)} \quad (18.10)$$

и из уравнения (18.9):

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = U(u) = \frac{2}{mj^2}(W - mglu)(1-u^2) - \frac{C^2}{l^4}. \quad (18.11)$$

Из этого соотношения между t и u можно определить t как функцию от u :

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{U}}. \quad (18.12)$$

Теперь можно проинтегрировать также и уравнение (18.10). Действительно, так как, согласно уравнениям (18.10) и (18.11), имеет место

$$\frac{d\varphi}{du} = \dot{\varphi} \frac{dt}{du} = \frac{C}{l^2(1-u^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{U}},$$

то получаем

$$\varphi = \frac{C}{l^2} \int \frac{du}{1-u^2} \frac{1}{\sqrt{U}}. \quad (18.13)$$

U есть функция третьей степени от $u = \cos \vartheta$. Величина \sqrt{U} действительна только в том случае, если $U > 0$. Если решение уравнения должно соответствовать действительной физической задаче, то в интервале $-1 < u < +1$ должны существовать такие два значения $u = u_2$ и $u = u_1 > u_2$, между которыми U положительно (рис. 29).

Значения $u_1 = \cos \vartheta_1$ и $u_2 = \cos \vartheta_2$ суть две параллели, между которыми качается материальная точка. Когда интегрирование в формулах (18.12) или (18.13) достигнет одного из этих пределов, направление его должно быть изменено на противоположное, чтобы результат оставался действительным. Последовательные моменты, в которые происходит изменение направления движения, отделены друг от друга промежуток времени:

$$\frac{\tau}{2} = \int_{u_2}^{u_1} \frac{du}{\sqrt{U}}. \quad (18.14)$$

Однако теперь колебание не является периодическим в пространстве, как в случае плоского маятника, а сопровождается медленной прецессией. «Угол прецессии» $\Delta\varphi$ за время полного периода колебания τ выражается, на основании формулы (18.13), следующим образом:

$$2k\pi + \Delta\varphi = \frac{2C}{l^2} \int_{u_2}^{u_1} \frac{du}{(1-u^2)\sqrt{U}} \quad (18.15)$$

(см. рис. 30, на которой изображен угол прецессии $\Delta\varphi$ для $k = 1$).

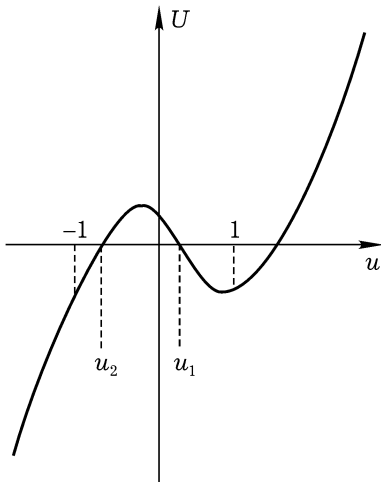


Рис. 29. Кривая третьего порядка $U(u)$ и ее точки пересечения с осью абсцисс $u = u_1$ и $u = u_2$

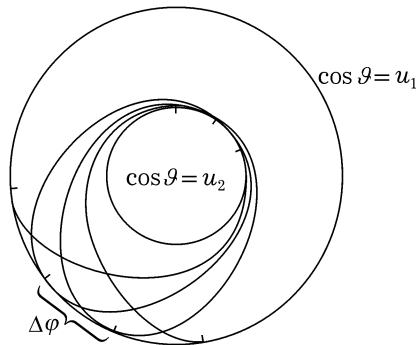


Рис. 30. Вид траектории сферического маятника сверху. Угол прецессии Δ

Интеграл (18.13) так же, как и интеграл (15.8) в случае математического маятника, является «эллиптическим интегралом первого рода». Вообще, так называются все интегралы, содержащие в знаменателе подынтегрального выражения квадратный корень из многочлена третьей или четвертой степени относительно переменной интегрирования.

Это имеет место и для интеграла (15.8), если в качестве переменной интегрирования взять $u = \sin \frac{\varphi}{2}$, благодаря чему этот интеграл принимает вид:

$$\int \frac{du}{\sqrt{(a^2 - u^2)(1 - u^2)}}, \quad \text{где } a = \sin \frac{\alpha}{2}.$$

В частности, выражение (18.14) для τ так же, как и выражение (15.12), является «полным интегралом первого рода». Напротив, интеграл (18.13), содержащий в знаменателе, кроме \sqrt{U} , еще оба множителя $(1 \pm u)$, называют «эллиптическим интегралом третьего рода»; выражение (18.15) есть «полный интеграл третьего рода».

Задача III. 1 показывает, что при бесконечно малом качании сферического маятника эти интегралы могут быть сведены к элементарным функциям, а угол прецессии $\Delta\varphi \rightarrow 0$.

**ДОБАВЛЕНИЕ: КОГДА МОЖНО ГОВОРИТЬ
О ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ В ПОЛЕ СИЛ?**

В то время как для одномерного движения всегда можно, исходя из силы X , ввести потенциальную энергию V , определяемую соотношением (3.7), для двух- или трехмерного движения, как мы уже указывали, это возможно только при определенных условиях. Если через X, Y, Z обозначить прямоугольные слагающие силы \mathbf{F} , то определение потенциальной энергии, аналогичное определению (3.7), должно иметь следующий вид:

$$V = - \int^{xyz} (X dx + Y dy + Z dz). \quad (18.16)$$

Если эта формула должна выражать величину, не зависящую от пути, а зависящую лишь от конечной точки интегрирования (выбор начальной точки интегрирования скажется только на величине аддитивной постоянной, которая и без того произвольна), то сумма

$$X dx + Y dy + Z dz$$

должна быть *полным дифференциалом*, т. е. X, Y, Z должны быть частными производными (соответственно, по x, y, z) некоторой функции

координат (в данном случае производными функции — V). Как известно, условием этого является выполнение равенств

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}. \quad (18.17)$$

Только при выполнении этих условий можно сопоставить точкам пространства (x, y, z) некоторую функцию координат $V(x, y, z)$ и назвать ее «потенциальной энергией» или «потенциалом».

В двухмерном случае, когда $Z = 0$, а X, Y не зависят от z , три уравнения (18.17) сводятся, очевидно, к первому из них.

В «векторном анализе», который широко применяется в последующих разделах теоретической физики¹, доказывается, что условия (18.17) носят инвариантный характер, т.е. выполнение их не зависит от выбора системы координат. Все три условия в векторном анализе объединены в одном векторном уравнении $\text{rot } \mathbf{F} = 0$.

Не представляет труда привести пример слагающих X, Y, Z как функций x, y, z , чтобы условия (18.17) не выполнялись. С другой стороны, мы видим, что в поле тяжести, т.е. при

$$X = Y = 0, \quad Z = -mg$$

эти условия выполняются и приводят к следующему выражению для потенциальной энергии:

$$V = mgz. \quad (18.18)$$

Это же относится и к полям тяготения (подчиняющимся, как известно, закону Ньютона) в общем случае, а равно и к кулоновым полям электростатики и магнитостатики, которые по своему характеру вполне аналогичны гравитационным полям. Вообще безвихревые поля (называемые также потенциальными полями) занимают исключительное место в природе. В общей теории, излагаемой в гл. VI и VIII, они будут играть особую роль.

Механическая система, в которой действуют только потенциальные силы, называется консервативной системой, потому что для нее справедлив закон сохранения (conservatio) энергии. В противоположность этому говорят о неконсервативных или диссипативных системах.

¹В данной книге мы можем ограничиться «векторной алгеброй».

§ 19. РАЗЛИЧНЫЕ ТИПЫ КОЛЕБАНИЙ. СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ, ЗАТУХАЮЩИЕ И НЕЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

Свободные незатухающие колебания были нами рассмотрены в § 3 (раздел 4); мы называли их там «гармоническими колебаниями». Теперь мы прежде всего рассмотрим *вынужденные незатухающие колебания*.

Дифференциальное уравнение этих колебаний имеет вид:

$$m\ddot{x} + kx = c \sin \omega t. \quad (19.1)$$

Здесь $\omega = \frac{2\pi}{T}$ есть круговая частота вынуждающей силы.

Таким образом, мы считаем дифференциальное уравнение движения *линейным* относительно переменной x , что вполне допустимо (ср. математический маятник) для случая «малых» колебаний. Это замечание относится и к дальнейшим примерам, приводимым в этом и следующих параграфах.

«Упругая» сила равна $-kx$, как и в уравнении (3.19); величина c в уравнении (19.1) означает амплитуду вынуждающей силы, которая вызывает рассматриваемые колебания.

Ввиду наличия отличной от нуля правой части, уравнение (19.1) является *неоднородным линейным дифференциальным уравнением*. Приравнивая левую часть этого уравнения нулю, получаем, как уже отмечалось при решении уравнения (3.23), соответствующее *однородное дифференциальное уравнение*.

Частным интегралом неоднородного дифференциального уравнения будет

$$x = C \sin \omega t,$$

если значение C удовлетворяет условию

$$C(k - m\omega^2) = c.$$

Полагая, аналогично формуле (3.20),

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (19.2)$$

получим:

$$C = \frac{c}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (19.3)$$

Общий интеграл уравнения (19.1) равен сумме этого частного интеграла и общего интеграла соответствующего однородного уравнения:

$$x = C \sin \omega t + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t. \quad (19.4)$$

Амплитуда C в первом члене уравнения (19.4) возрастает с увеличением ω и при $\omega = \omega_0$ обращается в бесконечность; в той же точке $\omega = \omega_0$ она испытывает скачок в отрицательную бесконечность и затем при $\omega \rightarrow \infty$ медленно приближается к нулю, оставаясь отрицательной.

Однако эту перемену знака нецелесообразно относить на счет амплитуды, которая по своему смыслу является существенно положительной величиной. Поэтому в дальнейшем мы будем под амплитудой понимать $|C|$, а перемену знака относить к синусу, где она скажется как «сдвиг фаз» $\delta = \pm\pi$.

В соответствии с этим, на рис. 31а и 31б представлены величины $|C|$ и δ как функции ω .

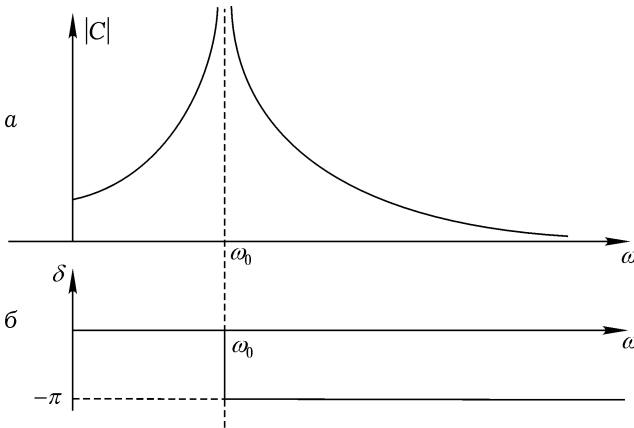


Рис. 31. Амплитуда и фаза вынужденного незатухающего колебания

Рассматривая рис. 31б, нельзя установить, имеем ли мы при $\omega > \omega_0$ опережение или запаздывание по фазе, т. е. нужно ли выбрать

$\delta = +\pi$ или $\delta = -\pi$. Но считая незатухающие колебания предельным случаем затухающих колебаний (см. ниже), мы выбираем величину $-\pi$ и пишем первый член уравнения (19.4) в следующей уточненной форме:

$$(\omega > \omega_0) \quad x = \frac{c}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin(\omega t - \pi). \quad (19.4a)$$

Обращение амплитуды в бесконечность при $\omega = \omega_0$ характеризует явление *резонанса* между свободным и вынужденным колебаниями, которое играет важную роль во всех разделах физики. Знаменатель в выражениях (19.3) и (19.4a), обращение которого в нуль приводит к бесконечно большой амплитуде, называется «*резонансным знаменателем*». Образно выражаясь, колеблющаяся система тем «охотнее» поддается воздействию внешней силы, чем ближе ее собственная частота к частоте изменения внешней силы.

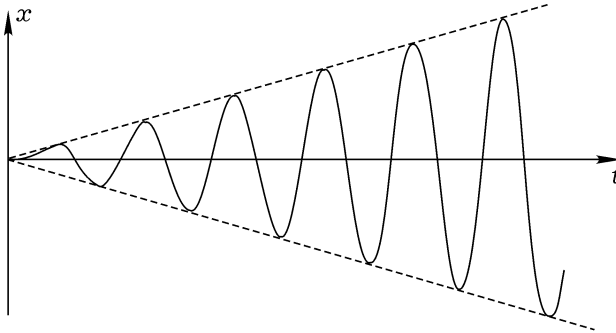


Рис. 32. Резонанс свободного и вынужденного колебаний. Вековое нарастание амплитуды

Впрочем, надо отметить, что наше заключение о появлении бесконечно больших амплитуд при резонансе является *крайней* экстраполяцией, поскольку уравнение колебания можно считать линейным, строго говоря, почти исключительно для бесконечно малых колебаний.

До сих пор мы рассматривали только первый член правой части уравнения (19.4). Оба последующих члена определяются, если мы зададим начальные условия. В качестве таковых выберем, например,

$$t = 0: \quad x = 0, \quad \dot{x} = 0.$$

Подставив эти начальные условия в уравнение (19.4), получим:

$$A = 0, \quad \omega C + \omega_0 B = 0, \quad \text{откуда} \quad B = -\frac{\omega}{\omega_0} C.$$

Следовательно,

$$x = C \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right). \quad (19.5)$$

Выясним смысл этого уравнения для особенно интересного случая, когда вынуждающее и вынужденное колебания совершаются почти в резонансе и, следовательно, обе частоты ω и ω_0 почти равны между собою. Положим

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega.$$

Разлагая в ряд и отбрасывая члены, квадратичные относительно $\Delta\omega$, и члены высших степеней, получаем:

$$\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t = \sin \omega_0 t + t \Delta\omega \cos \omega_0 t - \sin \omega_0 t - \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Тогда выражение (19.5) запишется в виде:

$$x = C \Delta\omega \left(t \cos \omega_0 t - \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right).$$

Наконец, подставляя вместо C его значение из формулы (19.3), получим в пределе при $\Delta\omega = 0$:

$$x = \frac{c}{2m\omega_0^2} \left(\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t \right). \quad (19.6)$$

Описываемое этим уравнением колебание уже не является периодическим, каким было рассмотренное выше свободное колебание. Признаком этого является то, что время t входит в формулу (19.5) в качестве векового члена (т.е. не только под знаком тригонометрической функции). При $t \rightarrow \infty$ амплитуда колебания приближается к представленной на рис. 31 величине $|C| = \infty$ при $\omega = \omega_0$.

Свободные затухающие колебания описываются дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x} + kx = -w\dot{x}. \quad (19.7)$$

Наличие в этом уравнении члена, пропорционального первой степени скорости и соответствующего сопротивлению среды (трению), обосновывается в гидродинамике медленных (ламинарных) течений (возникающих, например, при трении о воздух).

Уравнение (19.7) является однородным линейным дифференциальным уравнением. Как и прежде, введем обозначение:

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad (19.7a)$$

где ω_0 — собственная частота незатухающих колебаний. Кроме того, положим

$$\frac{w}{m} = 2\rho, \quad \rho > 0. \quad (19.76)$$

В этих обозначениях уравнение (19.7) запишется:

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (19.8)$$

Здесь полностью применим метод, введенный при решении уравнения (3.23). Ищем решение в виде

$$x = Ce^{\lambda t} \quad (19.8a)$$

и, подставляя вместо x в уравнение (19.8) выражение (19.8a), получим следующее характеристическое уравнение для λ :

$$\lambda^2 + 2\rho\lambda + \omega_0^2 = 0,$$

которое имеет два корня

$$\lambda = -\rho \pm \sqrt{-\omega_0^2 + \rho^2} = \begin{cases} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{cases}.$$

Таким образом, мы можем обобщить решение (19.8a) в виде линейной комбинации

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (19.86)$$

Мы различаем два случая:

$$1) \rho < \omega_0 \quad \text{и} \quad 2) \rho > \omega_0.$$

Первый случай обычно встречается в приложениях— это случай периодически затухающих колебаний. Второй случай характеризуется наличием «апериодического затухания». В обоих случаях мы выбираем

одинаковые начальные условия: $x = 0$ при $t = 0$, что при подстановке в выражение (19.86) приводит к равенству $C_2 = -C_1$.

$$1) \rho < \omega_0; \quad \lambda = -\rho \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2},$$

$$x = 2C_1 e^{-\rho t} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2} t.$$

Период колебания

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}}$$

при малом ρ лишь незначительно отличается от периода незатухающего колебания. Множитель $e^{-\rho t}$ характеризует затухание; величину $\rho\tau$ называют логарифмическим декрементом затухания.

2) $\rho > \omega_0$, т. е. λ_1 и λ_2 действительны; решение принимает вид:

$$x = 2C_1 e^{-\rho t} \operatorname{sh} \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2} t.$$

Символ sh означает гиперболический синус.

В заключение мы рассмотрим *затухающие вынужденные колебания*, предельными случаями которых, по существу, являются все рассмотренные выше типы колебаний.

Дифференциальное уравнение этих колебаний таково:

$$m\ddot{x} + w\dot{x} + kx = c \sin \omega t.$$

Принимая во внимание обозначения (19.7а, б), перепишем его в виде:

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{c}{2mi} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}). \quad (19.9)$$

Теперь к общему интегралу (19.86) однородного уравнения прибавляется частный интеграл неоднородного уравнения, который мы запишем в форме:

$$x = |C| \sin(\omega t + \delta) = \frac{|C|}{2i} (e^{i(\omega t + \delta)} - e^{-i(\omega t + \delta)}).$$

Подставляя это выражение в уравнение (19.9) и приравнивая коэффициенты при $e^{\pm i\omega t}$ в правой и левой частях уравнения, получим:

$$|C|(-\omega^2 + 2i\rho\omega + \omega_0^2)e^{i\delta} = \frac{c}{m},$$

$$|C|(-\omega^2 - 2i\rho\omega + \omega_0^2)e^{-i\delta} = \frac{c}{m}.$$

Путем почленного перемножения и, соответственно, деления этих двух соотношений найдем:

$$|C|^2 = \left(\frac{c}{m}\right)^2 \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\rho^2\omega^2},$$

$$e^{2i\delta} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\rho\omega}{\omega_0^2 - \omega + 2i\rho\omega}.$$

Отсюда

$$|C| = \frac{c}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\rho^2\omega^2}}, \quad (19.10)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{i} \frac{e^{2i\delta} - 1}{e^{2i\delta} + 1} = -\frac{2\rho\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (19.11)$$

(см. рис. 33 и ср. его с рис. 31а, б).

Из рис. 33 видно, что благодаря затуханию наш прежний бесконечный резонансный максимум амплитуды уменьшился до конечной величины (причем этот максимум амплитуды достигается не точно при $\omega = \omega_0$, а при несколько меньшей частоте ω ; см. также задачу III. 2).

Рис. 33 в то же время показывает, что при возрастании ω сдвиг фаз δ изменяется от значения $\delta = 0$ при $\omega = 0$ в сторону отрицательных значений, при $\omega = \omega_0$ становится в точности равным $-\frac{\pi}{2}$ и далее при $\omega \rightarrow \infty$ приближается к значению $-\pi$. Тем самым казавшийся прежде произвольным выбор между $+\pi$ и $-\pi$ оказывается вполне оправданным и для случая вынужденных колебаний без трения (см. рис. 31). Таким образом, действительно всегда имеет место *запаздывание* фазы колебания по сравнению с фазой вынуждающей силы. Дальнейшие примеры вынужденных колебаний приведены в задачах III. 3 и III. 4.

§ 20. СИМПАТИЧЕСКИЕ МАЯТНИКИ

Рассмотренные до сих пор типы колебаний относились к *одной* материальной точке. Теперь мы рассмотрим типы колебаний *двух* взаимно связанных материальных точек. Подобные колебания уже давно играют важную роль в электроизмерительных устройствах. В состав последних входят так называемые первичные и вторичные цепи, связанные между собой большей частью «индуктивно». Когда первичная

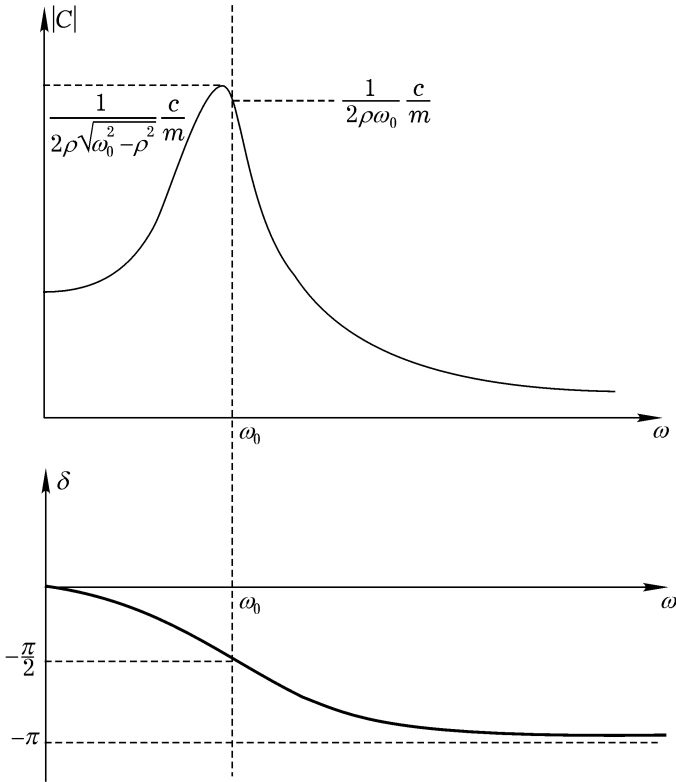


Рис. 33. Амплитуда и фаза вынужденного затухающего колебания

цепь возбуждается, вторичная цепь также приходит в колебание, особенно сильное при наличии *резонанса*. Действительно, схема включения Брауна в радиотелеграфии состоит из первичной и настроенной на нее вторичной цепи. Здесь мы рассмотрим, разумеется, только *механические* связанные колебания, которые часто используются в качестве модели электрических связанных колебаний.

Особенно поучительным примером могут служить симпатические маятники. В случае резонанса так называются два маятника одинаковой длины и одинакового веса. Проще всего представить себе их качающимися в одной и той же плоскости; пусть, далее, связь между ними осуществляется спиральной пружиной, как показано на рис. 35.

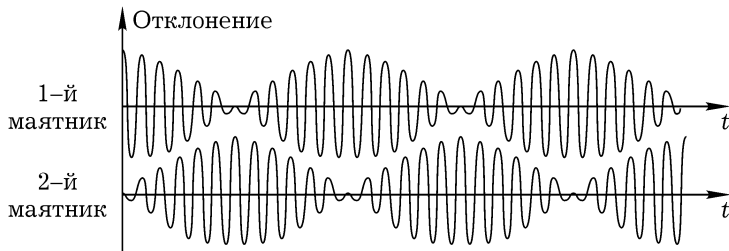


Рис. 34. Симпатические маятники в случае резонанса

Если при взаимном движении обоих маятников в пружине возникают лишь малые напряжения, то говорят о *слабой* связи, при больших же напряжениях в пружине говорят о *сильной* связи. Мы рассмотрим слабую связь симпатических маятников. Если маятники имеют не вполне одинаковую длину или не вполне одинаковый вес, то говорят, что они *расстроены*.

Сначала опишем явления, наблюдаемые в случае резонанса.

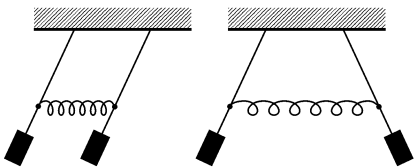


Рис. 35. Два нормальных колебания симпатических маятников в случае резонанса

Если же одинаково возбудить оба маятника в одном и том же направлении (рис. 35 слева) или в противоположных направлениях (рис. 35 справа), то перекачки энергии не будет. Эти два колебания называются *нормальными колебаниями* нашей связанной системы с двумя степенями свободы. В общем случае справедлива теорема:

Если же одинаково возбудить оба маятника в одном и том же направлении (рис. 35 слева) или в противоположных направлениях (рис. 35 справа), то перекачки энергии не будет. Эти два колебания называются *нормальными колебаниями* нашей связанной системы с двумя степенями свободы. В общем случае справедлива теорема:

Колебательная система с n степенями свободы имеет n нормальных колебаний.

Допустим, что первый маятник возбужден, а второй маятник первоначально находится в состоянии покоя. Получается следующая картина колебаний (см. рис. 34).

Каждый из двух маятников совершает *биения*. В процессе этих биений маятники взаимно обмениваются энергией (происходит как бы «перекачка» энергии от одного маятника к другому). Когда один маятник испытывает максимальное отклонение, другой находится в состоянии покоя.

Если же маятники *расстроены*, то, хотя обмен энергией и будет иметь место, он будет совершаться таким образом, что первоначально возбужденный маятник будет иметь минимум, отличный от нуля, и только маятник, первоначально находившийся в состоянии покоя, в процессе движения снова возвратится в состояние покоя. Таким образом, одинаковый характер колебаний маятников нарушается их расстройкой. Сначала мы кратко изложим теорию *полного резонанса* при возможно более простых допущениях (пренебрегая затуханием, а также различием между дугой окружности и касательной к ней в нижней точке траектории, что допустимо при достаточно малых колебаниях). Обозначим через x_1 отклонение маятника *I*, через x_2 — отклонение маятника *II*. Если, далее, обозначить через k «коэффициент связи», т. е. напряжение в пружине при единичном удлинении ее, деленное на массу, то система дифференциальных уравнений нашей задачи примет следующий вид:

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -k(x_1 - x_2), \quad \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -k(x_2 - x_1). \quad (20.1)$$

Вводя новые переменные

$$z_1 = x_1 - x_2, \quad z_2 = x_1 + x_2, \quad (20.2)$$

получим из уравнений (20.1) путем вычитания и сложения их уравнения обоих нормальных колебаний:

$$\ddot{z}_1 + \omega_0^2 z_1 = -2kz_1 \quad \text{или} \quad \ddot{z} + (\omega_0^2 + 2k)z_1 = 0, \quad \ddot{z}_2 + \omega_0^2 z_2 = 0 \quad (20.3)$$

с частотами

$$\text{для } z_1: \omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2k} \sim \omega_0 + \frac{k}{\omega_0}, \quad (20.4)$$

$$\text{для } z_2: \omega' = \omega_0.$$

Уравнения (20.3) имеют следующие общие решения:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t; \\ z_2 &= a_2 \cos \omega' t + b_2 \sin \omega' t. \end{aligned} \right\} \quad (20.5)$$

Введем начальные условия возбуждения:

$$\text{при } t = 0: \quad x_2 = \dot{x}_2 = 0; \quad \dot{x}_1 = 0; \quad x_1 = C, \quad (20.6)$$

откуда

$$\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = 0; \quad z_1 = z_2 = C. \quad (20.7)$$

Отсюда следует:

$$b_1 = b_2 = 0, \quad a_1 = a_2 = C, \quad (20.8)$$

так что

$$z_1 = C \cos \omega t, \quad z_2 = C \cos \omega' t$$

и

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{z_2 + z_1}{2} = C \cos \frac{\omega' - \omega}{2} t \cos \frac{\omega' + \omega}{2} t; \\ x_2 &= \frac{z_2 - z_1}{2} = -C \sin \frac{\omega' - \omega}{2} t \sin \frac{\omega' + \omega}{2} t. \end{aligned} \right\} \quad (20.9)$$

Согласно соотношениям (20.4), для случая слабой связи

$$\frac{\omega - \omega'}{2} = \frac{k}{2\omega_0} \ll 1.$$

Таким образом, первые множители в правой части уравнений (20.9) *медленно изменяются* во времени; это и обуславливает тот факт, что представленные на рис. 34 колебания носят *характер биений*.

Теория не будет столь простой, если маятники расстроены, т. е. если $l_1 \neq l_2$ или $m_1 \neq m_2$. Положим

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l_2}, \quad k_1 = \frac{c}{m_1}, \quad k_2 = \frac{c}{m_2},$$

где c — напряжение в пружине при единичном удлинении. Тогда вместо уравнений (20.1) мы получим следующие исходные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= -k_1(x_1 - x_2), \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= -k_2(x_2 - x_1). \end{aligned} \right\} \quad (20.10)$$

Здесь также имеются две нормальных частоты, которые мы можем определить по способу, введенному в §3, (3.24) [при решении уравнений (20.1) мы смогли применить более удобный искусственный прием, который, однако, в рассматриваемом общем случае не привел бы к цели]; положим

$$x_1 = Ae^{i\lambda t}, \quad x_2 = Be^{i\lambda t}. \quad (20.11)$$

Тогда, подставляя выражения для x_1 и x_2 в уравнения (20.10), получим:

$$\left. \begin{aligned} A(\omega_1^2 - \lambda^2 + k_1) &= k_1 B, \\ B(\omega_2^2 - \lambda^2 + k_2) &= k_2 A. \end{aligned} \right\} \quad (20.12)$$

Вытекающее отсюда так наз. «вековое уравнение»¹ является квадратным относительно λ^2 :

$$\frac{B}{A} = \frac{\omega_1^2 - \lambda^2 + k_1}{k_1} = \frac{k_2}{\omega_2^2 - \lambda^2 + k_2}. \quad (20.13)$$

Оно имеет вид

$$\{\lambda^2 - (\omega_1^2 + k_1)\}\{\lambda^2 - (\omega_2^2 + k_2)\} = k_1 k_2. \quad (20.14)$$

При малых k_1 и k_2 получаем следующее приближенное решение этого уравнения:

$$\lambda^2 = \left\{ \begin{aligned} \omega_1^2 + k_1 + \frac{k_1 k_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}, \\ \omega_2^2 + k_2 + \frac{k_1 k_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}. \end{aligned} \right\} \quad (20.15)$$

Если мы обозначим найденные таким образом корни квадратного уравнения через ω^2 и ω'^2 и обобщим выражения (20.11) по образцу формулы (3.24б), то, представив решения в действительной форме, получим:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a \cos \omega t + b \sin \omega t + a' \cos \omega' t + b' \sin \omega' t; \\ x_2 &= \gamma a \cos \omega t + \gamma b \sin \omega t + \gamma' a' \cos \omega' t + \gamma' b' \sin \omega' t. \end{aligned} \right\} \quad (20.16)$$

Здесь γ и γ' означают значения отношения $\frac{B}{A}$, которые получаются из уравнения (20.13) при подстановке в него $\lambda^2 = \omega^2$ и, соответственно, $\lambda^2 = \omega'^2$.

Пусть начальные условия останутся прежними:

$$\text{при } t = 0: \quad x_2 = 0, \quad \dot{x}_2 = 0, \quad \dot{x}_1 = 0, \quad x_1 = C.$$

¹Это слово заимствовано из астрономической теории возмущений.

Это дает:

$$\left. \begin{aligned} \gamma a + \gamma' a' &= 0, & \gamma \omega b + \gamma' \omega' b' &= 0; \\ \omega b + \omega' b' &= 0, & a + a' &= C. \end{aligned} \right\} \quad (20.17)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} b &= b' = 0, \\ a &= \frac{\gamma'}{\gamma' - \gamma} C, & a' &= \frac{\gamma}{\gamma - \gamma'} C. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения (20.16) примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{C}{\gamma' - \gamma} (\gamma' \cos \omega t - \gamma \cos \omega' t); \\ x_2 &= \frac{C}{\gamma' - \gamma} \gamma \gamma' (\cos \omega t - \cos \omega' t). \end{aligned} \right\} \quad (20.18)$$

Выражение для x_2 можно преобразовать к виду, аналогичному формуле (20.9):

$$x_2 = \frac{2\gamma\gamma'}{\gamma - \gamma'} C \sin \frac{\omega' - \omega}{2} t \sin \frac{\omega' + \omega}{2} t. \quad (20.19)$$

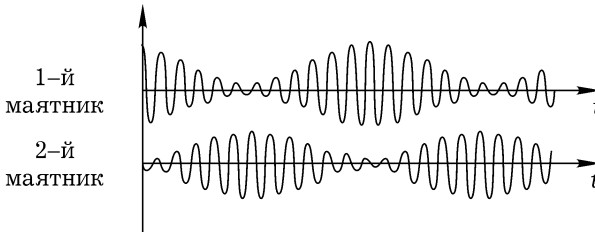


Рис. 36. Кривые колебаний двух несколько расстроенных симпатических маятников

Итак, в моменты времени, определяемые условием

$$\frac{\omega' - \omega}{2} t = n\pi,$$

второй маятник возвращается в положение покоя, тогда как первый маятник, напротив, в момент максимального отклонения второго маятника x_2 [согласно первому уравнению (20.18) и рис. 36] сохраняет конечную амплитуду колебаний. Взаимный обмен энергией, вследствие расстройки маятников, стал неполным.

Для применения вышеизложенной теории к электротехническим вопросам необходимо ее расширить, приняв во внимание также и затухание маятников, аналогом которого в электротехнике является омическое сопротивление (член с ускорением соответствует электрической самоиндукции, «упругая» сила — электрической емкости). При рассмотрении электротехнических вопросов нужно было бы, наряду с рассмотренной здесь «связью, зависящей только от положения» [k , умноженное на $\pm(x_2 - x_1)$], принять во внимание и «связь, зависящую от ускорения или от скорости».

В задаче III. 5 мы проведем расчет простого в изготовлении устройства, в котором маятники бифилярно подвешены на гибкой проволоке и колеблются не в плоскости своего положения покоя, а перпендикулярно к этой плоскости.

Интересным устройством, при котором оба симпатических маятника реализованы, так сказать, в одном и том же объекте, является колеблющаяся спиральная пружина¹.

Эта пружина (рис. 37) может совершать как колебания в осевом направлении (y), так и крутильные колебания (x) вокруг оси. При конечном расстоянии между витками пружины связь между обоими этими колебаниями осуществляется самой пружиной. Именно, если оттянуть пружину вниз, то можно ощутить боковое давление: пружина стремится отойти в боковом направлении. Если закрутить пружину вбок, в сторону продолжения проволоки, то пружина будет стремиться вытянуть

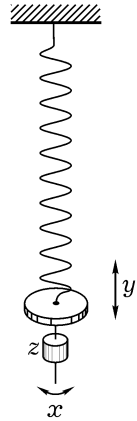


Рис. 37. Крутильное колебание и колебание изгиба спиральной пружины

¹Подробности см. в «Wüllner — Festschrift», Teubner 1905: «Lissajous-Figuren und Resonanzwirkungen bei schwingenden Schraubenfedern; ihre Verwertung zur Bestimmung des Poissonschen Verhältnisses» («Фигуры Лиссажу и резонансные действия в случае колеблющейся спиральной пружины; применение их для определения коэффициента Пуассона».)

ся вниз; таким образом, если вызвать колебание в направлении y , то будет возбуждено и колебание в направлении x , и наоборот. С точки зрения упругих напряжений в материале колебание в направлении оси y является крутильным колебанием, а колебание в направлении x — колебанием изгиба.

Варьируя добавочную массу Z , можно привести вертикальное и горизонтальное колебания в состояние точного или приближенного резонанса. Если тогда возбудить одно из колебаний, то будет иметь место обмен энергией в соответствии с рис. 34 или 36.

§ 21. ДВОЙНОЙ МАЯТНИК

Прежде, как и в начале предыдущего параграфа, опишем явления, приводящие нас к рассматриваемой задаче.

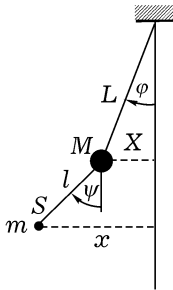


Рис. 38. Схема устройства двойного маятника

К тяжелому маятнику (например, к люстре) подвешен легкий маятник с приблизительно одинаковым периодом колебания. Если сообщить тяжелому маятнику короткий толчок, то легкий маятник приходит в быстрое движение, которое, однако, внезапно прекращается на короткое время. В тот же самый момент мы замечаем, что тяжелый маятник, который до этого находился в покое, начинает совершать заметные колебания. Однако непосредственно вслед за этим он вновь приходит в состояние покоя и, со своей стороны, приводит легкий маятник в быстрое движение, после чего вся картина повторяется.

Как было указано, массы обоих маятников (обозначим их через M и m) должны сильно отличаться друг от друга, но приведенные длины маятников (обозначим их через L и l) должны быть приблизительно равны. Положим

$$\frac{m}{M} = \mu \ll 1.$$

Отклонения тяжелого и легкого маятников (обозначим их соответственно X и x) рассматриваются как малые величины, так что по-прежнему можно пренебрегать различием между дугой окружности и касательной. В соответствии с этим, также и углы отклонения φ и ψ (на

рис. 38 ψ соответствует *относительному* отклонению $x - X$) должны считаться малыми. Таким образом, мы можем принять:

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi = \varphi = \frac{X}{L}, \quad \sin \psi = \psi = \frac{x - X}{l} \\ \sin(\psi - \varphi) = \psi - \varphi = \frac{x - X}{l} - \frac{X}{L}, \\ \cos \varphi = \cos \psi = \cos(\varphi - \psi) = 1. \end{aligned} \right\} \quad (21.1)$$

На верхний маятник действует, кроме его веса, сила натяжения нити нижнего маятника¹

$$S \cong mg \cos \psi$$

которая дает слагающую силы по направлению движения тяжелого маятника, равную $-mg \cos \psi \sin(\varphi - \psi)$. Поэтому уравнения движения примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{X} = -M\frac{g}{L}X + mg\left(\frac{x - X}{l} - \frac{X}{L}\right), \\ m\ddot{x} = -m\frac{g}{l}(x - X) \end{aligned} \right\} \quad (21.2)$$

или, если их переписать в более удобной форме,

$$\begin{aligned} \ddot{X} + \left(\frac{g}{L} + \mu\frac{g}{l} + \mu\frac{g}{L}\right)X = \mu\frac{g}{l}x, \\ \ddot{x} + \frac{g}{l}x = \frac{g}{l}X. \end{aligned} \quad (21.3)$$

С этого момента мы примем $L = l$ и введем обозначение

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}. \quad (21.4)$$

¹В приводимом здесь элементарном изложении натяжение S является наглядной вспомогательной величиной; когда мы позднее будем рассматривать ту же самую проблему по общему методу Лагранжа, введение S станет излишним. Приведенное в тексте значение S получено на основе следующих соображений: сила натяжения нити легкого маятника находится в равновесии с его весом и силой инерции, одной из слагающих которой является центробежная сила. Однако центробежной силой, как величиной второго порядка малости, можно пренебречь. Поэтому $S = mg \cos \psi$, как и указано выше.

При этом уравнения движения (21.3) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X} + \omega_0^2(1 + 2\mu)X &= \mu\omega_0^2x, \\ \ddot{x} + \omega_0^2x &= \omega_0^2X. \end{aligned} \right\} \quad (21.5)$$

Из этих уравнений движения видно, что верхний маятник связан с нижним в $\frac{1}{\mu}$ раз слабее, чем нижний маятник с верхним.

Чтобы проинтегрировать уравнение (21.5), мы должны по аналогии с (20.11) положить

$$x = Ae^{i\lambda t}; \quad X = Be^{i\lambda t}. \quad (21.6)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (21.5) и сокращая, получим:

$$\left. \begin{aligned} A(\omega_0^2 - \lambda^2) &= B\omega_0^2, \\ B[\omega_0^2(1 + 2\mu) - \lambda^2] &= A\mu\omega_0^2. \end{aligned} \right\} \quad (21.7)$$

В каждом из этих уравнений выразим $\frac{B}{A}$ через остальные величины. Приравнявая друг другу найденные выражения, получим квадратное уравнение относительно λ^2 :

$$(\lambda^2 - \omega_0^2)^2 + 2\mu\omega_0^2(\omega_0^2 - \lambda^2) = \mu\omega_0^4. \quad (21.8)$$

Обозначим корни этого уравнения через $\lambda^2 = \omega^2$ и $\lambda^2 = \omega'^2$. Пренебрегая более высокими степенями малой величины μ , легко найдем:

$$\left. \begin{aligned} \omega \\ \omega' \end{aligned} \right\} = \omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\mu} \right). \quad (21.9)$$

Следовательно, общее решение уравнений (21.5), написанное в действительной форме, имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \omega t + b \sin \omega t + a' \cos \omega' t + b' \sin \omega' t, \\ X &= \gamma a \cos \omega t + \gamma b \sin \omega t + \gamma' a' \cos \omega' t + \gamma' b' \sin \omega' t. \end{aligned} \right\} \quad (21.10)$$

Здесь, как и в §20, γ и γ' являются значениями отношения $\frac{B}{A}$, которые получаются из уравнений (21.7) при подстановке в них соответственно $\lambda^2 = \omega^2$ и $\lambda^2 = \omega'^2$, а именно:

$$\gamma = -\sqrt{\mu}, \quad \gamma' = +\sqrt{\mu},$$

откуда

$$\gamma' - \gamma = 2\sqrt{\mu}. \quad (21.11)$$

Пусть в момент $t = 0$ возбуждение характеризуется условиями

$$x = 0, \quad \dot{x} = 0, \quad X = 0, \quad \dot{X} = C. \quad (21.12)$$

(Эти равенства являются начальными условиями.) Отсюда следует:

$$\left. \begin{aligned} a + a' &= 0 \\ \gamma a + \gamma' a' &= 0 \end{aligned} \right\} a = a' = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \omega b + \omega' b' &= 0 \\ \gamma \omega b + \gamma' \omega' b' &= C \end{aligned} \right\} b = \frac{C}{\omega(\gamma - \gamma')}; \quad b' = \frac{C}{\omega'(\gamma' - \gamma)}.$$

Таким образом, окончательные решения принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{C}{\gamma - \gamma'} \left(\frac{\sin \omega t}{\omega} - \frac{\sin \omega' t}{\omega'} \right), \\ X &= \frac{C}{\gamma - \gamma'} \left(\frac{\gamma}{\omega} \sin \omega t - \frac{\gamma'}{\omega'} \sin \omega' t \right). \end{aligned} \right\} \quad (21.13)$$

Переходя к скоростям \dot{x} и \dot{X} и заменяя γ и γ' их выражениями (21.11), получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{C}{2\sqrt{\mu}} (\cos \omega' t - \cos \omega t), \\ \dot{X} &= \frac{C}{2} (\cos \omega' t + \cos \omega t). \end{aligned} \right\} \quad (21.14)$$

Итак, скорости тяжелого верхнего маятника будут (при одинаковых фазах) в $\sqrt{\frac{1}{\mu}}$ раз меньше скоростей легкого нижнего маятника; в то же время мы видим, что выражения (21.14) удовлетворяют начальным условиям возбуждения (21.12). Это же относится и к самим отклонениям. Как отклонения, так и скорости имеют, ввиду близости значений ω и ω' , *характер биений*, что можно было бы выразить и формально, приведя решение к виду, аналогичному формулам (20.9).

Остановимся еще на одной задаче, которая, собственно говоря, тоже относится к классу задач на связанные колебания и приводит к типам колебаний, вполне аналогичным рассмотренным выше. Однако мы

изберем более простую в математическом отношении трактовку задачи, а именно, будем рассматривать ее по образцу вынужденных¹ затухающих колебаний (ср. § 19); таким образом, мы будем иметь дело не с системой дифференциальных уравнений, а с интегрированием одного единственного дифференциального уравнения

Повесьте карманные часы с балансом на гладкий гвоздь таким образом, чтобы они могли свободно, по возможности без трения, качаться. Легким прикосновением пальца или платка приведите часы в состояние полного покоя; это их состояние мы примем за начальное. Часы немедленно придут в движение и будут совершать колебания с возрастающей амплитудой около вертикального положения равновесия. Однако амплитуда этих колебаний возрастает лишь до известного максимума, после чего она вновь убывает до нуля, и весь процесс повторяется снова.

Очевидно, что при возбуждении колебаний часов мы имеем дело с их движением, направленным в сторону, противоположную качанию баланса, а следовательно, с действием закона момента количества движения (закона площадей); при последующем же затухании амплитуды колебаний мы имеем дело с интерференцией свободных колебаний часов как маятника в поле тяжести и вынужденных колебаний их под действием баланса.

Воспользуемся обозначениями, принятыми в § 13, Б. Итак, обозначим полный момент количества движения системы через \mathbf{N} . Разложим его на две компоненты: одну, соответствующую качанию часов как маятника, и другую, соответствующую колебаниям баланса:

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_{\text{маят.}} + \mathbf{N}_{\text{бал.}}, \quad (21.15)$$

причем оба момента берутся относительно точки подвеса O (гвоздя). Обозначим частоту колебаний баланса через ω ; она определяется силой его спиральной пружины. Частоту собственных колебаний (не нарушенных воздействием баланса) колебаний «маятника» обозначим через ω_0 . В соответствии с формулами (11.6) и (16.4), положим

$$N_{\text{маят.}} = \Theta \dot{\varphi}, \quad \Theta = Ma^2. \quad (21.16)$$

¹В общем можно сказать следующее: возбудить колебание внешней силой означает установить связь данной системы с другой системой, на которую первая система не оказывает обратного воздействия. В случае, который мы сейчас рассмотрим, обратное воздействие колебания маятника на баланс действительно является исчезающе малым.

Здесь M — полная качающаяся масса, a — ее радиус инерции, измеренный от точки O . Мы предполагаем, что колебания баланса имеют синусоидальную форму, т. е. описываются уравнением

$$\varphi_{\text{бал.}} = \alpha \sin \omega t.$$

Согласно формулам (11.6) и (16.4), момент количества движения баланса равен

$$N_{\text{бал.}} = m\omega b^2 \alpha \cos \omega t. \quad (21.17)$$

Здесь m — масса баланса, b — его радиус инерции, измеренный от точки O ; с помощью теоремы Штейнера (16.8) его можно было бы выразить через радиус инерции, измеренный от центра тяжести баланса.

Если предположить, что угол φ достаточно мал, то момент внешней силы, как и для физического маятника [ср. уравнение (16.1)], равен

$$-Mgs\varphi, \quad (21.18)$$

где s означает расстояние между центром тяжести часов и точкой подвеса O . Уравнение движения нашей системы, согласно формуле (13.9) с учетом соотношений (21.15), (21.16), (21.17), (21.18), принимает, таким образом, следующий вид:

$$\ddot{\varphi} + \frac{gs}{a^2} \varphi = \frac{m}{M} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \alpha \omega^2 \sin \omega t. \quad (21.19)$$

Полученное уравнение является уравнением незатухающих вынужденных колебаний, рассмотренных нами в §19. В соответствии со смыслом величины ω_0 (собственная частота колебаний маятника при отсутствии внешнего возбуждения), положим

$$\frac{gs}{a^2} = \omega_0^2.$$

Обозначим далее ради краткости

$$c = \frac{m}{M} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \alpha \omega^2 \ll 1.$$

В этих обозначениях уравнение (21.19) запишется:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = c \sin \omega t. \quad (21.20)$$

Решение этого уравнения, которое при $t = 0$ одновременно удовлетворяет начальным условиям $\varphi = 0$ и $\dot{\varphi} = 0$, таково:

$$\varphi = \frac{c}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right). \quad (21.21)$$

Вследствие малости величины c (множитель $\frac{m}{M}$), колебание, представленное этим уравнением, будет иметь заметную величину только при $\omega_0 = \omega$, т. е. при наличии приблизительного резонанса между «внешним» колебанием часов как маятника и «внутренним» колебанием баланса. В карманных часах не слишком малых размеров этот резонанс более или менее хорошо выражен (дамские же часы для этой цели не годятся).

Согласно формуле (21.21), в случае приближенного равенства ω и ω_0 резонансу сопутствует также и явление биений. Период биений T определяется требованием

$$\omega T = \omega_0 T \pm 2\pi \quad (21.22)$$

и, следовательно, равен

$$T = \frac{2\pi}{|\omega - \omega_0|}. \quad (21.22a)$$

Его можно очень точно определить путем отсчета числа колебаний маятника между двумя узлами биений и, таким образом, получить удобный и точный критерий для суждения о том, насколько близко достигнут резонанс. Особенность рис. 32, которая наглядно представляет решение дифференциального уравнения, идентичного уравнению (21.20), заключается только в том, что на ней изображен случай полного резонанса, которому соответствует $T = \infty$.

Если мы продолжительное время не будем прикасаться к часам, то заметим, что биения их прекратились. Причиной этого является, очевидно, трение (в подвесе и в воздухе), которым мы до сих пор пренебрегали. Трение вызывает затухание колебаний маятника, что же касается колебаний баланса, то трение, как мы уже знаем (ср., например, рис. 33), лишь несколько уменьшает их амплитуду. Мы можем рассуждать следующим образом: в начальном состоянии вынужденное колебание возбуждено до своей полной величины, а свободное колебание маятника — до такой величины, что оно в момент времени $t = 0$ как раз компенсирует вынужденное колебание, в соответствии с начальными условиями $\varphi = \dot{\varphi} = 0$. В действительности же, когда мы

в начальный момент придерживаем часы, мы по существу сообщаем системе импульс, направленный в сторону, противоположную колебанию баланса. С течением времени трение поглощает этот импульс, так что остается только вынужденное колебание баланса.

В литературе наш пример с часами был впервые рассмотрен в «Electrotechn. Zeitschrift» за 1904 г. в связи с актуальной в то время проблемой «колебаний синхронных машин». Два синхронных генератора переменного тока, включенные параллельно и работающие на одну и ту же цепь тока, испытывают в случае резонанса нежелательные колебания числа оборотов и тока. Эти колебания являются по существу увеличенным отображением колебаний наших часов, а также и рассмотренных здесь явлений связи и резонанса симпатических маятников.