

## ГЛАВА II

# МЕХАНИКА СИСТЕМЫ, ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНОЙ РАБОТЫ И ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

### § 7. СТЕПЕНИ СВОБОДЫ И ВИРТУАЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ГОЛОНОМНЫЕ И НЕГОЛОНОМНЫЕ СВЯЗИ

Материальная точка имеет *одну* степень свободы, если она может перемещаться только вдоль некоторой прямой или кривой; *две* степени свободы, если она принуждена оставаться в плоскости или на заданной поверхности. Материальная точка, свободно движущаяся в пространстве, имеет *три* степени свободы.

Две материальные точки, связанные между собою невесомым жестким стержнем, имеют пять степеней свободы, ибо первую точку можно считать свободной, тогда как вторая должна находиться на шаровой поверхности, описанной вокруг первой точки радиусом, равным длине стержня.

В случае  $n$  материальных точек, на координаты которых наложено  $r$  условий связи, число степеней свободы равно

$$f = 3n - r. \quad (7.1)$$

При бесконечном множестве материальных точек, связанных бесконечным множеством условий, подобный подсчет числа степеней свободы, естественно, невыполним. Как нужно поступать в таких случаях, мы покажем на примере твердого тела.

а) *Свободно движущееся твердое тело.* Возьмем какую-нибудь точку твердого тела. Эта точка имеет три степени свободы. Так как произвольная вторая точка находится на постоянном расстоянии от первой,

## § 7. Степени свободы и виртуальные перемещения механической системы 69

то она может двигаться только по шаровой поверхности вокруг первой точки, что дает дальнейшие две степени свободы. Наконец, третья точка может описывать круговую траекторию вокруг оси, проходящей через первые две точки, что дает одну степень свободы. Этим однозначно определены траектории всех остальных материальных точек твердого тела. Таким образом,

$$f = 3 + 2 + 1 = 6.$$

б) *Волчок на плоскости.* Предположим, что волчок в нижней своей части оканчивается острием, и примем в нашем подсчете это острие за первую точку тела; острие имеет две степени свободы. Вторая точка может двигаться по полусфере относительно первой точки, третья точка — по окружности вокруг прямой, соединяющей первые две точки. В целом для волчка

$$f = 2 + 2 + 1 = 5.$$

в) *Волчок с закрепленной точкой.* Обе степени свободы первой точки теряются при ее закреплении, так что

$$f = 2 + 1 = 3.$$

г) *Твердое тело с неподвижной осью и маятник.* Здесь

$$f = 1.$$

Если центр тяжести тела не лежит на оси вращения, то такое тело называют *физическим маятником*. Если это тело стянуть в точку, то из физического получается математический маятник. Для *сферического маятника* (материальная точка, принужденная двигаться по шаровой поверхности)

$$f = 2.$$

д) *Бесконечное число степеней свободы.* У деформируемого твердого тела или жидкости

$$f = \infty.$$

В этом случае уравнения движения являются *дифференциальными уравнениями в частных производных*. Напротив, система с конечным числом степеней свободы описывается *обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка*, число которых равно числу степеней свободы.

е) *Кривошипно-шатунный механизм как пример машины с предписанным движением.* Машина с предписанным движением имеет одну степень свободы. Она состоит из ряда практически твердых тел, соединенных друг с другом шарнирно или посредством каких-либо направляющих. Классическим примером машины с предписанным движением является *кривошипно-шатунный механизм* (рис. 9). Если, однако, снабдить машину центробежным регулятором (предусмотренным еще Уаттом), то этим добавляется *вторая* степень свободы.

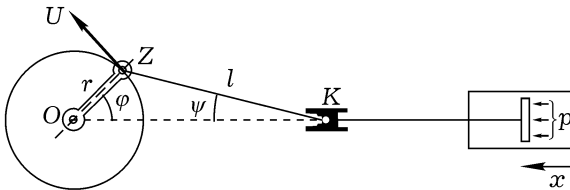


Рис. 9. Схематическое изображение кривошипно-шатунного механизма

В вышеприведенных примерах число степеней свободы равно числу независимых координат, необходимых для определения положения системы. Эти координаты отнюдь не обязаны быть прямоугольными. Например, в случае кривошипно-шатунного механизма можно вместо координаты  $x$ , характеризующей положение поршня, выбрать в качестве координаты угол  $\varphi$ , определяющий положение кривошипа. В общем случае при  $f$  степенях свободы мы будем обозначать координаты, выбор которых в значительной мере произволен, через

$$q_1, q_2, \dots, q_f; \quad (7.2)$$

$r$  «условий связи между координатами», которые имеются в виду в уравнении (7.1), могут быть тождественно удовлетворены выбором координат  $q$ , так что они выпадают из дальнейшего рассмотрения системы.

Существенная заслуга механики Герца (упомянутой на стр. 15) заключается в том, что в ней было обращено внимание на *условия связи, выраженные в дифференциальной форме*, которые не могут быть тождественно удовлетворены выбором координат  $q$ . Подобное условие свя-

зи можно сформулировать так:

$$\sum_{k=1}^f F_k(q_1 \dots q_f) dq_k = 0. \quad (7.3)$$

При этом предполагается, что не все  $F_k$  имеют вид  $\frac{\partial F}{\partial q_k}$ ; таким образом, выражение (7.3) *не является* полным дифференциалом некоторой функции  $F(q_1 \dots q_f)$  и не может быть сделано таковым путем умножения на надлежащий интегрирующий множитель.

Условия связи вида  $F(q_1 \dots q_f) = \text{const}$  называют, по Герцу *голономными* (греческое holos = латинскому integer = цельный, интегрируемый), условия же связи вида (7.3), которые не могут быть проинтегрированы в общем виде, называются *неголономными*. Простейшим примером неголономной связи является колесо с острыми краями на плоском основании (см. задачу II. 1; сюда относятся также сани и шарнирный механизм велосипеда). Поступательное движение такого колеса ограничено тем, что оно может происходить только в направлении самого колеса (т. е. что точка касания колеса с основанием может перемещаться только по направлению касательной к колесу). Несмотря на это, колесо может достигнуть любой точки плоского основания хотя для этого может оказаться необходимым движение по траектории с острием (точкой возврата). Таким образом, колесо обладает при конечных движениях *большим числом степеней свободы, чем при бесконечно малом движении*. Вообще, система, подчиненная  $r$  неголономным условиям связи и имеющая  $f$  степеней свободы при конечных движениях, имеет только  $f - r$  степеней свободы при бесконечно малом движении. Об этом более подробно см. задачу II. 1.

Это различие имеет важное значение для понятия *виртуального перемещения*. Под виртуальным перемещением мы понимаем *произвольное, совместимое с условиями связи, бесконечно малое изменение положения системы*. Истинное перемещение, происходящее под действием данных сил и в данных условиях, мы обозначаем через

$$dq_1, dq_2, \dots, dq_f,$$

тогда как виртуальное перемещение мы будем обозначать через

$$\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_f.$$

Величины  $\delta q$  не имеют никакого отношения к процессу движения; они вводятся лишь *пробным порядком* для того, чтобы выявить имеющиеся в системе соотношения и силы, действующие на систему.

Однако при чисто голономных связях величины  $\delta q$  независимы друг от друга (каждой степени свободы соответствует одно  $\delta q$ ), в то время как в случае неголономных связей приходится вводить в рассмотрение *избыточное число* виртуальных смещений  $\delta q$ , связанных между собою дифференциальными условиями вида (7.3). Эти условия подобны уравнению (7.3):

$$\sum_{k=1}^f F_k(q_1 \dots q_f) \delta q_k = 0. \quad (7.4)$$

При этом  $f$  означает число степеней свободы для конечных движений, которое, как мы уже подчеркивали, больше числа степеней свободы при бесконечно малом движении.

## § 8. ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

Рассмотрим механическую систему, которая, несмотря на воздействие внешних сил, находится в равновесии. Силы могут быть приложены к различным частям системы и действовать в любых направлениях; нет необходимости предполагать, что эти силы такие, какие они должны были бы быть для поддержания равновесия лишь одного твердого тела. Находятся ли силы, приложенные к рассматриваемой системе, в равновесии или нет, зависит в такой же степени от самой системы, как и от сил.

В духе элементарной механики точки мы должны были бы поставить вопрос о *реакциях*, вызванных внешними силами и действующих между отдельными частями системы. Так поступают, например, в технической механике при рассмотрении кривошипно-шатунного механизма (см. рис. 9). Давление пара, действующее на поршень, передается поршневым штоком на крейцкопф  $K$  и от него на шатун (посредством нормального давления, исходящего от направляющих). Шатун действует на цапфу кривошипа  $Z$  с силой, направленной вдоль шатуна. Но только перпендикулярная к кривошипу (т. е. касательная к окружности кривошипа) слагающая  $U$  этой силы должна в случае равновесия уравновешиваться внешним противодействием. Слагающая же силы в на-

правлении кривошипа уравновешивается сопротивлением подшипника кривошипа  $O$ ; она только нагружает подшипник кривошипа, но не имеет значения для вопроса о равновесии.

Таким образом, равновесие создается реакциями внутри системы. Хотя в простейших случаях и можно проследить действие каждой из этих реакций в отдельности, но, вообще говоря, это очень кропотливо. Не зная каждой из реакций в отдельности, можно утверждать, что *они не совершают над системой никакой работы*. В нашем случае давление в направляющих направлено перпендикулярно движению кривокопфа, а сила, переданная на кривошип через его цапфу  $Z$ , проходит через неподвижную точку  $O$  подшипника кривошипа. *В общем случае производят пробные виртуальные смещения системы из ее положения равновесия. Совершаемая при этом силами реакций «виртуальная работа» равна нулю.*

Проверим это утверждение на примере твердого тела, в отношении которого мы должны представить себе, что каждая его точка  $i$  связана с любой другой его точкой  $k$  реакциями  $\mathbf{R}_{ik}$  и  $\mathbf{R}_{ki}$ , приложенными соответственно в точках  $i$  и  $k$ . Рассматривая две такие точки обособленно от остальных, получим упомянутую в начале § 7 систему двух материальных точек, соединенных между собой невесомым жестким стержнем. Действующие в этом стержне реакции удовлетворяют третьему закону Ньютона:

$$\mathbf{R}_{ik} = -\mathbf{R}_{ki}. \quad (8.1)$$

Подобно тому, как мы это делали в § 7 при подсчете степеней свободы, разложим виртуальное перемещение на общее для обеих точек поступательное перемещение  $\delta\mathbf{s}_i$  и на вращение точки  $k$  вокруг смещенного положения точки  $i$ , происходящее перпендикулярно соединяющему их стержню, перемещение точки  $i$ , соответствующее этому вращению, обозначим через  $\delta\mathbf{s}_n$ . Таким образом, мы полагаем

$$\delta\mathbf{s}_k = \delta\mathbf{s}_i + \delta\mathbf{s}_n.$$

Для виртуальной работы поступательного перемещения, ввиду (8.1), получим:

$$\delta A_{\text{пост.}} = (\mathbf{R}_{ik}\delta\mathbf{s}_i) + (\mathbf{R}_{ki}\delta\mathbf{s}_i) = 0;$$

для виртуальной работы вращения, при котором точка  $i$  неподвижна, а точка  $k$  смещается перпендикулярно к стержню, имеем:

$$\delta A_{\text{вр.}} = (\mathbf{R}_{ki} \delta \mathbf{s}_n) = 0.$$

Из этого примера нужно заключить, что ньютоновский закон равенства действия и противодействия имеет решающее значение при переходе от механики точки к механике системы.

Мы обобщим теперь полученные нами в предыдущих примерах результаты в следующий общий постулат: *для каждой механической системы виртуальная работа реакций равна нулю*. Мы не собираемся доказывать этот постулат в общем виде<sup>1</sup>; напротив, мы рассматриваем его скорее как *определение понятия «механическая система»*.

Нам остается теперь сделать лишь один небольшой шаг до общей формулировки принципа виртуальной работы. Мы рассуждаем следующим образом: каждая внешняя сила находится в равновесии с реакциями, вызванными ею в ее точке приложения; поэтому сумма работ внешней силы и этих реакций при каждом виртуальном перемещении точки приложения силы равна нулю. Это относится и к сумме всех внешних сил, и к сумме всех вызванных ими реакций. Но реакции, взятые в отдельности, не производят никакой виртуальной работы. *Поэтому и виртуальная работа взятых в отдельности внешних сил равна нулю, если система, к которой они приложены, находится в равновесии*. Этот принцип делает излишним кропотливое определение реакций.

В немецкой литературе употребителен термин «принцип виртуальных перемещений» или «смещений»<sup>2</sup>. Мы приняли итальянское наименование — «принцип виртуальной работы», так как оно, по нашему мнению, лучше всего выражает сущность дела. Термин «принцип виртуальных скоростей», введенный Иоганном Бернулли и часто употребляемый в математической литературе, кажется нам неподходящим.

Исторически этот принцип был намечен уже Галилеем и развит дальше Стевином, Яковом и Иоганном Бернулли, а также Даламбером. Однако доминирующее положение наиболее общего принципа равновесия он получил только в «Аналитической механике» Лагранжа.

<sup>1</sup>В первом отделе своей «Аналитической механики» Лагранж пытается доказать этот постулат с помощью надлежащим образом построенной системы полиспаатов. См. Лагранж, Аналитическая механика, т. I, ГОНТИ, 1938, стр. 24–26.

<sup>2</sup>В русской литературе также наиболее распространен термин «принцип виртуальных (возможных) перемещений». (*Прим. ред.*)

Для применения принципа виртуальной работы не имеет большого значения, являются ли наложенные на систему связи голономными или неголономными. В самом деле, принимая во внимание какое-либо из условий связи вида (7.3), можно исключить одно из  $\delta q$  из выражения виртуальной работы, вне зависимости от того, интегрируемо это условие или нет.

Вместо термина «силы реакции» можно пользоваться более ясным выражением «силы геометрического происхождения». Они задаются геометрическими связями, существующими между различными частями системы, или, как в случае твердого тела, между отдельными материальными точками. «Силам реакции» мы противопоставляем то, что мы называли «внешними силами». Вместо этого можно пользоваться более ясным термином «силы физического происхождения» или же «сторонние силы, приложенные извне». Причина их лежит в физических воздействиях; таковы, например, сила тяжести, давление пара, напряжение каната, действующее на систему извне, и т. д. Физическое происхождение этих сил проявляется в том, что в их математическом выражении содержатся особые, поддающиеся лишь опытному определению константы (постоянная тяготения, отсчитываемые по манометру или барометру деления шкалы и т. п.). Трение, о котором мы будем говорить в § 14, нужно отнести частично к силам реакции, частично к «сторонним» силам; к первым — если оно является *трением покоя*, к последним — если оно является *трением движения* (в частности, трением скольжения). Трение покоя автоматически исключается принципом виртуальной работы, трение же скольжения нужно причислить к «сторонним» силам. Внешне это проявляется в том, что в закон трения скольжения [уравнение (14.4)] входит определяемый экспериментально коэффициент трения  $f$ .

## § 9. ПРИМЕРЫ НА ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ВИРТУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

### 1. Рычаг (Архимед)

Рычаг имеет одну степень свободы  $f = 1$  и поэтому также одно линейное перемещение  $\delta q$ , соответствующее виртуальному изменению угла  $\delta\varphi$ .

Равновесие имеет место тогда и только тогда, когда виртуальная работа при повороте рычага на  $\delta\varphi$  равна нулю. Если  $\delta s_P$  и  $\delta s_Q$  означают виртуальные перемещения точек приложения сил  $A$  и  $B$ , то это условие гласит:

$$A \delta s_P + B \delta s_Q = 0.$$

Однако, согласно рис. 10а,

$$\delta s_P = a \cdot \delta\varphi, \quad \delta s_Q = -b \cdot \delta\varphi.$$

Следовательно,

$$(Aa - Bb)\delta\varphi = 0$$

и поэтому

$$Aa = Bb.$$

Таким образом, моменты сил относительно точки вращения  $O$  равны между собою, иначе говоря, алгебраическая сумма моментов равна нулю.

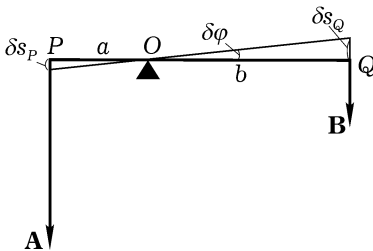


Рис. 10а. Рычаг с плечами  $a$  и  $b$  при нагрузках  $A$  и  $B$ , действующих перпендикулярно

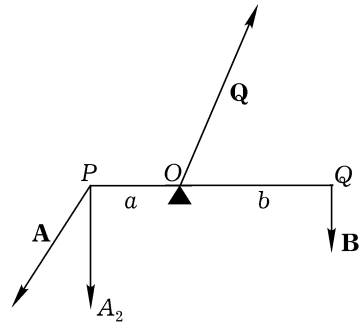


Рис. 10б. Рычаг при нагрузке, действующей наклонно. Реакция в точке опоры

Если сила  $A$  не перпендикулярна к плечу рычага, как это изображено на рис. 10б, то из двух ее слагающих  $A_1$  (направленной вдоль плеча рычага) и  $A_2$  (перпендикулярной плечу рычага) слагающая  $A_1$  не оказывает действия, так что условие равновесия гласит:

$$A_2 \cdot a = B \cdot b.$$

Чтобы определить нагрузку на опору  $O$ , нужно в случае рис. 10а приложить в  $O$  направленную вертикально вверх силу противодействия, равную  $Q = A + B$ ; нагрузка на опору  $O$  равна этой силе  $Q$ , но противоположна по направлению. В случае рис. 10б имеет место векторное соотношение  $\mathbf{Q} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ , причем опять-таки нагрузка в точке  $O$  противоположна этой силе  $\mathbf{Q}$ . Впрочем, вопрос о нагрузке на опору, в сущности, выходит за рамки принципа виртуальной работы. В рассматриваемой механической системе (рычаг) точка вращения  $O$  неподвижна; поэтому ее виртуальное перемещение и произведенная в этой точке виртуальная работа равны нулю. Чтобы определить  $Q$  или, соответственно,  $\mathbf{Q}$  с помощью принципа виртуальной работы, нужно было бы рассмотреть совсем другую механическую систему. А именно, следовало бы наделить точку опоры  $O$  двумя степенями свободы и определить условие равновесия при возможности, помимо рассматривавшегося до сих пор вращения, также и параллельного смещения всего рычага.

## 2. Распределение нагрузки: велосипед, мост

При езде на велосипеде земля противодействует нагрузке в двух точках —  $H$  (заднее колесо) и  $V$  (переднее колесо) (рис. 11а). При этом заднее колесо подвергается большему давлению, так как общий вес  $Q$  велосипеда и седока приложен ближе к  $H$ , чем к  $V$ . Поэтому велосипедист накачивает заднее колесо сильнее, чем переднее. Нагрузка заднего колеса  $A = \frac{b}{a+b}Q$ , нагрузка переднего колеса  $B = \frac{a}{a+b}Q$ .

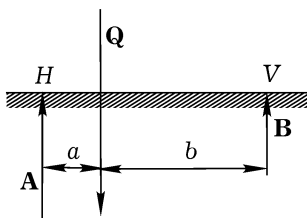


Рис. 11а. Распределение нагрузки на переднее и заднее колеса велосипеда

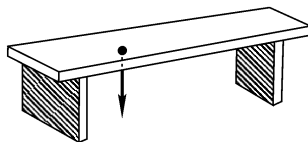


Рис. 11б. Схема моста. Распределение нагрузки на опоры

Такие же соотношения справедливы и для односторонне нагруженного моста (рис. 11б).

### 3. Полиспаст (известный еще грекам)

Допустим, что число блоков на нижнем и верхнем концах полиспаста равно  $n$ . Обозначим поднимаемый груз через  $Q$ , а прилагаемую к концу каната силу через  $P$ . Пусть при виртуальной работе полиспаста точка приложения силы  $P$  проходит путь  $\delta p$ , точка приложения силы  $Q$  проходит путь  $\delta q$  при указанном на рис. 12 выборе положительного направления  $\delta p$  и  $\delta q$ .

Равновесие имеет место, если

$$+P \delta p - Q \delta q = 0. \quad (9.1)$$

Когда груз  $Q$  поднимается на  $\delta q$ , то  $2n$  канатов между верхними и нижними блоками сокращаются каждый на  $\delta q$ , в целом же, следовательно, на  $2n \delta q$ . На такую же величину удлиняется свешивающаяся часть каната в месте приложения силы  $P$ . Таким образом

$$\delta p = 2n \delta q$$

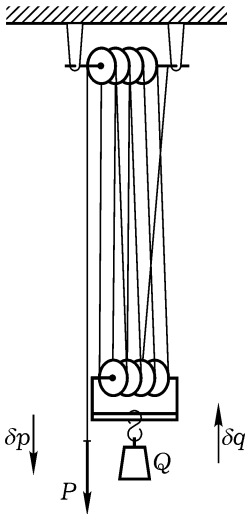
и, ввиду (9.1),

$$(Q - 2nP) \delta q = 0.$$

Следовательно,

$$P = \frac{Q}{2n}. \quad (9.2)$$

Рис. 12. Полиспаст. Виртуальное смещение груза и силы



При этом мы рассматривали полиспаст как «идеальную» механическую систему, т. е. мы не принимали во внимание ни трения каната о блоки, ни осевого трения блоков.

Конечно, этот простой пример можно рассматривать элементарным методом, определяя натяжение в канатах, что в данном случае дает, пожалуй, даже более наглядное представление о взаимодействии различных сил.

Пусть  $S$  — натяжение каната (взятое по всему его поперечному сечению). Если не принимать во внимание трения, то натяжение в канате будет всюду одинаковым; это значит, что в каком бы месте мы

ни перерезали канат, всюду мы обнаружили бы одинаковое натяжение, равное  $S$ , действующее на место разреза с обеих сторон. Сначала мысленно рассечем канат слева над  $P$ . Условие равновесия отсеченного куска каната, на который  $P$  действует вниз, а  $S$  вверх, дает:

$$P = S.$$

Теперь сделаем мысленный разрез через правую часть полиспаста над  $Q$ ; при этом «вскрываются»  $2n$  поперечных сечений каната. Для равновесия отрезанной справа нижней части полиспаста необходимо, чтобы

$$Q = 2nS.$$

Таким образом, мы опять приходим к уравнению

$$P = \frac{Q}{2n}.$$

Рассмотрение верхней части полиспаста приводит к определению нагрузки балки, на которой висит полиспаст. Эта нагрузка равна, очевидно,  $P + Q$ .

#### 4. Кривошипно-шатунный механизм

Возвращаясь к рис. 9, обозначим общее давление пара на поршень через  $P$ ; таким образом,  $P \delta x$  есть виртуальная работа на поршне. Пусть  $Q$  — сила, действующая на кривошип в направлении, противоположном силе  $U$ , и уравновешивающая в итоге силу  $P$ . Ее виртуальная работа будет равна  $-Qr \delta \varphi$ . Принцип виртуальной работы требует:

$$Qr \delta \varphi = P \delta x, \quad Q = P \frac{\delta x}{r \delta \varphi}. \quad (9.3)$$

Таким образом, вычисление  $Q$  сводится к чисто кинематической задаче определения отношения  $\delta x$  к  $\delta \varphi$ .

Согласно рис. 9, проекция на ось  $x$  равна:

$$r \cos \varphi + l \cos \psi = \text{const} - x, \quad (9.4)$$

$$r \sin \varphi \delta \varphi + l \sin \psi \delta \psi = \delta x. \quad (9.4a)$$

Из треугольника  $OZK$  следует:

$$\begin{aligned} \sin \psi &= \frac{r}{l} \sin \varphi, \\ \delta \psi &= \frac{r}{l} \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} \delta \varphi = \frac{r}{l} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2 \varphi}} \delta \varphi. \end{aligned} \quad (9.4б)$$

Подставив это в (9.4а), получим:

$$r \sin \varphi \delta \varphi \left( 1 + \frac{r}{l} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2 \varphi}} \right) = \delta x. \quad (9.4в)$$

Из этого уравнения находим искомую кинематическую величину  $\frac{\delta x}{r \delta \varphi}$ .

Подставив ее в (9.3), получаем:

$$Q = P \sin \varphi \left( 1 + \frac{r}{l} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2 \varphi}} \right). \quad (9.5)$$

Этим выражением определяется также для каждого положения кривошипа  $\varphi$  окружная сила  $U = Q$ , переданная на цапфу  $Z$ . Точное знание этой силы важно для суждения о степени неравномерности хода машины и для подбора необходимого махового колеса. Так как  $\frac{r}{l}$  — малая правильная дробь, то выражение (9.5) можно разложить в хорошо сходящийся ряд по степеням  $\frac{r}{l}$  (см. также задачу II. 2).

Для целей дальнейшего применения выразим еще путь поршня  $x$  в виде ряда по степеням  $\frac{r}{l}$ , написав, согласно (9.4) и (9.4б),

$$x + r \left( \cos \varphi - \frac{1}{2} \frac{r}{l} \sin^2 \varphi + \dots \right) = \text{const.} \quad (9.6)$$

## 5. Момент силы относительно оси и работа при виртуальном вращении

Пусть точка  $P$  находится на расстоянии  $l$  по перпендикуляру от оси  $a$ . В точке  $P$  приложена сила  $\mathbf{F}$  произвольного направления. При

виртуальном повороте  $\delta\varphi$  вокруг оси  $a$  точка  $P$  перемещается на

$$\delta s_P = l \delta\varphi.$$

Какую работу  $\delta A$  совершает при этом сила  $\mathbf{F}$ ?

Разложим силу  $\mathbf{F}$ , как в уравнении (5.18), на взаимно перпендикулярные слагающие  $\mathbf{F}_a$ ,  $\mathbf{F}_l$ ,  $\mathbf{F}_n$ . Работа совершается только слагающей  $\mathbf{F}_n$ , а именно

$$\delta A = F_n \delta s_P = F_n l \delta\varphi.$$

Сравнивая это выражение с (5.18а), приходим к следующей теореме.

*Момент силы относительно оси может быть определен как деленная на  $\delta\varphi$  виртуальная работа, совершаемая этой силой при повороте ее точки приложения вокруг оси на угол  $\delta\varphi$ :*

$$M_a(\mathbf{F}) = \frac{\delta A}{\delta\varphi} = l F_n. \quad (9.7)$$

Таким образом, устанавливается связь основного статического понятия «момент» с основным для всех вопросов равновесия понятием «виртуальная работа».

При этом нужно заметить, что размерность момента (сила  $\times$  плечо) такая же, как и размерность работы (сила  $\times$  путь); это согласуется с равенством (9.7), если, как это принято, считать измеренный в радианах угол безразмерной величиной.

## § 10. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА. ВВЕДЕНИЕ СИЛ ИНЕРЦИИ

Инерцию тел можно понимать как сопротивление изменениям движения, или, короче, как силу инерции. Соответственно этому, определение *силы инерции* материальной точки будет

$$\mathbf{F}^* = -\dot{\mathbf{G}}, \quad (10.1)$$

и основной закон движения  $\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{F}$  принимает вид:

$$\mathbf{F}^* + \mathbf{F} = 0. \quad (10.2)$$

Этот закон гласит: *сила инерции векторно уравновешивает внешнюю силу.*

В то время как  $\mathbf{F}$  означает силу, определяемую физическими условиями, сила  $\mathbf{F}^*$  является *фиктивной силой*. Мы вводим ее для того, чтобы свести вопросы движения к вопросам равновесия, что часто оказывается очень удобным.

Силы инерции хорошо известны нам из повседневной жизни. Приводя в движение тяжелую вертящуюся дверь, мы преодолеваем не силу тяжести или трение, а инерцию двери.

Самой известной формой силы инерции является *центробежная сила*, проявляющаяся при всяком криволинейном движении. Она также является *фиктивной силой*. Центробежная сила соответствует нормальному ускорению  $\dot{v}_n$  криволинейного движения, которое направлено *центростремительно* (по направлению к центру кривизны). На основании уравнения (5.9) центробежная сила равна:

$$Z = -m\dot{v}_n = -m\frac{v^2}{\rho}, \quad (10.3)$$

причем знак минус означает, что эта сила направлена наружу.

К силам инерции относятся также *сила Кориолиса*, или *поворотная центробежная сила* (см. § 28), и гироскопические силы (см. § 27).

Впрочем, «фиктивная» центробежная сила проявляется весьма реально, например, в железнодорожном движении. Превышение наружного рельса над внутренним на криволинейном участке пути подбирается всегда так, чтобы при средней скорости поезда равнодействующая силы тяжести и центробежной силы проходила как раз посередине между обоими рельсами. Этим устраняется не только опасность опрокидывания, но также и вредная односторонняя нагрузка одного из рельсов.

Удивительно, что Генрих Герц в прекрасном введении к своей «Механике» возражает против пользования понятием центробежной силы (Ges. Werke, Bd. III, S. 6):

«Мы вращаем по кругу камень на веревке; при этом мы ощущимо воздействуем на камень с некоторой силой. Эта сила непрерывно отклоняет камень от прямого пути; если мы изменяем эту силу, массу камня и длину веревки, то обнаруживаем, что движение камня действительно происходит в согласии со вторым законом Ньютона. Однако третий закон требует наличия силы, противодействующей той силе, которая передается нашей рукой камню. Ответ на вопрос об этой силе противодействия общеизвестен: говорят, что камень производит обратное действие на руку вследствие центробежной силы и что эта центробежная

сила действительно точно равна, но противоположна по направлению силе нашего воздействия. Допустим ли этот способ выражения? Будет ли то, что мы теперь называем центробежной силой, чем-либо иным, чем инерция камня?».

На этот вопрос мы должны категорически ответить «нет»: согласно нашему определению (10.3), центробежная сила действительно есть то же самое, что и инерция камня. Но силой, противодействующей силе, с которой мы действуем на камень, или, точнее говоря, на веревку, является тянущее усилие, которое оказывает веревка на нашу руку.

Далее Герц пишет: «Нам не остается ничего иного, как заявить: центробежная сила не является силой в собственном смысле этого слова; этот термин так же, как термин «живая сила», имеет историческое происхождение, и сохранение его можно скорее извинить соображениями полезности, чем оправдать». По поводу этого замечания Герца мы хотели бы сказать, что термин «центробежная сила» не нуждается ни в каком оправдании, так как он так же, как и более общий термин «сила инерции», основан на ясном определении.

Впрочем, как раз эта мнимая неясность понятия силы побудила Герца построить его «Механику», освобожденную от этого понятия (см. § 1), которая хотя и очень интересна, но мало плодотворна.

Переходим теперь к научному наследию Даламбера (математик, философ, астроном, физик, энциклопедист; его «Трактат по динамике» опубликован в 1758 г.).

Если материальная точка  $k$ , к которой приложена внешняя сила  $F_k$ , входит в состав произвольной механической системы, то к ней применимо не уравнение (10.2), а уравнение

$$\mathbf{F}_k^* + \mathbf{F}_k + \sum_l \mathbf{R}_{ik} = 0. \quad (10.4)$$

Здесь  $\mathbf{R}_{ik}$  есть сила реакции, с которой действует на точку  $k$  связанная с нею материальная точка  $i$ . Однако, как мы постулировали на стр. 73, реакции  $\mathbf{R}_{ik}$  в своей совокупности не производят никакой работы, как бы мы виртуально (т. е. без нарушения внутренних связей) ни перемещали систему. Поэтому и виртуальная работа всех сил  $(\mathbf{F}^* + \mathbf{F})$  тоже равна нулю:

$$\sum_k (\mathbf{F}_k^* + \mathbf{F}_k, \delta \mathbf{s}_k) = 0. \quad (10.5)$$

Принимая во внимание принцип виртуальной работы, можно сформулировать уравнение (10.5) в следующих словах: *силы инерции находятся в равновесии со «сторонними» силами физического происхождения; при этом нам не нужно знать реакций.*

Это и есть *принцип Даламбера* в его наиболее естественной и простой формулировке. Чтобы придти к другой интересной формулировке этого принципа, рассмотрим величину

$$\mathbf{F}_k + \mathbf{F}_k^* = \mathbf{F}_k - \dot{\mathbf{G}}_k.$$

Она является той частью силы  $\mathbf{F}_k$ , которая не затрачивается на движение точки  $k$ . Мы назовем ее «потерянной силой» и сформулируем уравнение (10.5) следующим образом:

*Совокупность действующих на систему потерянных сил находится в равновесии.*

В учебниках очень распространена формулировка принципа Даламбера в прямоугольных координатах. Обозначим через  $X_k, Y_k, Z_k$  слагающие силы  $\mathbf{F}_k$ , а слагающие  $\delta s_k$  через  $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$ . Если, кроме того, вести расчет для постоянных масс  $m_k$ , то для системы, состоящей из  $n$  материальных точек, можно написать вместо (10.5):

$$\sum_{k=1}^n \{ (X_k - m_k \ddot{x}_k) \delta x_k + (Y_k - m_k \ddot{y}_k) \delta y_k + (Z_k - m_k \ddot{z}_k) \delta z_k \} = 0. \quad (10.6)$$

Но при этом необходимо подчинить  $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$  наложенным на систему связям. В общем случае неголономных связей нужно потребовать, в соответствии с уравнением (7.4), в котором мы заменяем обобщенные координаты  $q$  прямоугольными, чтобы выполнялись соотношения:

$$\sum_{\mu=1}^n [F_{\mu}(x_1 \dots z_n) \delta x_{\mu} + G_{\mu}(x_1 \dots z_n) \delta y_{\mu} + H_{\mu}(x_1 \dots z_n) \delta z_{\mu}] = 0. \quad (10.6a)$$

Таких условий для  $\delta x, \delta y, \delta z$  имеется  $3n - f$ , где  $f$  есть число степеней свободы при бесконечно малом движении (ср. стр. 71). В случае голономных связей  $F_{\mu}, G_{\mu}, H_{\mu}$  являются частными производными по  $x_{\mu}, y_{\mu}, z_{\mu}$  одной и той же функции координат.

Мы хотели бы, однако, обратить особое внимание на то, что не следует усматривать в тяжеловесной формулировке (10.6), (10.6a) подлинное содержание принципа Даламбера. Значительно более удобно и, вви-

ду его инвариантной формы, более естественно уравнение (10.5) или эквивалентное ему условие равновесия.

## § 11. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ НА ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ДАЛАМБЕРА

### 1. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Здесь мы имеем дело с одной степенью свободы — углом поворота  $\varphi$ . Назовем  $\dot{\varphi} = \omega$  угловой скоростью,  $\ddot{\varphi} = \dot{\omega}$  — угловым ускорением. Реакции в осевых опорах нас пока не интересуют.

Пусть на тело действуют произвольные внешние силы  $\mathbf{F}$  произвольного направления. Виртуальная работа их определяется, согласно § 9 [уравнение (9.7)], суммой их моментов относительно оси вращения:

$$M_a \delta\varphi, \tag{11.1}$$

где  $M_a$  — сумма моментов сил  $\mathbf{F}$  относительно оси вращения. Требуется определить работу сил инерции  $\mathbf{F}^*$ . Разделим тело на элементы массы  $dm$ . Перпендикулярной к оси слагающей силы инерции, действующей на  $dm$ , является, согласно (10.3), центробежная сила  $dm \frac{v^2}{r} = dm \omega v$ . (При круговом движении радиус кривизны  $\rho$  траектории, очевидно, равен расстоянию  $r$  от оси вращения; скорость  $v$  каждой материальной частицы равна  $r\omega$ , ускорение  $\dot{v}$  вдоль траектории равно  $r\dot{\omega}$ .) Но центробежная сила не производит никакой работы. С другой стороны, слагающая силы инерции по направлению траектории равна

$$-dm \dot{v} = -dm r \dot{\omega}. \tag{11.2}$$

Таким образом, полная виртуальная работа всех сил инерции равна

$$\sum (-dm \cdot \dot{v}) \delta s = \sum -dm \cdot r \cdot \dot{\omega} \cdot r \delta\varphi = -\delta\varphi \dot{\omega} \int r^2 dm = -d\varphi \dot{\omega} \Theta. \tag{11.2}$$

Величина

$$\Theta = \int r^2 dm \tag{11.3}$$

называется *моментом инерции*. Размерность  $\Theta$  в физической системе единиц равна  $г \cdot см^2$ , в технической же системе единиц  $кг \cdot м \cdot сек^2$ .

Согласно (11.1) и (11.2), принцип Даламбера требует, чтобы выполнялось равенство:

$$\delta\varphi(M_a - \Theta\dot{\omega}) = 0.$$

Отсюда получается *основное уравнение вращательного движения*:

$$\Theta\dot{\omega} = M_a. \quad (11.4)$$

Сравним это уравнение с *основным уравнением для поступательно-го движения* с одной степенью свободы, например, в направлении оси  $x$ :

$$m\ddot{x} = F_x.$$

Мы видим, что при вращательном движении  $\Theta$  играет роль  $m$ . Такую же роль  $\Theta$  играет и в выражении кинетической энергии. При вращательном движении твердого тела эта энергия равна

$$E_{\text{кин.}} = T = \int \frac{dm}{2} v^2 = \int \frac{dm}{2} r^2 \omega^2 = \frac{\omega^2}{2} \int r^2 \cdot dm = \frac{\omega^2}{2} \Theta, \quad (11.5)$$

что точно соответствует элементарному выражению кинетической энергии в механике точки

$$E_{\text{кин.}} = T = \frac{\dot{x}^2}{2} m. \quad (11.5a)$$

Момент инерции  $\Theta$  твердого тела при неподвижной оси вращения не зависит от времени, тогда как для шарнирных механизмов и живых существ  $\Theta$  переменен. В § 13 мы покажем, что все спортивные занятия, в особенности гимнастика, основаны на изменчивости момента инерции человеческого тела.

Зависимость момента инерции твердого тела от положения оси вращения мы рассмотрим в § 22.

Укажем еще на связь кинетической энергии с основным уравнением движения. Подобно тому, как в механике точки из закона живых сил

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dA}{dt}, \quad \text{где} \quad dA = F_x dx,$$

можно (при постоянной массе) получить уравнение движения  $m\ddot{x} = F_x$ , так и при вращательном движении можно с помощью уравнения (11.5) получить из

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dA}{dt},$$

где  $dA = M_a d\varphi$  [уравнение (9.7)], уравнение движения (11.4) (при постоянном  $\Theta$ ).

Момент инерции входит также в выражение для *момента количества движения или момента импульса* вращающегося тела. Если мы обозначим этот момент через  $N$ , то, очевидно,

$$N = \sum dm \, vr = \omega \sum dm \, r^2 = \omega\Theta. \quad (11.6)$$

## 2. Связь между вращательным и поступательным движениями

Представим себе подъемную клеть в руднике или лифт. Канат, несущий лифт, намотан на окружность барабана радиуса  $r$  и приводится в движение силой  $P$ . Два виртуальных перемещения этой системы (рис. 13) связаны соотношением:

$$\delta z = r \cdot \delta\varphi. \quad (11.7)$$

Принцип Даламбера требует, чтобы

$$(-Q - M\ddot{z})\delta z + (rP - \Theta\dot{\omega})\delta\varphi = 0. \quad (11.7a)$$

Удобно представить себе массу барабана сосредоточенной на его окружности, т.е. ввести понятие так наз. «приведенной массы»  $M_{\text{прив.}}$ , определяемое следующим равенством:

$$\Theta = M_{\text{прив.}} \cdot r^2. \quad (11.8)$$

Тогда, принимая во внимание (11.7), можно переписать уравнение (11.7a) в виде:

$$(P - Q - M\ddot{z} - M_{\text{прив.}}r\dot{\omega})\delta z = 0.$$

Отсюда, ввиду того, что  $r\omega = \dot{z}$ ,  $r\dot{\omega} = \ddot{z}$ , получаем уравнение движения

$$(M + M_{\text{прив.}})\ddot{z} = P - Q. \quad (11.9)$$

Таким образом, влияние инерции барабана приводит попросту к прибавлению  $M_{\text{прив.}}$  к массе лифта.

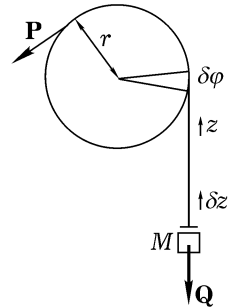


Рис. 13. Связь между вращательным и поступательным движениями (лифт, подъемная клеть)

### 3. Качение шара по наклонной плоскости

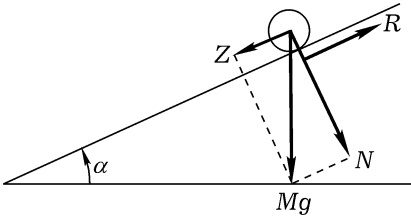


Рис. 14. Шар на наклонной плоскости. Трение покоя  $R$  обуславливает чистое качение, однако не входит в принцип Даламбера

тутью, а эта точка в каждый данный момент покоится. Условие чистого качения гласит:

$$\dot{z} = r\omega \quad (11.10)$$

или, если его записать через виртуальные перемещения,

$$\delta z = r \delta\varphi. \quad (11.10a)$$

По принципу Даламбера требуется, чтобы

$$\delta z(Mg \sin \alpha - M\ddot{z}) + \delta\varphi(-\Theta\dot{\omega}) = 0. \quad (11.11)$$

Вычисление величины  $\Theta$  является задачей интегрального исчисления. Не приводя доказательства, укажем, что для однородного эллипсоида с полуосями  $a$ ,  $b$ ,  $c$  момент инерции относительно оси  $c$  (и соответственно относительно других главных осей) равен:

$$\Theta_c = \frac{M}{5}(a^2 + b^2). \quad (11.12)$$

В частном случае шара эта формула принимает вид:

$$\Theta = \frac{2}{5}Mr^2. \quad (11.12a)$$

Если ввести по аналогии с (11.8) «приведенную к расстоянию  $r$  массу» шара, то из (11.12a) следует:

$$M_{\text{прив.}} = \frac{2}{5}M. \quad (11.12б)$$

Здесь также идет речь о связи поступательного движения (соскальзывание шара) с вращательным (вращение шара вокруг оси, перпендикулярной к плоскости рисунка и проходящей через его центр). Действующей компонентой силы тяжести будет  $Z = Mg \sin \alpha$ ; указанную на рисунке силу трения покоя  $R$  при пользовании принципом Даламбера учитывать не нужно, так как эта сила  $R$  приложена к точке касания шара с плоскостью.

Внося это выражение в (11.11) и учитывая при этом соотношение (11.10а), легко получаем:

$$\ddot{z} = \frac{5}{7}g \sin \alpha. \quad (11.13)$$

Коэффициент  $\frac{5}{7}$  показывает, как замедляется падение по наклонной плоскости вследствие качения шара и обусловленного этим качением увеличения инерции.

В то время как в случае свободного падения мы нашли [ср. (3.13)], что конечная скорость равна  $v = \sqrt{2gh}$ , где  $h$  — высота падения, мы теперь получаем из (11.13) конечную скорость

$$v = \sqrt{2 \cdot \frac{5}{7}gh}.$$

Различие конечных скоростей объясняется тем, что потенциальная энергия тяжелого шара превращается теперь не только в энергию падения, но также и в энергию вращения катящегося шара.

#### 4. Движение материальной точки по заданному пути

Если принять, что это движение происходит без трения, то принцип Даламбера, примененный у единственной имеющейся здесь степени свободы (смещение  $\delta s$  в направлении траектории), приводит к соотношению:

$$\delta s(F_s^* + F_s) = 0,$$

т. е., согласно (5.8),

$$m\dot{v}_s = m\dot{v} = F_s \quad (11.14)$$

при произвольном направлении внешней силы  $\mathbf{F}$ . Перпендикулярная к движению слагающая  $F_n$  (которую мы будем считать положительной, если она направлена центростремительно) должна в сумме с реакцией (положительное направление которой мы будем считать таким же) уравновешивать центробежную силу  $Z$ . Таким образом,

$$R_n + F_n = Z = m \frac{v^2}{\rho}. \quad (11.15)$$

Вообще говоря, особенно если направление осуществляется материальным желобом, совершенно необходимо учитывать также и касательную к траектории слагающую реакции  $R_s$ , т. е. трение. Если считать положительное направление силы трения противоположным приращению пути  $ds$ , то соответствующее обобщение уравнения (11.14) запишется так:

$$m\dot{v} = F_s - R_s. \quad (11.16)$$

Однако в то время, как  $R_s$  определяется уравнением (11.15), слагающая реакции  $R_s$  остается в уравнении (11.16) «статически и динамически неопределенной»; ее можно определить только экспериментальным, физическим путем. Как это нужно делать, мы рассмотрим в приложении к этой главе.

## § 12. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ПЕРВОГО РОДА

Рассмотрим систему дискретных материальных точек  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , на которые наложены  $r$  голономных условий связи

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \dots, \quad F_r = 0. \quad (12.1)$$

Следовательно, число степеней свободы  $f = 3n - r$ . Будем вести рассмотрение в прямоугольных координатах и воспользуемся формулировкой (10.6) принципа Даламбера. Чтобы упростить запись входящих в (10.6) громоздких сумм, пронумеруем координаты  $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n$  следующим образом:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{3n-1}, x_{3n}.$$

Так же поступим и со слагающими сил  $X, Y, Z$ . Тогда уравнение (10.6) примет вид:

$$\sum_{k=1}^{3n} (X_k - m_k \ddot{x}_k) \delta x_k = 0. \quad (12.2)$$

Ввиду наличия  $r$  условий (12.1), на значения вариаций  $\delta x_k$  наложены ограничения

$$\delta F_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (12.3)$$

которые также могут быть записаны в виде:

$$\sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \delta x_k, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (12.4)$$

Пмножим каждую из  $\delta F_i$  на пока произвольный множитель  $\lambda_i$  (множитель Лагранжа) и прибавим полученные произведения к даламберовой формуле (12.2). В результате получим сначала:

$$\sum_{k=1}^{3n} \left( X_k - m_k \ddot{x}_k + \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right) \delta x_k = 0. \quad (12.5)$$

Однако из  $3n$  перемещений  $\delta x$  только  $f$  независимы друг от друга; остальные  $r$  перемещений зависят от них. Пусть, например, зависимыми будут величины  $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_r$ . С другой стороны, у нас есть как раз  $r$  величин  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ , которыми мы можем распорядиться по произволу. Выберем значения  $\lambda_i$ , так, чтобы

$$X_k - m_k \ddot{x}_k + \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = 0; \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (12.6)$$

Тогда (12.5) сведется к уравнению

$$\sum_{k=r+1}^{3n} \left( X_k - m_k \ddot{x}_k + \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right) \delta x_k = 0, \quad (12.7)$$

в котором  $\lambda_r$  имеют уже определенные значения, а вариации  $\delta x_k$ , число которых равно  $f = 3n - r$ , совершенно независимы. Таким образом, если мы, например, положим

$$\delta x_{r+\nu} \neq 0; \quad \delta x_{r+1} = \delta x_{r+2} = \dots = \delta x_{r+\nu-1} = \delta x_{r+\nu+1} = \dots = \delta x_{3n} = 0, \quad (12.8)$$

то из (12.7) будет следовать, что выражение в скобках при  $\delta x_{r+\nu}$  должно обращаться в нуль. Заставив  $\nu$  пробегать значения  $1, 2, \dots, f$ , увидим, что каждая скобка должна равняться нулю:

$$X_k - m_k \ddot{x}_k + \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = 0; \quad k = r + 1, r + 2, \dots, 3n.$$

Эти последние уравнения вместе с уравнениями (12.6) дают  $3n$  дифференциальных уравнений, так называемых уравнений Лагранжа первого рода:

$$m_k \ddot{x}_k = X_k + \sum_{i=1}^{i=r} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = 0; \quad k = 1, 2, \dots, 3n. \quad (12.9)$$

При этом, конечно, каждые три последовательные величины  $m_k$  равны между собой, например  $m_1 = m_2 = m_3$ , так как речь идет об одной и той же материальной точке  $m_1$  с тремя ее координатами  $x_1 = x_1$ ,  $x_2 = y_1$ ,  $x_3 = z_1$ .

Мы считали условия связи (12.1) голономными, но можно легко убедиться в том, что все изложенное справедливо с небольшим видоизменением также и для *неголономных условий связи*. Единственная разница заключается в том, что коэффициенты  $\frac{\partial F_i}{\partial x_k}$  в уравнении (12.4) нужно заменить произвольными функциями координат  $F_{ik}$ , которые могут быть представлены в форме частных производных. Произведя эту замену и в уравнениях (12.9), получаем непосредственно уравнения Лагранжа первого рода для *неголономных систем*:

$$m_k \ddot{x}_k = X_k + \sum_{i=1}^{i=r} \lambda_i F_{ik}. \quad (12.9a)$$

Более интересным является следующее обобщение: допустим, что условия (12.1) *меняются с течением времени*, т. е. что функции  $F_i$  явно зависят не только от  $x_k$ , но и от  $t$ . В этом случае необходимо оговорить, что при образовании выражений (12.4) время *не должно* варьироваться, что мы вправе сделать и что вполне естественно, так как наше виртуальное перемещение не имеет ничего общего с протеканием движения во времени. Эта оговорка не отражается на выводе уравнения (12.9). Однако зависимость  $F_i$  от  $t$  приводит к важным следствиям в отношении *формы закона сохранения энергии*.

Если мы хотим вывести этот закон при *не зависящих от времени* условиях связи, то мы должны поступить следующим образом: умножаем (12.9) на  $dx_k$  и суммируем по  $k$ . Слева получаем:

$$dt \sum m_k \dot{x}_k \ddot{x}_k = dt \frac{d}{dt} \sum \frac{m_k}{2} \dot{x}_k^2 = dt \cdot \frac{dT}{dt} = dT.$$

Первый член справа дает работу внешних сил, произведенную за время  $dt$ :

$$\sum dx_k X_k = dA.$$

Второй член справа обращается в нуль, так как

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i \sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} dx_k = \sum_{i=1}^r \lambda_i dF_i = 0.$$

Действительно, если  $F_i$  зависит только от  $x_k$ , то из  $F_i = 0$  следует:

$$dF_i = \sum \frac{\partial F_i}{\partial x_k} dx_k = 0.$$

Иначе обстоит дело, если  $F_i$  зависит также и от  $t$ . В этом случае надо в последнем и в предпоследнем уравнениях заменить нуль соответственно на:

$$-\frac{\partial F_i}{\partial t} dt \quad \text{и на} \quad -\sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial t} dt.$$

Закон сохранения энергии не будет более иметь вида

$$dT = dA, \tag{12.10}$$

что имеет место при условиях связи, не зависящих от времени, а примет вид

$$dT = dA - dt \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial t}. \tag{12.10a}$$

Это означает, что связи, зависящие от времени, производят над системой работу.

В качестве примера приведем ракетку для игры в теннис. Когда игрок держит ракетку неподвижно, она отражает мяч с неизменной энергией. Если же ракетка отодвигается назад при ударе мяча или, наоборот, ударяет навстречу мячу, то она поглощает энергию или, наоборот, передает энергию мячу.

В случае неголономных систем явная зависимость входящих в (12.9а) функций  $F_{ik}$  от  $t$  была бы совместима с законом сохранения

энергии в форме (12.10)<sup>1</sup>. Если же, однако, неголономное условие связи, в противоположность (7.4), имело бы вид:

$$\sum F_{ik} dx_k + G_i dt = 0,$$

то к выражению (12.10) прибавились бы дополнительные члены, зависящие от  $G_i$ , и уравнение энергии приняло бы вид, аналогичный выражению (12.10а):

$$dT = dA - dt \sum_{i=1}^r \lambda_i G_i. \quad (12.10б)$$

<sup>1</sup>Если голономные связи (12.1) явно не зависят от времени, то любое бесконечно малое действительное перемещение системы можно рассматривать также как одно из виртуальных перемещений. Это справедливо и для неголономных связей вида

$$\sum_k F_{ik} \delta x_k = 0$$

как в том случае, когда  $F_{ik}$  явно зависят от времени, так и в том случае, когда  $F_{ik}$  от времени явно не зависят. Поэтому для связей такого вида работа реакций связей при любом бесконечно малом действительном перемещении системы равна нулю. Этого достаточно, чтобы показать, что в рассматриваемом случае справедлив закон сохранения энергии в форме (12.10). Действительно, обозначив реакции связей через  $R_k$ , мы можем написать:

$$m_k \ddot{x}_k = X_k + R_k.$$

Поскольку  $\sum_k R_k dx_k = 0$ , отсюда следует:

$$\sum_k m_k \ddot{x}_k dx_k = \sum_k X_k dx_k.$$

Так как  $dx_k$  *действительное* перемещение, то это уравнение приводится к виду (12.10).

Если же связи (12.1) явно зависят от времени, то действительные перемещения  $dx_k$  удовлетворяют уравнениям

$$\sum_k \frac{\partial F_i}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial F_i}{\partial t} dt = 0,$$

тогда как виртуальные перемещения  $\delta x_k$  — уравнениям

$$\sum_k \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \delta x_k = 0.$$

Работа реакций связей на действительных перемещениях в общем случае не равна нулю, и уравнение (12.10) не имеет места. (*Прим. ред.*)

В следующей главе на примере сферического маятника мы убедимся, что величины  $\lambda_i$  можно толковать как «реакции системы на воздействие (голономных и неголономных) связей». Там же мы увидим также, что фактическое определение величин  $\lambda$  должно производиться, исходя не из  $r$  произвольно выделенных уравнений, как это мы временно сделали при выводе уравнения (12.6), а из совокупности всех  $3n$  уравнений Лагранжа. Нужно подчеркнуть, что метод лагранжевых множителей играет существенную роль не только для уравнений Лагранжа первого рода, но также и для уравнения значительно более общего типа (ср. гл. VI, § 34); с другой стороны, этот метод встречается уже в элементарной теории максимумов и минимумов.

### § 13. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА И МОМЕНТА ИМПУЛЬСА (ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ И ЗАКОН ПЛОЩАДЕЙ)

Мы выведем эти законы для системы дискретных материальных точек, которую можно перемещать и вращать в пространстве, как целое. Законы эти могут быть, однако, путем предельного перехода распространены на свободно движущееся твердое тело или на произвольную механическую систему, подвижность которой не ограничена внешними связями.

Мы подразделим действующие силы на силы *внешние и внутренние*<sup>1</sup>. Внешнюю силу, приложенную к точке  $k$ , мы будем обозначать через  $\mathbf{F}_k$ , внутренние силы — через  $\mathbf{F}_{ik}$ , чтобы указать на то, что они являются силами взаимодействия двух точек системы и поэтому удов-

---

<sup>1</sup>Подразделение сил на «внешние и внутренние» ничего не говорит о происхождении сил и поэтому ни в коем случае не совпадает с приведенным на стр. 75 подразделением сил на «сторонние силы физического происхождения и силы реакции». Например, внутренние силы планетной системы являются сторонними силами физического происхождения, именно, силами тяготения; с другой стороны, внешняя сила, приводящая в движение поезд, является, как мы убедимся (см. стр. 115), силой реакции, именно силой трения сцепления вращающихся колес. Подразделение сил на внешние и внутренние производится только в зависимости от того, удовлетворяется или не удовлетворяется в пределах данной системы закон равенства действия и противодействия.

летворяют в пределах системы закону равенства действия и противодействия:

$$\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}. \quad (13.1)$$

В планетной системе существуют только внутренние силы.

А. Применяем *принцип Даламбера* в форме (10.5). Силу  $\mathbf{F}_k$  в этом уравнении мы заменяем через  $\mathbf{F}_k + \sum_i \mathbf{F}_{ik}$ , силу же  $\mathbf{F}^*$ , согласно ее определению, заменяем через  $-\dot{\mathbf{G}}_k$  и полагаем все  $\delta \mathbf{s}_k$  равными друг другу. Таким образом, мы сообщаем всем материальным точкам системы одно и то же виртуальное перемещение. Согласно (13.1), все внутренние силы  $\mathbf{F}_{ik}$  взаимно уничтожаются при суммировании по  $i$  и  $k$ , так что мы получаем:

$$\left( \delta \mathbf{s} \sum_k \mathbf{F}_k - \sum_k \dot{\mathbf{G}}_k \right) = 0. \quad (13.2)$$

Суммирование по  $k$  мы обозначим черточкой сверху; из равенства (13.2), ввиду произвольности  $\delta \mathbf{s}$ , получим:

$$\dot{\overline{\mathbf{G}}} = \overline{\mathbf{F}}, \quad (13.3)$$

$\overline{\mathbf{G}}$  есть полный импульс системы, равный векторной сумме импульсов всех материальных точек системы.

Введем понятие «скорости центра тяжести»  $\mathbf{V}$  с помощью соотношения

$$M\mathbf{V} = \overline{m\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{G}}, \quad M = \overline{m}.$$

Тогда уравнение (13.3) можно записать в виде:

$$M\dot{\mathbf{V}} = \overline{\mathbf{F}}. \quad (13.3a)$$

Выберем в качестве начала отсчета радиусов-векторов  $\mathbf{r}_k$  всех точек системы произвольную, но неподвижную точку  $O$  и назовем «центром тяжести» системы такую точку, радиус-вектор  $\mathbf{R}$  которой определяется соотношением

$$M\mathbf{R} = \overline{m\mathbf{r}}. \quad (13.36)$$

Уравнения (13.3a, б) гласят: *центр тяжести свободно движущейся механической системы движется так же, как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложена равнодействующая  $\mathbf{F}$  всех внешних сил.*

Б. Сообщим системе виртуальный поворот  $\delta\varphi$  вокруг произвольной оси, проходящей через точку  $O$ . В этом случае перемещения  $\delta\mathbf{s}_k$  различных точек  $m_k$  системы будут различными, а именно:

$$\delta\mathbf{s}_k = [\delta\varphi \mathbf{r}_k]. \quad (13.4)$$

Для доказательства рассмотрим рис. 15, на которой виртуальный поворот  $\delta\varphi$  изображен двояко: 1) в виде вектора, направленного по оси вращения, и 2) в виде круговой стрелки вокруг этой оси, образующей с ней правовинтовую систему. В силу определения векторного произведения абсолютная величина  $\delta\mathbf{s}_k$  равна:

$$\delta s_k = \delta\varphi |r_k| \sin \alpha = \delta\varphi \rho_k,$$

как это и должно иметь место в рассматриваемом случае. Направление вектора  $\delta\mathbf{s}_k$  также правильно определяется выражением (13.4). Этот вектор направлен за плоскость чертежа перпендикулярно к ней, что соответствует направлению изображенной на рис. 15 круговой стрелки.

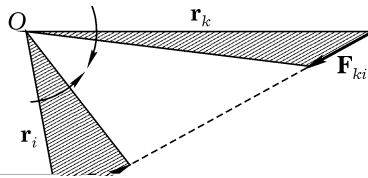
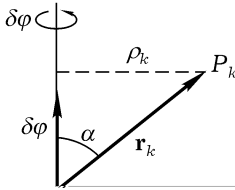


Рис. 15. Виртуальное смещение  $\delta s$ , связанное с виртуальным смещением  $\delta\varphi$

Рис. 16. Моменты внутренних сил попарно уравниваются друг друга

Внеся выражение (13.4) в уравнение (10.5) и преобразовав  $\mathbf{F}^*$  и  $\mathbf{F}$  так же, как в п. А, получаем:

$$\sum_k \left( \mathbf{F}_k + \sum_i \mathbf{F}_{ik} - \dot{\mathbf{G}}_k [\delta\varphi \mathbf{r}_k] \right) = 0. \quad (13.5)$$

которое гласит, что объем параллелепипеда, построенного на каких-либо трех векторах  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ , остается неизменным при циклической перестановке обозначений трех его ребер.

На этом основании можно вместо уравнения (13.5) написать:

$$\left( \delta\varphi, \sum_k [\mathbf{r}_k \mathbf{F}_k] + \sum_i \sum_k [\mathbf{r}_k \mathbf{F}_{ik}] - \sum_k [\mathbf{r}_k \dot{\mathbf{G}}_k] \right) = 0. \quad (13.7)$$

Таким образом, вектор  $\delta\varphi$  выделен в виде отдельного сомножителя. Вектор, на который умножается  $\delta\varphi$  в уравнении (13.7), должен, ввиду произвольности  $\delta\varphi$ , обращаться в нуль. Для упрощения записи введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_k &= [\mathbf{r}_k \mathbf{F}_k], \quad \text{как в (5.12),} \\ \mathbf{M} &= \sum \mathbf{M}_k, \end{aligned} \quad (13.7a)$$

$$\mathbf{N}_k = [\mathbf{r}_k \mathbf{G}_k], \quad [\mathbf{r}_k \dot{\mathbf{G}}_k] = \frac{d}{dt} [\mathbf{r}_k \mathbf{G}_k] = \dot{\mathbf{N}}_k, \quad (13.7б)$$

как в (5.14),

$$\bar{\mathbf{N}} = \sum \mathbf{N}_k, \quad \dot{\bar{\mathbf{N}}} = \sum \dot{\mathbf{N}}_k. \quad (13.7в)$$

Таким образом,  $\bar{\mathbf{M}}$  означает векторную сумму моментов всех внешних сил относительно общей для всех них точки отсчета  $O$ , а  $\bar{\mathbf{N}}$  — векторную сумму моментов импульсов всех материальных точек системы относительно той же точки отсчета  $O$ , или, короче, *полный вращательный импульс* (момент импульса) *системы*.

Далее, из рассмотрения рис. 16 убеждаемся, что все члены двойной суммы, входящей в уравнение (13.7), попарно взаимно уничтожаются, т. е.

$$[\mathbf{r}_k \mathbf{F}_{ik}] + [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_{ki}] = 0. \quad (13.8)$$

Это соотношение является следствием того, что внутренние силы по определению удовлетворяют принципу равенства действия и противодействия [уравнение (13.1)].

Из соотношения (13.8) следует, что двойная сумма в уравнении (13.7) обращается в нуль. Поэтому, используя обозначения (13.7a), (13.7б) и (13.7в), мы из уравнения (13.7) непосредственно получаем:

$$\dot{\bar{\mathbf{N}}} = \bar{\mathbf{M}}. \quad (13.9)$$

Это уравнение вполне аналогично уравнению (13.3). Оно гласит: *производная по времени полного момента импульса системы равна сумме внешних сил*, подобно тому, как по уравнению (13.3) *производная по времени полного импульса системы равна равнодействующей внешних сил*.

Фундаментальное уравнение (13.9) принято называть исторически сложившимся термином — «закон площадей». Мы предпочитаем называть его «законом момента импульса (или вращательного импульса)» и, в соответствии с этим, называть уравнение (13.3) «законом импульса».

Термин «закон площадей» возник в связи с задачей Кеплера. Но в то время, как в случае *одной* планеты секториальная скорость пропорциональна моменту импульса и вектор момента импульса направлен по нормали к площади, описываемой радиусом-вектором, в случае проблемы многих тел (многих планет) это уже не имеет места. В этом случае имеет место соотношение

$$\bar{\mathbf{N}} = \sum 2m_k \frac{d\mathbf{S}_k}{dt}, \quad (13.10)$$

в которое не только входят сомножителями отличающиеся друг от друга массы различных планет, но в котором секториальные скорости отдельных планет складываются векторно. Получающаяся таким способом секториальная скорость замкнутой планетной системы определяет, как известно, *неизменяемую* плоскость (плоскость, перпендикулярную к  $\bar{\mathbf{N}}$ ). Она неизменяема в силу того, что в замкнутой планетной системе нет внешних сил; поэтому  $\bar{\mathbf{M}} = 0$  и, согласно уравнению (13.9),

$$\bar{\mathbf{N}} = \text{const.} \quad (13.10a)$$

Вообще при  $\bar{\mathbf{M}} = 0$  из закона (13.9) получается в качестве частного его случая *закон сохранения момента импульса*.

Представление о площадях, описываемых радиусами-векторами, становится еще менее наглядным в случае системы, состоящей из бесконечного числа материальных точек, например, в случае твердого тела.

Равным образом, неудачен термин «центр тяжести», так как здесь речь идет не о «тяготеющих», а об «инертных» массах. Более подходящим был бы термин «центр инерции».

Чтобы некоторым образом пойти навстречу широко распространенной привычке к прямоугольным координатам, которым отдавалось

предпочтение в старых учебниках, мы приводим доказательства законов импульса и момента импульса методом координат.

Исходными являются уравнения:

$$\left. \begin{aligned} m_k \ddot{x}_k &= X_k + \sum_i X_{ik}, \\ m_k \ddot{y}_k &= Y_k + \sum_i Y_{ik}, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (13.11)$$

Произведя суммирование по  $k$  первой группы этих уравнений и имея ввиду, что  $X_{ik} = -X_{ki}$ , получим «закон движения центра тяжести» для  $x$ -компоненты

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_k m_k x_k = \sum_k X_k. \quad (13.12)$$

Умножая уравнения второй группы на  $x_k$ , а уравнения первой группы на  $-y_k$ , получим:

$$\sum_k m_k (x_k \ddot{y}_k - y_k \ddot{x}_k) = \sum_k (x_k Y_k - y_k X_k) + \dots \quad (13.13)$$

Не выписанные здесь члены мы группируем в пары с индексами  $ik$  и  $ki$  и записываем их так, чтобы явно выразить направление внутренних сил  $k \rightarrow i$  и  $i \rightarrow k$ . Получаем:

$$\begin{aligned} & x_k Y_{ki} - y_k X_{ki} + x_i Y_{ik} - y_i X_{ik} = \\ & = \frac{|\mathbf{F}_{ik}|}{r_{ik}} [x_k (y_i - y_k) - y_k (x_i - x_k) + x_i (y_k - y_i) - y_i (x_k - x_i)]. \end{aligned}$$

Но это выражение, как показывает рис. 16, равно нулю. Поэтому правая часть уравнения (13.13), если учесть соотношение (5.17а), сводится к

$$\sum_k \mathbf{M}_{kz} = \overline{\mathbf{M}}_z.$$

Левая же часть уравнения (13.13) на основании соотношения (5.14б) равна

$$\frac{d}{dt} \sum_k m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k) = \sum_k \dot{N}_{kz} = \dot{\overline{N}}_z.$$

Таким образом, уравнение (13.13) совпадает с «законом площадей» (13.9) для  $z$ -компоненты.

Между законом движения центра тяжести и законом площадей существует глубокое различие. Мы разберем его на частном случае системы, на которую *не действуют внешние силы*.

В этом случае, согласно уравнению (13.3а), скорость центра тяжести остается постоянной, ибо полная масса  $M$ , входящая в это уравнение в качестве множителя, также постоянна (хотя бы внутри системы и происходили относительные перемещения). Таким образом, если центр тяжести вначале находился в состоянии покоя, то он и будет пребывать в нем. *Внутренние силы* никогда не могут привести в движение центр тяжести, даже в шарнирном механизме или в теле животного (носа Мюнхгаузена!). Для того, чтобы привести в движение свой центр тяжести, необходимо от чего-либо оттолкнуться, т. е. необходима *внешняя сила*.

Так как при отсутствии внешних сил, очевидно, и  $\overline{\mathbf{M}} = 0$ , то из (13.9) следует

$$\overline{\mathbf{N}} = \text{const.} \quad (13.14)$$

Если момент импульса вначале был равен нулю, то он и останется равным нулю, даже если внутри системы и возможны относительные перемещения. Из этого, однако, еще не следует, что ориентация системы должна оставаться неизменной. Напротив, она может претерпевать произвольные изменения под воздействием одних только *внутренних сил*, без какого-либо отталкивания от внешнего тела.

Примером может служить кошка, которая при падении всегда становится на лапы. Это достигается посредством соответствующего поворота передних конечностей и противоположно направленного поворота задних конечностей. В «Comptes Rendus» Парижской академии за 1894 г. (стр. 714) помещены моментальные снимки, наглядно демонстрирующие это.

Сущность этого процесса можно легко проследить на примере вращающейся скамьи (скамьи Жуковского), представляющей собой горизонтальную площадку, которая может вращаться с возможно малым трением вокруг вертикальной оси. Человек, производящий опыт, стоит на площадке и находится вначале в покое:

$$\mathbf{N}_0 = 0.$$

Он поднимает правую руку, протягивает ее вперед и затем отводит назад. «Описанная при этом площадь» должна быть скомпенсирована поворотом в обратную сторону остальных частей тела и площадки, или, выражаясь точнее, момент импульса  $\mathbf{N}_1$  руки, производящей движение, вызывает появление момента импульса  $\mathbf{N}_2$  туловища и площадки, так что

$$\mathbf{N}_2 = -\mathbf{N}_1.$$

Затем человек опускает руку, что не вызывает изменения  $\mathbf{N}$ . Этим вновь восстанавливается исходное положение, и процесс можно начинать снова. При каждом его повторении происходит тот же самый поворот в обратную сторону  $\mathbf{N}_2$ . После  $n$  повторений человек, производящий опыт, замечает, что он повернулся лицом в направлении, прямо противоположном первоначальному. Таким образом, ориентация тела (в противоположность его центру тяжести) отнюдь не определяется исходным состоянием покоя.

Этот опыт можно еще более «усилить», если дать в руки лицу, производящему опыт, тяжелый груз. Этим, так сказать, увеличивается «описанная площадь», и поэтому заметно увеличивается поворот в обратную сторону.

Еще два опыта. 1) Человек, производящий опыт, стоит с опущенными руками на вращающейся скамье и получает момент импульса  $\mathbf{N}_0$ ; затем он поднимает руки (в руках могут быть грузы), разводя их в стороны. При этом вращение внезапно замедляется. 2) Человек с разведенными в стороны руками приводится во вращательное движение; затем он опускает руки и при этом большей частью падает со скамьи, потому что скорость вращения (особенно, если в руках у человека были грузы) внезапно значительно увеличивается.

В обоих случаях начальный и конечный вращательные импульсы равны между собой:

$$\mathbf{N}_0 = \mathbf{N}_1$$

и поэтому, согласно уравнению (11.6),

$$\Theta_0 \omega_0 = \Theta_1 \omega_1.$$

Но в первом случае

$$\Theta_0 \ll \Theta_1 \quad \text{и, следовательно,} \quad \omega_1 \ll \omega_0,$$

тогда как во втором случае

$$\Theta_0 \gg \Theta_1 \text{ и, следовательно, } \omega_1 \gg \omega_0.$$

Изменяемость момента инерции тела при одновременном сохранении момента импульса используется также при всех гимнастических упражнениях, особенно на турнике. Рассмотрим, например, «стойку передним махом» на турнике. Вначале при раскачивании тело гимнаста вытянуто, его момент инерции велик, скорость вращения вокруг турника невелика. При качании вперед непосредственно перед «стойкой передним махом» гимнаст подтягивает ноги, уменьшая тем самым свой момент инерции относительно турника, вследствие чего скорость вращения его становится большей. Центр тяжести гимнаста перебрасывается через перекладину турника, и гимнаст приходит наверху в положение вертикальной стойки. При этом следует обратить внимание на то, что реакции, вызванные руками, хватающими турник, не оказывают заметного влияния на момент импульса гимнаста, так как, вследствие малого диаметра перекладины турника, плечо этих реакций исчезающе мало.

Аналогично обстоит дело и с другими гимнастическими снарядами («конь», «козел» и т. д.). Вообще, гимнастика, катание на коньках, ходьба на лыжах являются прекрасной иллюстрацией к курсам прикладной и теоретической механики.

В заключение рассмотрим пример большого масштаба — *уравновешивание масс* в судовых поршневых машинах по *методу Шлика*.

Примерно в конце прошлого столетия, при переходе к современным быстроходным пароходам, судостроение переживало кризис. Скорость вращения вала судового двигателя по техническим причинам составляла около 100 об/мин. С такой же частотой изменяются и инерционные воздействия поршневых машин, которые должны восприниматься корпусом корабля. По мере увеличения длины корабля уменьшалась «собственная частота» его колебаний, которая, таким образом, оказалась в опасной близости к частоте инерционных воздействий. Здесь мы употребим уже термин «резонанс», на выяснении смысла которого мы подробно остановимся в следующей главе. Этот термин заимствован из акустики, где резонансные явления проявляются наиболее непосредственно и где они раньше всего были изучены.

На быстроходных судах, в целях экономии места, цилиндры паровых машин устанавливаются в вертикальном положении. Поэтому силы

инерции действуют также в вертикальном направлении. Рассмотрим, например, случай, когда четыре поршня (рис. 17) работают на один и тот же коленчатый вал, расположенный вдоль корабля (по оси  $z$ ). Мы увидим, что при меньшем числе поршней уравнивание масс невозможно, даже в первом приближении, которым мы здесь ограничимся. При выборе осей координат, указанном на рис. 17, силы инерции направлены по оси  $x$ ; они дают моменты только относительно оси  $y$ . Инерционные воздействия уравниваются реакциями корпуса корабля, который при этом приходит в ритмическое колебание.

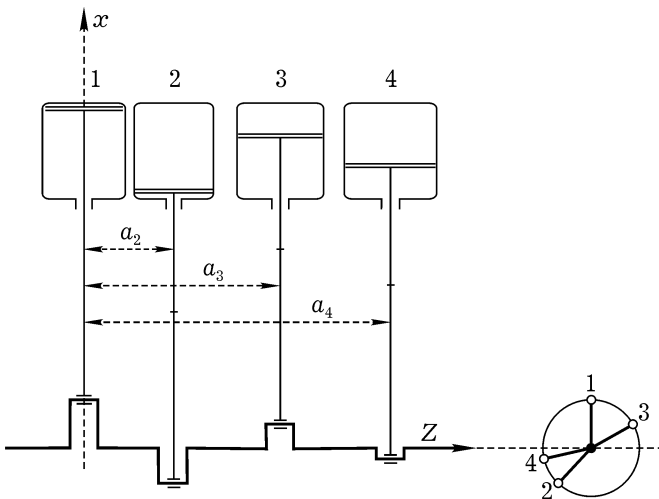


Рис. 17. Уравнивание масс в вертикальной «четырёхцилиндровой» поршневой машине (по Шлику). Справа внизу: взаимное расположение четырёх кривошипов (вид сбоку)

Это хорошо видно на моделях. Идеализированной схемой корпуса корабля здесь служит продолговатый брус, подвешенный на спиральных пружинах, позволяющих ему колебаться и играющих роль подъемной силы воды. Если привести в движение укрепленные на брус модели машин, то брус несколько прогибается. Если, далее, увеличивать число оборотов вала этих машин, то колебания бруса увеличиваются по мере приближения частоты оборотов к частоте главного собственного колебания бруса (рис. 18). Большие амплитуды колебаний оказали бы

вредное влияние на безопасность корабля (а также на состояние пассажиров). Инерционные воздействия машин — враги корпуса корабля. Нужно взаимно скомпенсировать эти воздействия, чтобы разгрузить от них корпус корабля. В этом заключается идея уравнивания масс.

Для *уравнивания сил инерции*, направленных только по оси  $x$ , необходимо, если мы сразу же перейдем от ускорений к самим координатам  $x$ , чтобы

$$\sum M_k x_k = 0. \quad (13.15)$$

В  $M_k$  нужно в первом приближении включить, помимо масс поршней и поршневого штока, также и массы шатуна и частей кривошипа.

По меньшей мере столь же важным является и *уравнивание моментов сил инерции*, причем здесь, как это уже указывалось и что можно видеть из рис. 17, играют роль только моменты относительно оси  $y$ . И в этом случае мы также сразу перейдем от ускорений к координатам, что возможно в силу постоянства плеч, на которые действуют силы инерции (расстояния  $a_k$  на рис. 17). Таким образом, мы требуем, чтобы

$$\sum M_k a_k x_k = 0. \quad (13.16)$$

Выразим теперь пути поршней  $x_k$  через углы поворота кривошипов  $\varphi_k$ . Согласно рис. 9 и уравнению (9.6), в первом приближении имеет место соотношение

$$x_k + r_k \cos \varphi_k = \text{const}. \quad (13.17)$$

«Первое приближение»<sup>1</sup> при этом означает предельный случай бесконечно длинного шатуна, т. е.  $\frac{r}{l} \rightarrow 0$ . Мы не будем здесь останавливаться на рассмотрении второго приближения, при котором, как и в уравнениях (9.5) и (9.6), учитывается первая степень малой величины  $\frac{r}{l}$ . Ввиду того, что все кривошипы работают на один и тот же коленчатый вал, все углы  $\varphi_k$  равны между собой с точностью до *постоянного во времени углового сдвига*  $\alpha_k$ :

$$\varphi_k = \varphi_1 + \alpha_k (\alpha_1 = 0, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \text{ произвольны}). \quad (13.18)$$

<sup>1</sup>Это первое приближение определяет уравнивание масс первого порядка. Так как мы им только и ограничимся, то мы не станем рассматривать второго приближения.



Рис. 18. Собственное колебание свободной балки как модель основного колебания судна

Переменная во времени часть выражения (13.15) и (13.16), которая только и играет роль при рассмотрении колебаний, дает на основании соотношений (13.17) и (13.18)

$$\begin{aligned} \sum M_k r_k \cos(\varphi_1 + \alpha_k) &= 0, \\ \sum M_k r_k a_k \cos(\varphi_1 + \alpha_k) &= 0. \end{aligned} \quad (13.19)$$

Каждый из множителей при  $\cos \varphi_1$  и  $\sin \varphi_1$  в отдельности должен обращаться в нуль. Таким образом, получаем следующие четыре уравнения, связывающие между собой параметры  $\alpha_k$  и  $a_k$

$$\left. \begin{aligned} \sum M_k r_k \cos \alpha_k &= 0, & \sum M_k r_k \sin \alpha_k &= 0, \\ \sum M_k r_k a_k \cos \alpha_k &= 0, & \sum M_k r_k a_k \sin \alpha_k &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.20)$$

Величины  $M_k$  и  $r_k$  устанавливаются из конструктивных соображений. Таким образом, можно распоряжаться тремя угловыми сдвигами  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  и двумя отношениями отрезков  $a_2 : a_3 : a_4$  [абсолютные величины отрезков  $a$  не входят в уравнение (13.20)], т. е. в общем пятью параметрами. Следовательно, при выполнении условий (13.20) остается еще известная свобода выбора, что позволяет избежать технически непригодных решений. Таким образом, мы показали, что уравнивание масс выполнимо в первом приближении в случае четырехцилиндровых машин, но невозможно, как мы и утверждали, при меньшем числе цилиндров (ввиду недостатка необходимого числа свободных параметров). Внешний признак уравнивания масс по методу Шлика заключается в том, что расстояния между поршнями четырехцилиндровой машины отнюдь не одинаковы и что их кривошипы расположены не под одинаковыми углами друг к другу; последнее обстоятельство иллюстрируется схемой справа внизу на рис. 17.

Этот метод уравнивания масс оправдался на быстроходных судах линии Гамбург–Америка и позволил предотвратить опасность резонанса. Впрочем, уравнивание масс практически имело лишь переходящее значение для судостроения, так как вскоре повсюду перешли от поршневых машин к турбинам, в которых нет масс, совершающих возвратно-поступательное движение. Но в автомобильных и авиационных моторах, а также и в дизель-моторах подводных лодок уравнивание масс еще и поныне играет важную роль.

### О числе выполнимых в общем виде интеграций уравнений движения замкнутой системы

Механическая система называется замкнутой, если она не подвержена воздействию внешних сил и в ней действуют только внутренние силы<sup>1</sup>. Закон движения центра тяжести и закон площадей становятся в этом случае законами сохранения импульса и момента импульса. Первый из этих законов содержит  $2 \cdot 3$ , второй 3 постоянных интегрирования. Далее, имеет место закон сохранения энергии, содержащий одну постоянную. Таким образом, всего имеется

$$2 \cdot 3 + 3 + 1 = 10 \quad (13.21)$$

*интегралов уравнения движения.*

Это относится к трехмерному случаю. В случае двух измерений, например, в астрономической задаче двух тел, имеется только один момент импульса (направленный перпендикулярно к общей плоскости траектории обоих тел) и  $2 \cdot 2$  постоянных, содержащихся в законе движения центра тяжести (это движение происходит в плоскости траектории); таким образом, вместе с одной постоянной из закона сохранения энергии имеется

$$2 \cdot 2 + 1 + 1 = 6 \quad (13.22)$$

*интегралов движения.*

В случае одного измерения число интегралов сводится, очевидно, к

$$2 \cdot 1 + 0 + 1 = 3. \quad (13.23)$$

Общая формула для  $n$  измерений имеет вид:

$$n + 1 + \frac{1}{2}n(n + 1). \quad (13.24)$$

Лучше всего уяснить себе эту формулу релятивистски, положив  $n = 3$  и присоединив время в качестве четвертой координаты. В этом случае надо образовать четырехмерный вектор импульса  $\mathfrak{G}$ , который получается из уравнения (2.19) путем суммирования по всем точкам системы. Основные уравнения релятивистской механики гласят, что этот четырехмерный вектор остается постоянным, причем его

<sup>1</sup>При достаточном расширении системы, а именно, если в систему включить источники внешних сил, всякая система, конечно, станет замкнутой.

временная слагающая (с точностью до множителя  $-ic$  и до аддитивной постоянной) совпадает с кинетической энергией. Получающиеся таким образом четыре интеграла (закон сохранения импульса и энергии) учтена в формуле (13.24) членом  $(n + 1)$ . Второй член этой формулы соответствует попарным комбинациям осей при образовании моментов. Однако в то время, как комбинации двух пространственных осей дают, очевидно, законы площадей в обычном смысле слова, *комбинация оси времени с одной из пространственных осей дает вторые интегралы движения центра тяжести*, выражающие прямолинейность движения этого центра. Действительно, если мы, как на стр. 96, будем обозначать черточкой сверху суммирование по всем материальным точкам, то из формулы (2.19), заменив в ней  $\sqrt{1 - \beta^2}$  единицей, получим

$$x_k \mathfrak{G}_4 - x_4 \mathfrak{G}_k = ic(\overline{m_k x_k} - \overline{t m_k \dot{x}_k}), \quad k = 1, 2, 3.$$

Согласно закону сохранения моментов, эта величина постоянна. Если мы положим ее равной  $ic\mathbf{A}_k$ , то, пользуясь обозначениями (13.3а, б), получим следующее равенство (в трехмерной векторной записи):

$$\mathbf{R} - t\mathbf{V} = \mathbf{A}. \quad (13.25)$$

Поскольку  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{V}$  постоянны, это равенство означает, что центр тяжести действительно движется прямолинейно и равномерно. Нам представляется, что такое рассмотрение, особенно выигрывающее в ясности благодаря использованию четырехмерной симметрии пространства — времени, достаточно хорошо разъясняет общую формулу (13.24).

Однако мы дополним подсчеты числа интегралов движения (13.21) и (13.22) еще одним замечанием, важным для астрономии. Для полного интегрирования знаменитой задачи трех тел, т. е. для нахождения выражений для  $3 \cdot 3$  координат и  $3 \cdot 3$  компонент скоростей потребовалось бы

$$2 \cdot 3 \cdot 3 = 18 \quad (13.26)$$

первых интегралов движения, каждый из которых [ср., например, уравнение (13.25)] дает по одному (связанному с одной постоянной интегрирования) соотношению между координатами и компонентами скоростей. Из сравнения подсчета (13.26) с подсчетом (13.21) видно, что для полного интегрирования здесь не хватает 8 интегралов. В продолжение столетий величайшие математики от Лагранжа до Пуанкаре доказывали, что эти недостающие интегралы не могут быть получены в алгебраической форме; окончательное доказательство этого дал Г. Брунс.

Соответствующий подсчет для задачи двух тел (плоской по самому своему существу) показывает, что для полного интегрирования в этом случае необходимо знание не  $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ , а лишь

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

интегралов движения, т. е. нам нужно знать лишь на два интеграла больше, чем имеется в нашем распоряжении, согласно подсчету (13.22), для случая плоского движения. Однако эти два интеграла движения действительно могут быть найдены, как это видно из перехода от уравнений (6.4) к уравнениям (6.5). *Поэтому проблема двух тел является разрешимой, а проблема трех тел, вообще говоря, неразрешимой математической задачей (т. е. задачей, разрешимой путем последовательных приближений)*. Только при весьма специальных допущениях относительно рода движения мы сможем дать в § 32 решение этой задачи в законченной форме.

## § 14. ДОБАВЛЕНИЕ: О ЗАКОНАХ ТРЕНИЯ

Мы уже подчеркивали (§ 11, раздел 4), что при передвижении некоторой массы по заданному пути составляющая реакции, направленная вдоль траектории, не может быть определена из общих принципов механики, а подлежит экспериментальному определению. Это было сделано (после ряда подготовительных работ других исследователей) в 1785 г. А. Кулоном (с именем которого навсегда связано установление основных законов электростатики и магнитостатики) в результате проведенных им знаменитых, очень точных для того времени, исследований.

Следуя Кулону, мы различаем:

- а) *трение покоя, или трение сцепления,*
- б) *трение движения, или трение скольжения.*

### 1. Трение покоя

Если к телу, пребывающему в покое на плоском основании, приложить силу  $Z$ , параллельную основанию, то при малой силе  $Z$  тело останется неподвижным. Поэтому мы должны предположить, что сила  $Z$  уравновешивается силой трения  $R$ . Если, однако, сила  $Z$  превзойдет некоторую вполне определенную величину, то тело придет в ускоренное движение.

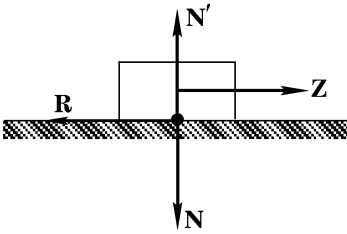


Рис. 19. Трение покоя на плоском основании

Согласно Кулону (а также его предшественникам), эта граница  $R_{\max}$  пропорциональна нормальному давлению  $N$ , которое в случае тела, пребывающего в состоянии покоя на горизонтальном основании, равно попросту весу  $G$  тела. Таким образом,

$$R_{\max} = f_0 \cdot N. \quad (14.1)$$

Множитель пропорциональности  $f_0$  называется *коэффициентом трения покоя*; он зависит от природы и свойств поверхностей соприкасающихся друг с другом материалов. Если эти материалы одинаковы, то коэффициент трения  $f_0$  особенно велик (заедание).

С помощью соотношения

$$f_0 = \operatorname{tg} \varphi \quad (14.2)$$

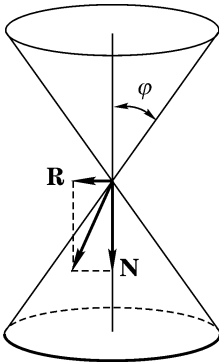


Рис. 20. Построение угла трения и конуса трения

можно ввести угол  $\varphi$ , который можно рассматривать как половину угла при вершине так наз. «конуса трения». До тех пор, пока равнодействующая обеих реакций  $R$  и  $N$  находится внутри этого конуса, движение не может наступить (рис. 20). Когда же эта равнодействующая лежит на боковой поверхности конуса трения, наступает движение.

Физический смысл угла трения становится весьма наглядным при рассмотрении опытов с наклонной плоскостью, впервые поставленных Галилеем (рис. 21). Без дальнейших пояснений пишем:

$$N = G \cos \alpha, \quad Z = G \sin \alpha = -R.$$

Поэтому из

$$R < R_{\max} = f_0 \cdot N = \operatorname{tg} \varphi \cdot N$$

вытекает следующее условие покоя:

$$G \sin \alpha < \operatorname{tg} \varphi \cos \alpha \cdot G,$$

т. е.

$$\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \varphi,$$

или

$$\alpha < \varphi. \quad (14.3)$$

Тело пребывает в состоянии покоя на наклонной плоскости до тех пор, пока  $\alpha < \varphi$ . Таким образом, *угол трения  $\varphi$  означает тот угол наклона плоскости, при котором начинается скольжение.*

Приведем менее тривиальный пример. К вертикальной оси прикреплен под углом  $\frac{\pi}{2} + \alpha$  боковой стержень, на который надета подвижная втулка (рис. 22). Если ось не вращается, то втулка покоится или движется, смотря по тому, имеет ли место  $\alpha < \varphi$  или  $\alpha > \varphi$ . Если же ось привести во вращение, то к силе тяжести  $mg$  векторно прибавится центробежная сила  $mr\omega^2$ .

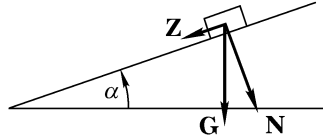


Рис. 21. Равновесие на наклонной плоскости

В результате сложения этих двух сил возникают нормальная сила  $N$  и «тянущая» сила  $Z$ , равные, согласно чертежу,

$$\begin{aligned} N &= m(g \cos \alpha + r\omega^2 \sin \alpha), \\ Z &= \pm m(g \sin \alpha - r\omega^2 \cos \alpha). \end{aligned}$$

При этом двойной знак у  $Z$  означает, что для этой силы мы можем считать положительным как направление вверх, так и направление вниз, т. е. что мы можем рассматривать скольжение втулки как вниз, так и вверх<sup>1</sup>.

Согласно соотношениям (14.1) и (14.2), втулка находится в равновесии, если имеет место неравенство

$$\pm(g \sin \alpha - r\omega^2 \cos \alpha) < \operatorname{tg} \varphi (g \cos \alpha + r\omega^2 \sin \alpha).$$

Если здесь заменить знак  $<$  знаком  $=$ , то мы получим «границы» равновесия, т. е. начало скольжения. Определим эти предельные положения равновесия с помощью тригонометрического преобразования отдельно для каждого из знаков  $+$  и  $-$ .

<sup>1</sup>То или другое направление скольжения втулки определяется соотношением силы тяжести и центробежной силы. (Прим. ред.)

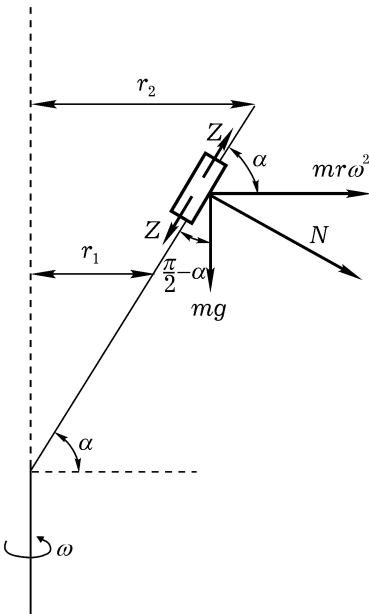


Рис. 22. Подвижная втулка на наклонном вращающемся стержне. Равновесие при учете трения

Равновесие при учете трения (при  $\omega \rightarrow 0$  втулка находится в равновесии благодаря трению) радиус  $r_1 = 0$  (по формуле даже отрицателен), и только радиус  $r_2$  положителен; с возрастанием  $\omega$  радиус  $r_2$  также приближается к нулю.

## 2. Трение при движении

В этом случае справедлив закон трения

$$R = fN. \quad (14.4)$$

Коэффициент трения скольжения  $f$  в основном не зависит от скорости движения<sup>1</sup> и, подобно коэффициенту трения покоя  $f_0$ , является

<sup>1</sup>Опыт эксплуатации железных дорог показал, что при больших скоростях  $v$  коэффициент  $f$  монотонно убывает с возрастанием  $v$  (трение скольжения между колесами и тормозными колодками).

Знак +, скольжение вниз:

$$g \sin(\alpha - \varphi) = r_1 \omega^2 \times \cos(\alpha - \varphi),$$

знак -, скольжение вверх:

$$g \sin(\alpha + \varphi) = r_2 \omega^2 \times \cos(\alpha + \varphi),$$

или, объединяя эти результаты,

$$\left. \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix} \right\} = \frac{g}{\omega^2} \operatorname{tg}(\alpha \mp \varphi).$$

Следовательно, трение определяет конечный интервал радиусов вращения

$$r_1 < r < r_2,$$

внутри которого втулка находится в равновесии.

В случае, если  $\alpha > \varphi$  (при  $\omega \rightarrow 0$  втулка скользит вниз), оба радиуса  $r$  положительны и тем более отличаются друг от друга, чем меньше  $\omega$ . В случае  $\alpha < \varphi$  (при  $\omega \rightarrow 0$  втулка находится

постоянной, зависящей от материала и свойств поверхностей. При этом заслуживает особого внимания тот факт, что

$$f < f_0. \quad (14.5)$$

В случае скольжения по прямолинейной траектории сила нормального давления  $N$  равна силе тяжести (или перпендикулярной к траектории слагающей силы тяжести); в случае же искривленной траектории следует, кроме силы тяжести, принимать во внимание также и центробежную силу, в соответствии с уравнением (11.15).

Поясним неравенство (14.5) при помощи крайне примитивного, но поразительного по своему результату опыта: положите трость на указательные пальцы правой и левой рук. Согласно рис. 11а, распределение сил будет таково:

$$A = \frac{b}{a+b}G; \quad B = \frac{a}{a+b}G.$$

Приближайте указательные пальцы друг к другу. Скольжение будет происходить попеременно то на правом, то на левом пальце до тех пор, пока пальцы не соединятся. Спрашивается, где произойдет их соединение? (В дальнейшем ходе рассуждения мы будем буквами  $A$  и  $B$  обозначать ради краткости не только силы давления трости на оба пальца, но и точки приложения соответствующих сил, т. е. сами пальцы.)

Пусть вначале  $A > B$ . Таким образом, скольжение начинается у  $B$ . Но палец  $B$  движется не только до тех пор, пока расстояние  $a$  не станет равным расстоянию  $b$ , а продолжает скользить до точки  $b_1 < a$ , где трение скольжения в точке  $B$  будет равно трению покоя в точке  $A$ . Далее имеем

$$R_{B, \text{ движ.}} = fa \frac{G}{a+b}, \quad R_{A, \text{ пок.}} = f_0 b \frac{G}{a+b}.$$

Приравнивая эти выражения для случая  $b = b_1$ , получаем

$$fa = f_0 b_1, \quad \frac{a}{b_1} = \frac{f_0}{f} > 1.$$

В этот момент должно начаться скольжение у пальца  $A$ . Но так как сила трения  $R_{A \text{ пок.}}$  тотчас же перейдет в  $R_{A \text{ движ.}} < R_{A \text{ пок.}}$ , то сила трения  $R$  в точке  $b_1$  будет больше силы трения в точке  $A$ , т. е.  $B$  перестанет двигаться, и сила трения  $R_{B \text{ движ.}}$  перейдет в  $R_{B \text{ пок.}}$ .

Это повторяется в каждой точке «смены движения». При этом пальцы  $A$  и  $B$  приближаются (так как всякий раз фигурирует частное  $f_0/f$ ) в геометрической прогрессии к центру тяжести, при достижении которого  $a = b = 0$ . В конечном состоянии трость находится в равновесии на сошедшихся друг с другом пальцах.

Вернемся к трению покоя, которое в качестве трения сцепления имеет решающее значение при чистом качении. Как ни парадоксально, но именно это трение заставляет поезд двигаться вперед (то же самое нужно сказать и об автомобиле; пешеход на гладком полу также движется вперед лишь благодаря трению сцепления). Давление пара, поскольку оно является внутренней силой, никогда не могло бы привести в движение центр тяжести паровоза. Для этого необходима внешняя сила — реакция между рельсами и колесами, т. е. как раз трение сцепления.

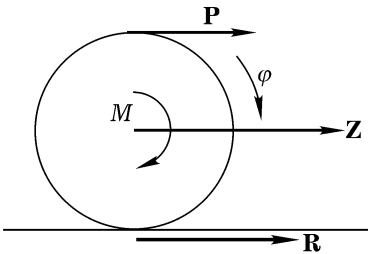


Рис. 23. Реакция между колесом локомотива и рельсом. В случае чистого качения возникающее трение покоя приводит поезд в движение

$W$  — сопротивление движению (сопротивление воздуха, потери на трение в осевых подшипниках и т. д.),  $\Theta$  — момент инерции колеса, то уравнения движения будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{z} &= R - W, \\ \Theta\ddot{\varphi} &= M - Rr. \end{aligned} \right\} \quad (14.7)$$

Трение сцепления нельзя установить *a priori*; его можно, однако, определить из вышеприведенных уравнений следующим образом. Сперва

Рассмотрим приведенное в движение колесо паровоза (рис. 23). Паровой двигатель передает посредством шатуна момент  $M$  на колесо; первичным действием этого момента было бы приведение колеса в ускоренное вращение. Последнее, однако, не осуществляется ввиду наличия чистого качения, условием которого, согласно уравнению (11.10), является

$$\dot{z} = r\omega. \quad (14.6)$$

Если  $m$  — масса поезда, приходящаяся на приведенное в движение колесо,

нужно исключить  $R$  из уравнений, эквивалентных уравнениям (14.7):

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{z} &= R - W; \\ m_{\text{прив.}}\ddot{z} &= P - R. \end{aligned} \right\} \quad (14.8)$$

Здесь  $P$  — окружная сила, соответствующая моменту  $M$ , а  $m_{\text{прив.}}$ , как и в уравнении (11.8), — приведенная масса, соответствующая моменту инерции  $\Theta$ :

$$M = Pr, \quad \Theta = m_{\text{прив.}} \cdot r^2.$$

Из уравнений (14.8) получаем

$$(m + m_{\text{прив.}})\ddot{z} = P - W \quad (14.9)$$

и, принимая во внимание первое уравнение (14.8),

$$R = W + \frac{m}{m + m_{\text{прив.}}}(P - W) = \frac{mP + m_{\text{прив.}}W}{m + m_{\text{прив.}}}. \quad (14.10)$$

Формулу (14.9) можно было бы, впрочем, написать и прямо на основании принципа Даламбера. Первое из уравнений (14.8) содержит количественное доказательство нашего утверждения, что силой, движущей поезд, является трение сцепления  $R$ . В частности, для равномерного движения это уравнение дает

$$R = W.$$

Окружная сила  $P$ , обусловленная давлением пара, нужна здесь для того, чтобы, как это показывает второе уравнение (14.8), вызвать трение сцепления между рельсами и колесами паровоза.

Обычный рельсовый путь называют (в отличие от зубчатой железной дороги) *адгезионным путем* (адгезия — молекулярное сцепление). Это название подчеркивает, что здесь главную роль играет сцепление колес с рельсами и, следовательно, трение сцепления. Признаком этого является также непрерывное повышение веса паровозов, сопровождающее увеличение нагрузки или скорости поездов на железнодорожном транспорте. Это обстоятельство прямо указывает на закон трения Кулона [уравнение (14.1)], по которому трение сцепления пропорционально нормальному давлению  $N$ . Тот общеизвестный факт, что на скользких рельсах (обледенелых и т. п.) сцепления не получается

и колеса начинают скользить, указывает на роль другого сомножителя,  $f_0$ , в уравнении (14.1), который, как уже подчеркивалось, зависит от состояния поверхности рельсов. Для увеличения этого коэффициента трения  $f_0$  рельсы в необходимых случаях посыпают песком (чем предотвращается скольжение колес).